Глава V
ДЕЛЕНИЕ

«…а когда имеешь дело с делением, то дроби появятся обязательно…

Поскольку оперировать дробями гораздо труднее, чем целыми числами, поначалу школьники их почти ненавидят. Им удалось научиться **работать** с целыми числами, они этим очень довольны — и вдруг оказывается, что существует такая штука — «высшая математика». Очень часто **это разочарование сохраняется на всю жизнь**, так что **страх перед делением** питают многие взрослые.

И этот страх больше всего преследует людей, когда им приходится проводить деление» (все выделено мной. — В. Х. [27, с. 81–82]).

Так в своей книжке «Занимательная арифметика» пишет о действии деления известный ученый и знаменитый писатель-фантаст Айзек Азимов.

Не знаю, как насчет страха, а вот то, что в своей ликбезовской работе со школьниками я не встречал еще ни одного, кто умел бы делить вручную — «уголком» — это факт (бывали случаи, когда старшеклассники неплохо справлялись с программой по алгебре, а вот делить вручную не умели). Однако в этой книге вопроса вычислительных навыков я почти не касаюсь (в приложении 3 будет рассмотрен только алгоритм деления «уголком» — его содержательная сущность) и рассматриваю лишь самую суть арифметических действий. Но действие деления не только сложно, но и крайне значимо для уяснения физического смысла величин, используемых в физике (а значит, и во всех отраслях знания, применяющих физику). Поэтому, читатель, на сей раз вам придется напрячься, — и напрячься всерьез! Но кто сказал, что все в элементарной арифметике будет просто и легко!

Вы заметили, что цитируя А. Азимова, я выделил слово «**работать**»? Обычный «примитивный» счет — работа, серьезная работа. Но эта работа может быть тупой и бессмысленной, если ребенок не понимает смысла своих действий, или разумной и приносящей удовлетворение от полученных результатов — при ясном понимании того, что он делает.

Итак, за работу — «глаза боятся, а руки делают»!

Немного о делении

Как умножение возникает из задачи сложения нескольких равных чисел, так и деление появляется из вполне конкретной задачи: «**распределить поровну**».

Пусть имеется 6 лошадей и 2 воина. Спрашивается: как **поровну распределить** (раздать, поделить) этих лошадей между воинами? Или иначе: сколько лошадей получит **каждый** воин? Очевидно (рис. 1), каждому достанется по 3 лошади.

Рис. 1

Но так же, как при умножении мы задавались вопросом о том, что делать, если у нас не 2–3 одинаковых слагаемых, а 15, 200 или 1200 (уж слишком много надо складывать чисел), точно также и задача «распределить поровну» становится затруднительной, если нужно, скажем, распределить 3759 лошадей между 1253 воинами. И гораздо более сложной, нежели умножение, еще и потому, что мы не знаем заранее по сколько лошадей нужно дать каждому воину — это-то как раз и составляет вопрос задачи.

Конечно, мы могли бы выстроить в шеренгу (нарисовать) 1253 воина, напротив, в другую шеренгу (тоже нарисовать), — 3759 лошадей, и спустя некоторое время (отнюдь не малое) **опытным путем** нашли бы, что каждому воину достанется по 3 лошади.

Ясно, что такой экспериментальный (практический) путь распределения поровну совершенно неприемлем при мало-мальски большом числе предметов.

Осознав задачу, попытаемся найти ее наиболее простую математическую форму (математическую модель). Нельзя ли это самое «распределить поровну» свести к более простому, уже известному действию?

Ну конечно же можно. При умножении мы как раз и работали с равными слагаемыми. Давайте-ка запишем нашу задачу в виде умножения, а для этого сформулируем ее в конкретных числах.

Задача

Пусть на 6 тарелках **поровну** разложены 30 яблок. Сколько яблок **на каждой** тарелке?

Видим, что у нас есть **6 слагаемых Т**(арелка). Известно **В**(сего) — 30 яблок. И известно, что **на каждой** тарелке — **одинаковое** число яблок. Вот только неизвестно, сколько именно. А раз неизвестное число, то и обозначим содержимое каждого слагаемого **Т** буквой x.

Нарисуем задачу (рис. 2).

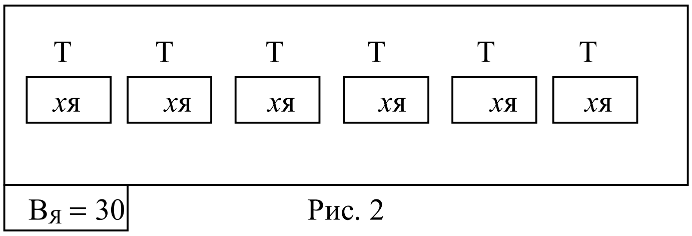


Рис. 2

Теперь наша задача совершенно аналогична задаче 1 из цикла I, главы IV (сравните данный рис. 2 и рис. 1 из вышеназванной задачи 1). Мы можем записать сложение равных слагаемых в виде умножения (рис. 3).

	Сложение		Умножение
Алгебра	Т + Т + Т + Т + Т + Т	=	Т•6
Арифметика	$\underbrace{x_я + x_я + x_я + x_я + x_я + x_я}_{6\ раз}$	=	$\boxed{x_я \bullet 6 = 30я}$

Рис. 3

Рассмотрим равенство, которое я обвел рамкой и его члены (без «размерностей»):

$x \bullet 6 = 30 \quad (1)$

x — **неизвестный** множитель[1]

6 — **известный** множитель

30 — **известное произведение**.

[1] В равенстве (1) я рассматриваю **множимое** — x и **множитель** — 6 как равноправные сомножители (или просто множители).

Равенство с неизвестной величиной, как мы помним, называется уравнением (задача 1, цикл I, глава III). И так же, как при вычитании мы экспериментальным путем (подбором) нашли неизвестное слагаемое для уравнения $x + 5 = 8$ (см. п. «Немного об уранениях», глава III), точно так же и сейчас мы можем найти неизвестную величину x в уравнении $x \bullet 6 = 30$, спросив себя: чтó (какое число) нужно умножить на 6, чтобы получить 30? При **хорошем знании** таблицы умножения ответ получаем мгновенно: $x = 5$ (т. к. $5 \bullet 6 = 30$). Наша задача решена: **на каждой** тарелке **Т** лежит 5 яблок. Или иначе: 30 яблок мы **распределили поровну** по 6 тарелкам.

Таким образом, мы не только решили конкретную задачу о яблоках, но и нашли общий подход к исходной задаче «распределить поровну».

Видим: в уравнении (1) **по известному произведению** (30) и **известному множителю** (6) мы нашли **неизвестный множитель** ($x = 5$). Так же, как при вычитании, мы говорим:

Вот это действие — поиск неизвестного множителя — и называется <u>делением</u>.

А обозначать **само новое действие** будем так: $x = 30 : 6$ (произносится, мы знаем, тридцать разделить на шесть).

И опять же — **самое главное!** — мы всегда будем помнить, что

$x \bullet 6 = 30$ и $x = 30 : 6$ (2)

это «**одно и то же**» (одна и та же математическая модель, см. п. «О словах: «одно и то же», глава III).

В записи (2) $x \bullet 6 = 30$ — это уравнение, а $x = 30 : 6$ — решение уравнения[2].

Осталось условиться **о терминологии** (сравните с терминологией вычитания: цикл I, глава III):

Видим: делимое — это произведение, делитель и частное — это множители.

множители				**произведение**
5	•	6	=	30
30	:	6	=	5
30	:	5	=	6
делимое произведение		**делитель множитель**		**частное множитель**

Все вроде бы хорошо, читатель. Зная таблицу умножения (однозначных чисел), мы, тем самым, знаем и таблицу деления (полный аналог с таблицами сложения и вычитания).

И действительно, на уровне решения **числовых <u>примеров</u>** — все просто. Ну разве что научиться грамотно делить «уголком» (приложение 3). Какие проблемы?

Проблемы возникают при решении задач, и связано это с тем, что множимое и множитель — принципиально неравноправны (скажем так, в приложениях деления).

В простейшем случае множимое (содержимое, значение повторяющегося слагаемого) — «размерная» величина, а множитель (число равных слагаемых) — безразмерная величина (просто число). Смотрите: 5я(блок) · 6(раз) = 30я(блок).

[2]Это уравнение назовем **вторым** уравнением (в отличие от **первого** нам известного $8 = 5 + x$) или основным уравнением второй группы умножения-деления (см. п. Еще немного об уравнениях в конце данной главы).

Что же получается: 30 яблок разделить на 6 **раз** будет 5 яблок, так что ли? Что это еще за «разы»?!

На самом деле у нас не какие-то неведомые «разы», а вполне конкретные вещи — **тарелки** (6 тарелок). И решая нашу **конкретную** задачу, записанную в виде уравнения $x_я \cdot 6 = 30я$ (рис. 3), мы, на самом деле, должны были бы написать не просто **число 6**, а **6** чего? — **тарелок**, т. е. что-то вроде **6(т)**.

При умножении нас интересует только **число** равных слагаемых («разы»), и, в общем-то, неважно, чего именно: 6 тарелок, 6 коробок и т. п. Но при делении ситуация в корне меняется. Смотрите, я запишу уравнение задачи так: xя(блок) $\cdot$ 6т(арелок) = 30я(блок). Как же теперь записать решение? По-прежнему: 30я(блок) **:** 6т(арелок) = 5я(блок)?

Нет, теперь у нас участвуют два **разных** объекта: **яблоки** и **тарелки**. Помните, выше о решении я сказал: **на каждой** тарелке лежит 5 яблок? То есть распределив (разделив) **поровну** 30 яблок, мы получили **не просто** 5 яблок, а 5 яблок **на каждой** (одной) тарелке. Будем обозначать аналогично тому, как это делается в физике, «размерность» такого решения так: 5я/т (или, несколько выходя за рамки физических обозначений, 5яблок/на 1-й тарелке. Косая черта напоминает о действии деления.

А вот теперь мы приходим еще к одному смыслу деления (помимо рассмотренных выше двух смыслов: **практического** и **математического**). Назовем его — «**физическим**».

Этот смысл предельно прост: 6т(арелок) — **делитель**; результат же деления — частное — 5 яблок **на одной** тарелке.

Значит, мы можем сказать, что 5яблок/на 1-й тарелке — результат деления — это **содержимое единицы делителя**.

Подробнее о «физическом» смысле деления в применении к физическим величинам будет сказано в конце главы, в п. «Физический смысл величин, размерность и деление на равные части», но применять его мы начнем сразу же, в цикле I.

Однако вышесказанным трудности, связанные с использованием деления в задачах, не исчерпываются. А что будет, если я в нашем уравнении (1) $x \cdot 6 = 30$ сделаю множимое известным, **а неизвестным — множитель**, т. е. напишу $5 \cdot x = 30$? Решение, понятно, будет $x = 30$ **:** 5 (найти **неизвестный множитель** — значит, действие деления).

А теперь запишем с «размерностями». Уравнение: 5я(блок) $\cdot\ x$ = 30я(блок), решение уравнения x = 30я(блок) **:** 5я(блок). Но x чегó? — Правильно, **тарелок**.

Видим, что **одно и то же** — **<u>формально</u>** — действие деления (поиск неизвестного множителя) распадается **на две совершенно разные** — **<u>содержательно</u>** — формы, которые носят названия: деление на равные части и деление по содержанию.

Ими мы и займемся в циклах I и II.

Примечание.

Всем известное утверждение: на ноль делить нельзя обосновывается очень просто.

Возьмем числовой пример — мы хотим узнать, чему равно частное от деления числа 30 на 0. Обозначим это частное через x. В виде деления можем записать $30 : 0 = x$, а в виде умножения — $30 = x \cdot 0$.

Но мы знаем, что любое число, умноженное на ноль, дает в результате ноль. В приведенном выше равенстве справа стоит $x \cdot 0$, т. е. произведение должно быть равно нулю. Левая же часть равенства равна 30. Получается, что наше равенство должно выглядеть так: $30 = 0$, что, естественно, невозможно.

А вот ноль поделенный на любое число (кроме нуля!) дает в результате ноль. Смотрите (опять на примере): $0 : 30 = x \Leftrightarrow 0 = x \cdot 30 \Rightarrow x = 0$.

Цикл I. Деление на равные части. Уменьшить в несколько раз (ГРАЭЛ-$(:)_р$)

Деление на равные части

1. **На** 6 тарелках
30 яблок.
Сколько яблок **на одной** тарелке? $(:)_р$

2. **В** 8 ящиках
160 книг.
Сколько книг **в каждом** ящике? $(:)_р$

3. **350** школьников поехали на экскурсию **на 10** автобусах. Сколько школьников село **в каждый** автобус? $(:)_р$

4. В парке посадили восемьдесят роз **в четыре** ряда. Сколько роз было посажено **в каждом** ряду? $(:)_р$

5. (346_{77}) **27** кг желудей **упаковали поровну в 3** пакета. Сколько килограммов желудей было **в каждом** пакете? $(:)_р$

6. (383 $(1)_{85}$) **18** морковок девочка **раздала поровну 9** кроликам. По скольку морковок она дала **каждому** кролику? $(:)_р$

7. (389_{86}) **Из 14** м ткани сшили **7 одинаковых** детских пальто. Сколько метров ткани **расходовали на 1** пальто? $(:)_р$

8. (390 $(1)_{86}$) **12** девочек и мальчиков **разделились поровну** на две команды. Сколько детей было **в каждой** команде? $(:)_р$

9. (447 $(1)_{101}$) Магазин продал **8 одинаковых** портфелей и **получил за них 32** р. Сколько стоит **один** портфель? $(:)_р$

10. (454_{103}) **В трех одинаковых** ящиках **21** кг апельсинов. Сколько килограммов апельсинов **в каждом** ящике? $(:)_р$

11. (460 $(1)_{104}$) **Из** куска ткани длиной **24** м сшили **8 одинаковых** костюмов. Сколько метров ткани пошло **на каждый** костюм? $(:)_р$

12. (467_{105}) **Из 12** мотков шерсти получается **3 одинаковых** детских свитера. Сколько мотков шерсти израсходовали **на каждый** свитер? $(:)_р$

13. (471_{106}) **За 2** карандаша **по одинаковой** цене **уплатили 8** к. Сколько стоил **один** карандаш? $(:)_р$

14. (472_{106}) **В 6** банок **поровну разложили 12** кг варенья. Сколько килограммов варенья положили **в каждую** банку? $(:)_р$

15. (478 $(1)_{107}$) **В 9** банок **поровну разлили 27** л сока. Сколько литров сока налили **в каждую** банку? $(:)_р$

16. (22_{115}) **Десяток** пуговиц **стоит 90** к. Сколько стоит **одна** пуговица? $(:)_р$

Ответы: 1) $Т_1$ = 5 я..; 2) $Я_1$ = 20 кн..; 3) $А_1$ = 35 шк..; 4) $Р_1$ = 20 роз; 5) $П_1$ = 9 кг; 6) $К_1$ = 2 м.; 7) $П_1$ = 2 м; 8) $К_1$ = 6 дет.; 9) $П_1$ = 4 р..; 10) $Я_1$ = 7 кг; 11) $К_1$ = 3 м; 12) $С_1$ = 4 мот.; 13) $К_1$ = 4 к.; 14) $Б_1$ = 2 кг; 15) $Б_1$ = 3 л; 16) $П_1$ = 9 к.

Сценарий.

Общие замечания.

Если в физике понятие размерности нужно для того, чтобы указать, в каких единицах мы измеряем ту или иную величину, поскольку без указания единиц измерения число (числовое значение величины) не имеет смысла, то в арифметике понятием «размерность» (в кавычках) я пользуюсь, прежде всего, для того, чтобы отчетливо, предельно наглядно выявить разницу между двумя формами деления: делением на равные части и делением по содержанию.

Определение физической величины содержит указание способа ее измерения[3] . В арифметике мы работаем не только с именованными числами (см. сноска 10, п. «Немного о дробях» глава III), выраженными в метрических мерах как числами с наименованием какой-либо единицы измерения, но и с числами с наименованием единицы счета. Но если при сложении и вычитании наименование числа нам нужно лишь для того, чтобы не сложить случаем яблоки и тракторы (с этого мы начинали) и, в общем-то, понятием «размерность» можно было б и не пользоваться, то при делении ситуация существенно меняется.

При сложении и вычитании мы работаем с однородными именованными числами (т. е. с числами, являющимися размерами одной и той же величины): кг ± кг, тракторы ± тракторы и т. п. При делении же приходится работать и с неоднородными именованными числами (т. е с числами, являющимися размерами значений разных величин, например 5 м и 5 кг (см. [29, с. 190], а также конец п. «Немного о делении»).

Именно это, как мне кажется, и является основной причиной трудностей при работе с действием деления в текстовых задачах. Именно это и **вынудило** меня воспользоваться физическим понятие размерности в применении к арифметике. Указывая в графэлементах деления наименование величин (чтó на чтó делим), мы четко разграничиваем две формы деления и, тем самым, углубляем понимание задачи, ее арифметического смысла, как бы проста она ни казалась, и уменьшаем вероятность ошибки.

Переходим к работе.

Суть деления на равные части сводится, как мы видели, к «физическому» смыслу деления — к нахождению **содержимого единицы делителя**. В текстах задач данного цикла это отражено прежде всего в вопросах задач: сколько… в каждом ящике, ряду, пакете? на каждый костюм, свитер? расходовали на 1 пальто? стоит один карандаш?…

Но, естественно, такие задачи будут являться всего лишь элементами более сложных задач. И там уже более важным для выявления деления на равные части являются **ключевые слова** типа: упаковали поровну, раздали поровну, разделились поровну, поровну разложили, поровну разлили и т. п. Слова — разложили, разлили, раздали… в сочетании со словом «поровну» сразу говорят о делении на равные части.

В задачах 7, 9, 10, 11, 12, 13 **ключевым** является слово — **одинаковый** (одинаковый — синоним равный). Сказать: «В трех одинаковых ящиках 21 кг апельсинов» (задача 10) —

[3] «Физическое понятие, отражающее какое-либо свойство тел и явлений и выражаемое числом (или несколькими числами) в процессе измерения, называется физической величиной… Обратим внимание на слова «в процессе измерения». Это означает, что в определении (толковании) физической величины должны содержаться сведения о процедуре ее измерения, о приборах, о единицах измерения» [28, с. 32]. И вообще: «*Величиной* обычно называют числовую переменную, значения которой являются результатами некоторых измерений. Под *измерением* понимают любую процедуру присвоения чисел объектам» (см. Кузнецов В. М. «Задачи с методическими указаниями по теории вероятностей» для студентов ОЗО экономического факультета РГУ, часть 2, Ростов-на-Дону, 2004).

означает то же самое что: 21 кг апельсинов **разложили поровну** в 3 ящика. Или «Из 14 м ткани сшили 7 **одинаковых** детских пальто» (задача 7) — означает то же, что: 14 метров ткани **распределили поровну** на 7 пальто.

Все вышесказанное отражено в текстах задач выделением жирным шрифтом.

Подчеркиванием выделены **два разных объекта** (две величины, участвующие в делении), например, книги — ящики, морковки — кролики, ткань — пальто, банки — сок. Из этих величин мы будем извлекать их «размерности» (либо использовать общепринятые наименования и сокращения: м — метр, кг — килограмм, л — литр, к. — копейка, р. — рубль)

Задачи 5–16 взяты из учебника Математика-2 (см. [18]). Точнее, они являются частью задач учебника.

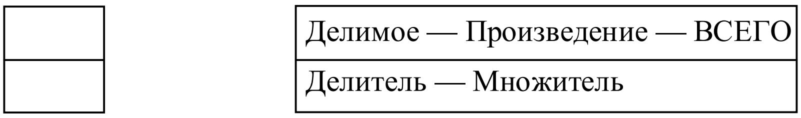
После номера задачи в скобках указан номер задачи в учебнике, а нижний индекс указывает страницу учебника.

Числовые значения стоимости оставлены без изменения.

Итак, основная цель цикла — научиться **видеть** деление на равные части «с первого взгляда», опираясь **на ключевые слова**: поровну раздали и т. п., одинаковый, каждый, один.

Чтобы правильно **технически** реализовать деление на равные части, нужно не только уметь выделять объекты, величины, участвующие в задаче, но и видеть **что́ именно делится** (разбивается, распределяется) **на равные части**. При этом, надо отчетливо понимать: то, что́ делим — это давно знакомое нам ВСЕГО (известное произведение). Посмотрите: 30 яблок (задача 1) — подразумевается: **всего** 30 яблок на 6 тарелках. Или — из 14 м ткани (задача 7) — т. е. **всего** 14 метров ткани распределяем и т. д. И крайне важно научиться, сталкиваясь с вышесказанным, видеть и деление на равные части, не путать его с делением по содержанию. В этом нам поможет графический элемент деления, который будем называть — **ГРАЭЛ-(Деления)** и обозначать: **ГРАЭЛ-(:)**.

На рис. 4а изображена так называемая «пустотка» этого графэлемента.



а б

Рис. 4

Конкретизироваться «пустотка» графэлемента деления будет при рассмотрении соответствующих форм деления подобно тому, как на рис. 4б.

Поскольку для задачи (это даже не задача, а просто вопрос), состоящей из одного логического элемента деления на равные части, всегда указаны числовые значения обеих величин, то в этом случае блок «Алгебры» отсутствует. Заполнив «пустотку», мы превратим ее в графический элемент деления на равные части, который обозначается так: **ГРАЭЛ-(:)$_р$**[4] (индекс «р» как раз и говорит о том, что используется форма деления на равные части).

Задача 1

На рис. 5 изображен ГРАЭЛ-(:)$_р$ задачи 1.

Крайне важно писа́ть в «пустотке» «размерности» величин: **я** (яблоки), **т** (тарелки).

Поскольку главным является то, что яблоки распределяются по тарелкам и нас интересует сколько **именно яблок** на тарелке, то «размерность» делителя указана в скобках — 6 (т).

[4] Произносится: ГРАЭЛ, графэлемент деления на равные части.

Графика **Арифметика**

30я
6(т)

$= Т_{1\ я/т}$[5] $Т_1 = 30 : 6 = 5$ (я)

Рис. 5

А теперь, не менее важный момент — **имя** данного слагаемого (напоминаю, что все графэлементы в конечном итоге являются всего лишь элементами «Графики» более сложной задачи — слагаемыми).

Здесь мы опираемся не столько на действие умножения, сколько на смысл действия деления на равные части. Тем не менее, читатель, имеет смысл посмотреть на рис. 3 цикла I, главы IV, который изображает прямую задачу умножения по отношению к нашей обратной — задаче деления на равные части и прочесть еще раз «Замечание», п. 1.

Раз **на одной** тарелке, то имя $\mathbf{Т_1}$, причем, как и при умножении, подразумевается: не на первой тарелке, а на одной тарелке (одной из нескольких одинаковых).

Индекс я/т, как сказано в п. «Немного о делении» — это сокращенная запись: яблок **на одной** тарелке.

В силу огромной значимости вышесказанного, я приведу сейчас примерный монолог-объяснение решения еще одной задачи, который вы произносите вслух.

Задача 5

1. Что мы видим? Какие **разные** объекты (величины, предметы…)? — Верно, желуди и пакеты.

2. «Упаковали поровну» — значит действие деления. Какого деления? — Деления на равные части. Об этом же говорит и вопрос задачи: сколько килограммов **в каждом** пакете (упаковали поровну, в каждом — ключевые слова действия деления на равные части).

3. Чтó делится на чтó, что распределяется? — 27 кг желудей распределяем по 3 пакетам.

Нарисуйте «пустотку» и частично заполните ее (рис. 6а).

а	б	в
27	27кг	27кг
3	3(п)	3(п)

$= П_{1\ кг/п}$ (в)

Рис. 6

4. Спросите: «27 и 3 чего?» (Или иначе: какая «размерность» у желудей и пакетов?). С пакетами ясно — раз пакеты, то «размерность» [п]. А вот для желудей «размерность будет не [ж], а [кг], недаром в вопросе задачи говорится: сколько **килограммов** желудей… Дописываете «размерность» (рис. 6б).

5. А теперь, имя слагаемого. — Какое дадим?.. Верно, раз содержимое одного пакета (иначе, содержимое единицы делителя; 3 пакета — делитель: на чтó делим, в чем именно распределяем), то имя $\mathbf{П_1}$. А как обозначим чтó на чтó делим? Верно — кг/п (или килограммов в 1 пакете). Дописываете, и получаете рис. 6в.

А теперь, читатель, на рис. 7 посмотрим на полное решение задачи. Ведь на самом деле рис. 6а–в показывает только последовательность создания «Графики».

[5] «Размерность» у имен (букв) будем писать в виде буквенного индекса.

Графика		**Арифметика**
27кг / 3(п)	$= П_{1\ кг/п}$	$П_1 = 27 : 3 = 9$ (кг)

Рис. 7

Обратите внимание.

В «Арифметике» мы пишем решение стандартным школьным способом: делимое и делитель — просто числа, для частного в скобках указываем наименование (кг), а не (кг/п)[6]. Это и понятно. Ведь мы имеем все же дело с арифметикой, а не с физикой. И то, что я называю «размерностью», т. е. кг/п (кг/в 1-м пакете) — это не столько размерность в смысле физики (как единица измерения величины), сколько «физический» смысл деления на равные части — найти содержимое единицы делителя (9 килограммов в одном пакете). Поясните это ребенку в меру его восприятия. Однако смысл деления на равные части на минимальном уровне он должен усвоить: 9 кг — это что́? что́ посчитали? И он должен уметь ответить: 9 кг (желудей) **в одном** пакете.

Далее. «Арифметику» для детей постарше конечно же лучше писать с дробной чертой (имеется в виду действие деления)

$$П_1 = \frac{27}{3} = 9 \text{ (кг)}.$$

Во всяком случае, начиная с 6-го класса в ГрафАнализе стоит это делать (не забывая, что оформляя решение для школы, надо использовать обычный знак деления — двоеточие, т. к. дробная черта для обозначения действия деления до 7-го класса не употребляется[7].

Примерный монолог-объяснение должен проговариваться вами вслух, читатель, не только на паре задач, когда вы вводите ГРАЭЛ-$(:)_р$, а на протяжении 5–6 первых задач, когда ребенок уже сам рисует задачу. Благодаря этому, через 5–6 задач ребенок будет **мгновенно видеть** (чего мы и добиваемся в этом цикле!) деление на равные части, т. е. что́ на что́ делится, «размерности» величин, имя слагаемого-частного.

Все время спрашивайте ребенка о смысле результата, т. е. о смысле деления на равные части: «Так что получили? Как запишем «размерность» результата в «Графике»?

В таблице 1 даны решения всех задач.

Таблица 1

№ з-чи	Графика		Арифметика
1	30я / 6(т)	$= Т_{1\ я/т}$ (яблок на 1-й тарелке)	$Т_1 = 30 : 6 = 5$ (я)
2	160кн / 8(я)	$= Я_{1\ кн/я}$ (книг в 1-м ящике)	$Я_1 = 160 : 8 = 20$ (кн)

[6]Если речь идет о начальной школе, то необходимо посмотреть оформление школьных решений.

[7]По-видимому, это обусловлено тем, что для числовых дробей деление превращается в умножение, и «многоэтажные» числовые дроби неудобны и не нужны.

3	$\frac{350шк}{10(а)}$	$= А_{1\ ШК/А}$ (школьников в 1-м автобусе)	$А_1 = 350 : 10 = 35$ (шк)
4	$\frac{80роз}{4(ряд)}$	$= Р_{1\ РОЗ/РЯД}$ (роз в 1-м ряду)	$Р_1 = 80 : 4 = 20$ (роз)
5	$\frac{27кг}{3(п)}$	$= П_{1\ КГ/П}$ (килограммов (желудей) в 1-м пакете)	$П_1 = 27 : 3 = 9$ (кг)
6	$\frac{18м}{9(к)}$	$= К_{1\ М/К}$ (морковок 1-му кролику)	$К_1 = 18 : 9 = 2$ (м)
7	$\frac{14м}{7(п)}$	$= П_{1\ М/П}$ (метров (ткани) на 1-но пальто)	$П_1 = 14 : 7 = 2$ (м)
8	$\frac{12дет}{2(ком)}$	$= К_{1\ ДЕТ/КОМ}$ (детей в 1-й команде)	$К_1 = 12 : 2 = 6$ (дет)
9	$\frac{32руб}{8(п)}$	$= П_{1\ РУБ/П}$ (рублей за 1-н портфель)	$П_1 = 32 : 8 = 4$ (р.)
10	$\frac{21кг}{3(я)}$	$= Я_{1\ КГ/Я}$ (килограммов (апельсинов) в 1-м ящике)	$Я_1 = 21 : 3 = 7$ (кг)
11	$\frac{24м}{8(к)}$	$= К_{1\ М/К}$ (метров (ткани) за 1-н костюм)	$К_1 = 24 : 8 = 3$ (м)
12	$\frac{12мот}{3(с)}$	$= С_{1\ МОТ/С}$ (мотков на 1-н свитер)	$С_1 = 12 : 3 = 4$ (мот)

13	8коп / 2(кар)	= $К_{1\ КОП/КАР}$ (копеек за 1-н карандаш)	$К_1 = 8 : 2 = 4$ (к.)
14	12кг / 6(б)	= $Б_{1\ КГ/Б}$ (килограммов варенья в 1-й банке)	$Б_1 = 12 : 6 = 2$ (кг)
15	27л / 9(б)	= $Б_{1\ Л/Б}$ (литров (сока) в 1-й банке)	$Б_1 = 27 : 9 = 3$ (л)
16	90коп / 10(п)	= $П_{1\ КОП/П}$ (копеек за 1-ну пуговицу)	$П_1 = 90 : 10 = 9$ (к.)

Комментарий к таблице 1.

1. В «Графике» под ГРАЭЛ-$(:)_Р$ дается расшифровка «размерности» результата, т. е. как раз смысл деления на равные части. Как я уже говорил, вы должны проговаривать его **вслух**, а через несколько задач после начала добиваться, чтобы ребенок сам его формулировал.

2. Обратите внимание на мнемонику (удобные сокращения) «размерностей». Она подчинена идее наибольшего опредмечивания «просто чисел». В задачах 2, 3 не **к** и **ш**, а **кн** (книги) и **шк** (школьники). В задачах 8, 12 — **дет** (детей) и **мот** (мотков). А вот, скажем, в задаче 6 — **м** (морковки) вполне достаточно. В задаче 4 — **роз/ряд,** т. к. совпадающие первые буквы. Особо стоит отметить задачи 9, 13, 16: **руб** (рубли) и **коп** (копейки). Употребляемые в Математике-2 обозначения-сокращения (см. [17]): **р.** и **к.** — буква с точкой. Но конечно же **руб** и **коп** гораздо мнемоничней. И поскольку «Графика» — для нашего внутреннего употребления, то мы и выбираем максимально опредмечивающую мнемонику. А результат в «Арифметике» пишем, как и положено, — **р.** и **к.**

3. Еще раз **обратите внимание** ребенка на имена результатов: $\mathbf{Т_1}$, $\mathbf{Я_1}$, $\mathbf{А_1}$ (задачи 1, 2, 3) и т. д. Поскольку деление на равные части — это нахождение содержимого единицы делителя («в чем» содержатся 5 яблок, 20 книг, 35 школьников? — в одной тарелке, в одном ящике, в одном автобусе), то делителем и определяются имена.

Предупреждение.

Первоначально задачи главы V создавались по основному принципу — одно известное слагаемое (а значит и одна известная величина) и, желательно, одна графсхема; расстановка действий — от известного слагаемого. Задачи циклов I, II, IV,V (мои задачи, без включения задач из Математики-2) опробовались сначала на 5–6-и классниках. И для 5–6-го классов, как вы, читатель, увидите в главе VII, этого было вполне достаточно, поскольку, как ни парадоксально, но в 5-м и, особенно, в 6-м классах действие деления используется очень мало, причем — в подавляющем большинстве случаев — только один из двух вариантов деления на равные части — уменьшить в несколько раз (в несколько раз меньше).

Затем, по мере все большего осознания автором того, что все трудности с математикой уходят своими корнями в начальную школу, потребовалось провести позадачный анализ учебников математики 1, 2 и 3-го классов с точки зрения ГрафАнализа. Выяснилось, что во 2–3-м классах очень много задач, в которых «Графика» представляет собой набор графсхем (ГРАС), причем по принципу: графэлемент — графсхема. Частично мы увидим это в цикле III, а частично в главе VII. ГрафАнализ показывает, что чем больше графсхем составляют «Графику» задачи, тем сложнее задача для восприятия, а плюс к тому же и трудности с формами и видами действия деления. И все это падает на 2–3-й классы, когда идет только первичное знакомство с действием деления и его освоение. Но уж если с вычитанием сложно, то что говорить о делении!

Одним словом, начиная с 5-го класса все, что включено в циклы задач из учебников Математики-2, 3 (реализованное средствами ГРАН) осваивается детьми. Однако сам я ниже конца 3-го класса не погружался (и это было без включенных теперь в ГРАН задач Математики-2, 3).

Я полагаю, что материал циклов I–III окажется, на данный момент, более полезен для вас, читатель, чтобы вы четче видели структуру задач и освоили общий подход, чтобы вы были в состоянии помочь ребенку (имеются в виду 2–3-й классы).

Все это связано с наличным дидактическим материалом Математики-2, 3.

Мне кажется, что ГрафАнализ наглядно выявляет необходимость значительной перестройки курса математики начальной школы в силу возрастных особенностей детей (разумеется, они еще не готовы в полной мере воспринять формы деления, и работать с «Графикой», состоящей из нескольких ГРАЭЛов в качестве графсхем Вообще удивительно, что часть детей «прорывается» через математику 2–3-го классов).

В главе VII анализ дидактических материалов 5–6-го классов наглядно (в «нотной» записи) показывает, как мало уделяется внимания действию деления, четкой дифференциации и **практической освоенности** его форм. Видимо, **подразумевается**, что во 2–3-м классах деление освоено. Практика же показывает обратное. Но этот вопрос требует совершенно особой теоретико-экспериментальной работы и вряд ли может быть решен усилиями одного человека. Поэтому, читатель, будьте предельно осторожны с действием деления (если, повторяю, речь идет о начальной школе). Возможно, почти все (за исключением, пожалуй, цикла IV) будет использоваться вами как иллюстративно-пояснительное средство при разборе школьных задач.

Уменьшить в несколько раз

17. На блюде
30 яблок,
а на тарелке
в 6 раз меньше.
Сколько яблок на тарелке? $(:)_{РМ}$

18. В шкафу
160 книг,
а на столе
в 4 раза меньше.
Сколько книг на столе? $(:)_{РМ}$

19. В поезде было 350 пассажиров, а вагоне в 10 раз меньше. Сколько пассажиров было в вагоне? $(:)_{РМ}$

20. В парке посадили восемьдесят роз, а в саду в четыре раза меньше. Сколько роз посадили в саду? $(:)_{РМ}$

21. (349_{78}) Попугаев 6, а голубей в 3 раза меньше. Сколько голубей? $(:)_{РМ}$

Ответы: 17) Т = 5 я.; 18) С = 40 кн.; 19) В = 35 пас.; 20) С = 20 роз; 21) Г = 2 шт.

Общие замечания.

Рассмотрим следующую ситуацию. На блюде лежит 30 яблок. Мы **разделяем** эти 30 яблок на 6 **равных частей** (групп, кучек) и пять частей из шести убираем. Спрашивается, сколько яблок останется на блюде?

Очевидно, что мы осуществили деление на равные части — 30я(блок) : 6, — а содержимое каждой (одной) из частей равно 5 я(блок).

Обратите внимание, были яблоки **на блюде** и остались яблоки **на блюде** же. То есть в отличие от деления на равные части мы имеем дело не с двумя объектами (величинами) типа яблоки-блюда (несколько), а с одной величиной — количеством яблок.

Соответственно с «размерностью» дело обстоит совсем иначе, нежели при делении на равные части. В данном случае мы не распределяем объект одного вида — яблоки («размерная» величина) — по одинаковым представителям объекта другого вида, скажем, тарелкам или ящикам (тоже «размерные» величины), а делим на равные **безразмерные** части и берем содержимое одной из таких частей — 5 яблок[8].

Вот такое действие — разделить известное ВСЕГО на несколько равных частей (безразмерных) и взять содержимое одной из этих частей будем называть: **уменьшить в несколько раз** (или иначе — **меньше в несколько раз** или просто **«меньше в»**).

Значит, нашу вспомогательную задачу мы могли бы сформулировать так: на блюде 30 яблок. **Уменьшим** это количество **в 6 раз**. Сколько яблок останется на блюде?

Теперь от этой вспомогательной задачи перейдем к задаче 1.

В чем отличия? Да только в одном — не на блюде 30 яблок уменьшаем в 6 раз, а говорим, что на тарелке в 6 раз меньше яблок, чем на блюде.

Вроде бы, появился другой, помимо яблок, объект — тарелка. Вроде бы она даже одна. Тем не менее, мы никак не можем сказать, что ищем содержимое единицы делителя, как

[8] Не правда ли, читатель, вы узнаете знакомый процесс получения дроби путем деления нечто целого на равные части («Две стороны дроби», п. «Немного о дробях», глава III).

при делении на равные части. Это довольно тонкий момент, читатель, и в то же время — достаточно очевидный. В самом деле, мы не раскладываем, не распределяем 30 яблок **по 6 одинаковым** тарелкам. Мы, фактически, делим 30 яблок, лежащих на блюде, на 6 равных частей (безразмерных), убираем с блюда 5 из этих частей, а содержимое одной части переносим на одну тарелку (всего лишь **одну имеющуюся, а отнюдь не на одну из 6 одинаковых**!).

Таким образом, можно было бы сказать, что в понятии «меньше в» деление на равные части реализуется «в чистом виде» — мы действительно просто делим ВСЕГО на несколько равных частей и берем содержимое одной из этих частей.

Отсюда же — наглядная связь типа «одно и то же» (одна и та же математическая модель) со вторым основным отношением «Больше В» (см. конец п. «Внимание», цикла II, главы IV). То есть, вместо того, чтобы спрашивать: где меньше? — мы можем спросить: где больше? — и заменить действие деления умножением так же, как мы это делали с понятием «меньше на» (цикл II, глава III). Вообще-то, читатель, как вы понимаете, мы можем любую форму и вид деления заменить умножением, поскольку вывели деление из умножения. Но, в отличие от вычитания, нам выгоднее (легче, удобнее) на сей раз работать именно с ГРАЭЛом деления, лишь иногда заменяя его умножением. Вы это увидите в главе VII, например, на задаче 53 или задаче 119 из дидактических материалов для 5 класса.

Когда мы с вами занимались делением на равные части, я ограничился действием деления, поскольку самым важным было закрепить ви́дение деления на равные части и его смысла. Теперь же добавится умение записывать деление в виде умножения (таблица 2, пятый столбец — «Алгебра» «Больше В»). И хотя такое умение в этой главе нам еще не понадобится, тем не менее, пришла пора связывать деление и умножение в восприятии ребенка в неразрывное целое[9].

Переходим к работе.

Задача 17

Используем уже известный нам ГРАЭЛ-$(:)_р$. **Разница — в именах и «размерностях»**. Что касается имен слагаемых, то индексные обозначения нам ни к чему (сравните с именами в «Больше В» — п. «Обозначения», цикл II, глава IV). А «размерность» та же, что у делимого, поскольку, как мы выяснили, уменьшить в несколько раз — это деление на равные части «в чистом виде» (делитель — безразмерен). На рис. 8 в «Графике» изображен графэлемент деления на равные части, относящийся к понятию «меньше в».

Графика	**Алгебра**	**Арифметика**
$\begin{array}{\|c\|} \hline Б_я \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} = Т_я$	$Т = \frac{Б}{6} =$	$\frac{30}{6} = 5$ (я)[10]

Рис. 8

«Графика» требует пояснений.

В самом начале мы с вами, читатель, договорились, что с текста все должно быть внесено в «Графику», и после этого с текстом уже не работаем. Но все дело в том, что деление в виде «меньше в» само по себе вообще нам встречаться в дальнейшем не будет, а будет яв-

[9] Еще и еще раз повторяю — если речь не идет о начальной школе.

[10] С этого момента, читатель, я не буду особо оговаривать употребление того или иного знака деления (двоеточие или дробная черта). Вы же выбирайте тот знак, который вам нужен.

ляться слагаемым — в чистом виде — более сложных задач (см. циклы IV–V), точно так же, как это было с тремя предыдущими арифметическими действиями. То есть, нам не просто будет удобно, а мы **вынуждены** будем записывать «меньше в» в алгебраической форме. Да и как иначе мы сможем нарисовать «меньше в», если оно будет дано в тексте более сложной задачи такой, например, фразой: а на тарелке в 6 раз меньше… чем на блюде? — Только так, как на рис. 9 — в виде отдельного слагаемого с именем **Т**(арелка).

Т

$Б_{я}$
6

Рис. 9

Б ⑥ > Т
Б = 6•Т

Рис. 10

Что касается «размерности», то этот вопрос мы уже обговорили: на **Б**(люде) — яблоки, и на **Т**(арелке) тоже яблоки (напоминаю, что «размерность» у имен слагаемых будем писать в виде индекса (см. рис. 8–9), так, как ранее мы поступали в «Графике» с буквой **В**(сего)).

Теперь, относительно умножения.

Стоит только задать себе вопрос: если на тарелке в 6 раз **меньше**, чем на блюде, то **где́** **больше**? Ясно, что на **Б**(люде) — в 6 раз **больше**, чем на **Т**(арелке), и мы спокойно рисуем отношение «Больше В» (рис. 10, полная форма «Больше В» — с неравенством).

В таблице 2 приведены решения всех задач с использованием «меньше в».

Таблица 2

№ з-чи	Графика		Алгебра «меньше в»	Арифметика	Алгебра «Больше В»
17	$Б_{я}$ / 6	$= Т_{я}$	$Т = \frac{Б}{6} =$	$\frac{30}{6} = 5(я)$	Б ⑥ > Т Б = 6•Т
18	$Ш_{кн}$ / 4	$= С_{кн}$	С = Ш : 4 =	160 : 4 = 40 (кн)	Ш = 4•С
19	$П_{пас}$ / 10	$= В_{пас}$	$В = \frac{П}{10} =$	$\frac{350}{10} = 35(п)$	П ⑩ > В П = 10•В
20	$П_{роз}$ / 4	$= С_{роз}$	С = П : 4 =	80 : 4 = 20 (роз)	П = 4•С
21	$П_{шт}$ / 3	$= Г_{шт}$	$Г = \frac{П}{3} =$	$\frac{6}{3} = 2(шт)$	П ③ > Г П = 3•Г

Комментарий к таблице 2.

1. Сначала (для всех возрастов) все задачи выполняются так: «Графика», «Алгебра» — «меньше в», «Арифметика» (как на рис. 8).

2. Затем, опять начиная с задачи 17, выполняется «Алгебра» (она практически совпадает с «Графикой» «Больше В») — «Больше В» (полная запись — с неравенством — чередуется с короткой — в виде уравнения так, как у меня). При этом запись идет на отдельном листе и **предваряется вопросом** ребенку: «А давай попробуем наше «меньше в» — деление записать в виде «Больше В», то есть в виде умножения». Если вы видите, читатель, что для ребенка это не представляет труда, то усложните задачу. **Скажите** примерно следующее: «В уравнении Б = 6•Т что́ нам неизвестно? **Произведение Б** или **множитель Т**?.. А раз **неизвестный множитель**, то решение запишем в виде деления: Т = Б : 6 (уже 5-классник в состоянии перейти от умножения к делению в алгебраической форме, поскольку за плечами большой опыт работы с «Алгеброй» с буквенными обозначениями, а если речь идет о 3-класснике, то, думается, и для него это не окажется слишком большой трудностью).

3. Оба знака деления я употребляю с той целью, чтобы вас, читатель не смущала проблема выбора знака.

Цикл II. Деление по содержанию. Во сколько раз БОЛЬШЕ/МЕНЬШЕ? (кратное сравнение, ГРАЭЛ-$(:)_C$)

Деление по содержанию

1. 30 яблок разложили
по 5 яблок на тарелке.
Сколько понадобилось **тарелок**? $(:)_C$

2. 160 книг упаковали
по 20 книг в ящик.
Сколько для этого понадобилось **ящиков**? $(:)_C$

3. **350** школьников поехали на экскурсию. Сколько для этого понадобилось **автобусов**, если в каждом автобусе поместилось 35 школьников? $(:)_C$

4. В парке посадили восемьдесят роз **по** двадцать штук в ряду. Сколько **рядов** роз посадили в парке? $(:)_C$

5. (345_{77}) Таня купила на 24 к. открыток **по** 3 к. за штуку. Сколько **открыток** купила Таня? $(:)_C$

6. (383 $(2)_{85}$) **18** морковок девочка связала в пучки **по** 9 морковок в каждом. Сколько получилось **пучков**? $(:)_C$

7. (435_{99}) В магазин привезли 90 кубиков **по** 10 штук в пакете. Сколько **пакетов** с кубиками привезли в магазин? $(:)_C$

8. (471_{106}) Карандаш стоит 4 к. Сколько таких **карандашей** можно купить на 32 к.? $(:)_C$

9. (472_{106}) В банку можно положить 2 кг варенья. Сколько надо таких **банок**, чтобы разложить 24 кг варенья? $(:)_C$

10. (478 $(1)_{107}$) Сколько надо одинаковых **банок**, чтобы разлить 18 л сока, если в каждую банку можно налить 3 л сока? $(:)_C$

11. (22_{115}) Одна пуговица стоит 9 к. Сколько таких **пуговиц** можно купить на 36 к.? $(:)_C$

12. (16_{94}) 40 стульев расставили в ряды **по** 10 стульев в каждом. Сколько **рядов** стульев поставили? $(:)_C$

Ответы: 1) $N_Т$ = 6 тарелок; 2) $N_Я$ = 8 ящиков; 3) $N_А$ = 10 автобусов; 4) $N_Р$ = 4 ряда; 5) $N_О$ = 8 открыток; 6) $N_П$ = 2 пучка; 7) $N_П$ = 2 пакета; 8) $N_К$ = 8 карандашей; 9) $N_Б$ = 12 банок; 10) $N_Б$ = 6 банок; 11) $N_П$ = 4 пуговицы; 12) $N_Р$ = 4 ряда.

Сценарий.

Общие замечания.

В п. «Немного о делении» мы с вами ввели деление по содержанию следующим образом. Пусть у нас неизвестен множитель (множитель в арифметическом смысле, — как количество равных слагаемых). Тогда мы получим уравнение 5я(блок) • x = 30я(яблок), а решение этого уравнения: x = 30я(блок) **:** 5я(блок). Возник вопрос: а что же такое x? Какова его «размерность»? Я сказал, что x — это количество тарелок. И действительно, если мы сформулируем следующую содержательную задачу: 30 яблок разложили **по 5 яблок** на несколько **одинаковых** тарелок. Сколько тарелок для этого понадобилось? — то в виде умножения сразу запишем приведенное выше уравнение так: 5я • x(т) = 30я. Думаю, читатель, для вас это уже очевидно. Мы имеем — **В**(сего) = 30я(блок), 5я(блок) — это одно из нескольких **равных** слагаемых, **несколько** тарелок — это число (**неизвестное**) равных слагаемых. — Очевидная задача умножения, которую мы и записали нашим уравнением. А решение этого уравнения, если выразить словами, вроде бы можно было б записать так: 30 яблок делим на 5 яблок и получаем 6 тарелок, верно?

Нет, неверно!

Вдумайтесь, читатель, какую чепуху я сейчас сказал: яблоки поделить на яблоки и получим тарелки! Ну, скажите на милость, каким это образом **из яблок** вдруг **получаются тарелки**?! — Чудеса, да и только. А чего стоит фраза: яблоки поделить на яблоки! — Это как?

Тем не менее, высказывание: 30 разделить на 5 — получим 6, где 30, 5 и 6 просто числа, никаких возражений не вызывает. Ведь 6 — это всего лишь, по определению деления, найденный неизвестный множитель.

Как же все это увязать друг с другом?

Дело в том, читатель, что именно здесь, в делении по содержанию, как мне кажется, наиболее ярко проявляется разница между абстрактным характером математики, ее логической, языковой сущностью, с одной стороны, и совершенно конкретными приложениями к конкретным, предметно-содержательным задачам (вспомните: математика как язык природы), с другой. Но это различие — всего лишь оборотная сторона единства. Не могу не привести, в связи с эти, несколько строк из книги «Я — математик» крупного математика и одного из создателей кибернетики Норберта Винера: «Ведь высшее назначение математики как раз и состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает… Так у меня впервые появилась мысль, что абстрактные математические теории, которые я изучал, имеют непосредственное отношение к описанию природы. Отсюда было уже недалеко до убеждения, что природа, в широком смысле этого слова, может и должна служить не только источником задач, решаемых в моих исследованиях, но и подсказывать аппарат, пригодный для их решения» [30, с. 27].

Однако, вернемся к арифметике, к первооснове всего дальнейшего развития математики.

Действие деления, как мы помним, появилось из реальной задачи — распределить поровну. Но, читатель, рассматривая деление на равные части, я нигде не говорил, что мы 30 яблок **делим** на 6 тарелок и получаем 5 яблок. В задаче у нас участвовали два **разнородных** объекта — яблоки и тарелки. Точно так же, как — с содержательной, предметной точки зрения — абсурдно говорить, что, деля яблоки на яблоки, мы получаем тарелки, точно также абсурдно говорить и то, что мы можем поделить яблоки на тарелки. Мы договорились всего лишь **обозначать** результат деления на равные части через 5я/т — сокращение: 5 яблок на одной тарелке для того, чтобы максимально опредметить арифметическую задачу и для того, чтобы выявить «физический» смысл деления на равные части: частное — содержимое единицы делителя. То есть мы не осуществляли какое-то мифическое деление яблок на тарелки. Физически, материально мы могли только **распределить** (разложить) поровну, — и в этом смысле разделить — 30 яблок по 6 тарелкам. А вот с точки зрения математики, мы можем работать только с числами (так называемыми отвлеченными числами, числами без наименования). Как только появляются наименования (именованные числа), — это означает, что в математику в той или иной степени вторгается реальный мир, физика в самом широком смысле слова. И на пересечении этих двух реальностей — абстрактной, идеальной, математики как языка и конкретной, материальной — окружающей действительности и рождаются все трудности применения языка математики к описанию внешнего мира. И самое первое столкновение, противостояние и единство Языка и Вселенной происходит в… да, да, именно так, читатель, в прозаической, будничной и столь привычной арифметике и, прежде всего, в текстовых задачах, и, прежде всего, при работе с действием деления.

Мне хотелось одновременно и максимально опредметить, «материализовать» сущность основных арифметических действий и понятий, и в то же время, наиболее ясным и простым образом выявить их идеальную, логическую суть. Без первого невозможно воспринимать математику как совершенно естественную и необходимую каждому область знаний, возникшую из очень простых и всем понятных нужд человека, без второго — свободное и уверенное владение языком природы.

Переходим к работе.

Задача 1

Предметно задача сводится к тому, что мы разбиваем 30 яблок на группы по 5 яблок, т. е. на **несколько равных частей** (в каждой части 5 яблок). Но если при делении на равные части мы находили **содержимое одной части**, то **сейчас находим число частей**. Мы по-прежнему делим 30 яблок поровну, но на сей раз это иное «поровну», нежели при делении на равные части. Содержимое одной из равных частей (в нашем случае 5 яблок) и число частей (в нашем случае 6) — совершенно разные вещи.

Деление по содержанию как раз и **сводится к нахождению числа частей**, на которые мы разбиваем некоторое количество предметов так, что в каждой части содержится равное количество предметов.

Поскольку математически это задача деления (распределить поровну), то воспользуемся все той же «пустоткой» ГРАЭЛа деления (рис. 4). Будем заполнять «пустотку» аналогично тому, как мы это делали в задаче 5 цикла I (рис. 6).

Привожу примерный монолог-объяснение.

1. Что мы видим? Какие **разные** объекты (величины, предметы…)? — Верно, яблоки и тарелки.

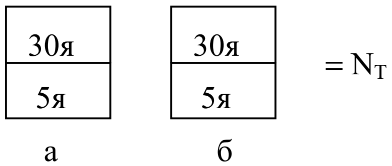
2. «разложили по» — значит действие деления (пока не уточняем какого деления).

3. Что́ делится на что́, что распределяется? — 30 яблок. **Как** распределяем яблоки? — **По** 5 яблок.

Внимание.

На сей раз нас интересует **не то, где́** именно раскладываем яблоки (по тарелкам), **а то ка́к**, каким образом распределяем яблоки (**по 5 яблок** на тарелке).

Нарисуйте «пустотку» деления и частично заполните ее (рис. 11а).



а б

Рис. 11

4. А теперь, имя слагаемого… Какое дадим?

Прежде, чем вы продолжите, читатель, необходимы кое-какие пояснения для вас.

Вспомните, мы с вами изначально договорились четко различать имена слагаемых и их содержимое. Не поленимся вернуться к задачам цикла I главы II. «На одной тарелке 5 яблок…» (задача 1): **Т**(арелка) — имя слагаемого, а 5 я(блок) — его содержимое. Или «У Саши было 100 копеек…» (задача 4): **С**(аша) — имя слагаемого, а 100 к(опеек) — его содержимое.

Что мы ищем в нашей задаче? — Ищем **количество** тарелок, **а не содержимое** одной тарелки (сравните с задачей 1 цикла I). Ищем **число** равных **частей**, а не содержимое одной части (сравните с задачей 17 цикла I). Поэтому имя **Т**(арелка) нам никак не подходит.

Наиболее близким к вопросу задачи — число, количество тарелок — будет английское слово number (число, количество). Вот и возьмем для слагаемого прописную латинскую букву **N** (произносится: эн) — рис. 11б.

Теперь — к вопросу о «размерности». Основная трудность при объяснении деления по содержанию, на мой взгляд, связана именно с этим, с «размерностью».

Когда мы рассматривали деление на равные части, то писали «размерность» результата — **я/т** — в виде индекса по нескольким причинам. Прежде всего, для уяснения и закрепления «физического» смысла деления на равные части. Затем — для сохранения единообразия обозначений (указание «размерности» в виде индекса только «у букв»).

И еще для того, чтобы четко отделить арифметику от физики. Мы не могли в «Арифметике» написать наименование величины в виде физической размерности, например, кг/п (задача 5, п. Обратите внимание, цикл I) хотя бы потому, что дети не знакомы с понятием физической размерности. В той же задаче 5 результат мы записывали в виде 9 (кг). **Наименованием** результата были килограммы (кг), а не килограммы в одном пакете (кг/п), хотя в задаче спрашивалось именно это — сколько килограммов было в каждом (одном) пакете. При делении на равные части подобная неувязка не являлась для ребенка препятствием в понимании задачи. И мы смело могли ему говорить, что распределяя 27 килограммов по 3 пакетам, мы получаем 9 килограммов. И только потом добавлять необязательное с точки зрения арифметики пояснение: где 9 кг? — в одном пакете. **Килограммы распределили на 3 равные части, — килограммы же и получили**. Все нормально, все ясно.

Но вот как быть с деление по содержанию? Да, мы опять распределяем поровну. Но только теперь 30 яблок распределяем на несколько равных частей по 5 яблок в каждой части, и в результате деления получаем 6 равных **частей**. По рис. 11а можно записать 30я : 5я = 6. Однако в задаче спрашивается, сколько понадобилось **тарелок** (а не безразмерных частей), в задаче участвуют две «размерные» величины — **я**(блоки) и **т**(арелки).

Как, каким образом мы от яблок переходим к тарелкам? Я прихожу к убеждению, что без понятия физической размерности ответить удовлетворительным, не формальным, интуитивно ясным образом на заданный вопрос невозможно. А вот использование этого понятия сразу проясняет суть дела.

Разумеется, мои пояснения, по необходимости, будут кратки и рассчитаны на ваше понимание, читатель, а отнюдь не на понимание ребенка (если только этот ребенок не является старшеклассником). Мне хотелось бы, чтобы вы уяснили **для себя**, как физика вторгается в арифметику, а не остались в недоумении относительно того, как все-таки из яблок возникают тарелки.

В физике мы отдельно работаем с числами (числовые значения величин) и отдельно — с единицами измерений (с размерностями) этих величин. Арифметические операции с размерностями позволяют нам получить правильную размерность результата, если, конечно, мы правильно решаем задачу.

Чтобы напомнить вам, как это делается, я приведу часть решения задачи на вычисление пути при равноускоренном движении из книги Г. Роуэлла и С. Герберта «Физика» (это учебник физики для средних школ, который является стандартом образования в Англии) [31, с. 16].

Посмотрите на третью сверху строку, читатель. Вы видите, что в ней отдельно вычисляется численное значение пути и отдельно — работают с размерностями. Секунда в минус второй степени и секунда во второй степени сокращаются и остается, как и должно быть, размерность пути м (метры).

$s = ut + \dfrac{at^2}{2}$	формула
$s = 0 \cdot 10 + \dfrac{1}{2} \cdot 6\text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot (10)^2\text{ с}^2$	подстановка
$s = 0 + 3 \cdot 100\text{ м} \cdot \cancel{\text{с}}^{-2} \cdot \cancel{\text{с}}^2$	подсчет
$s = 300\text{ м}$	обозначение единиц измерения в ответе
Исходные данные: $u = 0$ м/с, $t = 10$ с, $a = 6$ м/с^2 (м — метр, с — секунда).	

Обычно работа с размерностями осуществляется отдельно:

$$\left[\frac{\text{м}}{\cancel{\text{с}}^2} \cdot \cancel{\text{с}}^2\right] = [\text{м}]$$

Применим тот же подход к нашей задаче. У нас имеется две величины — яблоки и тарелки. Хоть мы и записали в «пустотке» деления, что 30 я(блок) делим на 5 я(блок), т. е. размерность вроде бы одна и та же — [я] (яблоки), на самом деле это не так. В задаче говорится, что не просто разложили по 5 яблок, а по 5 яблок **на тарелке** (на каждой). То есть 5 яблок — это **содержимое одной** из нескольких одинаковых тарелок. А значит «размерность» числа 5 — **я/т**. Запишем: $30\text{я} : 5\text{я/т} = 6\,\cancel{\text{я}} \cdot \text{т}/\cancel{\text{я}} = 6\,\text{т}$.

Мы получили, как и должно быть, «размерность» [т]. Мы получили в ответе именно 6 тарелок.

Разумеется, читатель, подобный подход несколько необычен и с точки зрения строгой математики (да и физики) способен вызвать ряд нареканий. Но на мой взгляд вышесказанное — не формальные выкрутасы, не игра с символами, а отражение того глубокого факта, что именно в действии деления физика вторгается в арифметику, поскольку мы работаем с двумя неоднородными («разноразмерными») величинами.

Конечно же и речи не может быть о том, чтобы преподносить деление в начальной школе с точки зрения размерностей. Но вот в 6-м классе, когда дети познакомятся с понятием сокращения, с действиями деления и умножения дробей, пожалуй, можно попробовать прочитать с ребенком то, о чем мы с вами сейчас говорили.

В конечном счете, если вы, читатель, не испытываете теперь дискомфорта «деля» яблоки на яблоки и получая тарелки, то моя цель достигнута. Ваше внутреннее «приятие» действия деления позволит вам, как мне кажется, чувствовать себя уверенней, находить какие-то неожиданные слова, образы, сравнения, объясняя ребенку деление.

Вот теперь, читатель, вы можете дорисовать «пустотку» так, как на рис. 11б.

Заполнив «пустотку» деления, мы превратим ее в графический элемент деления по содержанию, который обозначается так: **ГРАЭЛ-(:)$_{\text{С}}$**[11] (индекс «с» как раз и говорит о том, что используется форма деления по содержанию).

А вернувшись к п. 4 — «…имя слагаемого. — Какое дадим?» — вы продолжаете монолог-объяснение тем, что поясняете, почему мы берем имя **N** (находим **число** равных частей, как я об этом говорил выше). О «размерности» — индекс **Т** у буквы **N** — ссылаетесь на то, что ищем количество тарелок.

На рис. 12 изображен ГРАЭЛ-(:)$_{\text{С}}$ задачи 1.

Самое главное, чтобы в «Графике» ребенок усвоил, что если 30 яблок **разделить по** 5 яблок, то получим **число $\mathbf{N}_{\text{Т}}$**, равное количеству тарелок.

---

[11] Произносится: ГРАЭЛ, графэлемент деления по содержанию.

Графика **Арифметика**

$$\frac{30я}{5я} = N_Т \qquad N_Т = 30 : 5 = 6\ (т)$$

Рис. 12

А в «Арифметике» мы можем говорить: 30 разделить на 5 равно 6 (количество тарелок равно 6). В скобках указана «размерность» (т) в нашем арифметическом смысле, как наименование — тарелки.

Только что сказанное достаточно близко к обычным школьным объяснениям при первоначальном знакомстве с действием деления (например, см. учебное пособие Н. Б. Истоминой [7, с. 78].

Наша же основная цель в этом цикле — научиться видеть деление по содержанию «с первого взгляда».

В таблице 3 приведены решения всех задач.

Таблица 3

№ з-чи	Графика		Арифметика деления	Арифметика умножения
1	$\frac{30я}{5я}$	$= N_Т$	$N_Т = \frac{30}{5} = 6(т)$	$5я \bullet x_Т = 30я$ $x_Т = \frac{30}{5}$
2	$\frac{160кн}{20кн}$	$= N_Я$	$N_Я = 160 : 20 = 8$ (я)	$20кн \bullet x_Я = 160кн$ $x_Я = 160 : 20$
3	$\frac{350шк}{35шк}$	$= N_А$	$N_А = \frac{350}{35} = 10(а)$	$35шк \bullet x_А = 350шк$ $x_А = \frac{350}{35}$
4	$\frac{80шт}{20шт}$	$= N_Р$	$N_Р = 80 : 4 = 20$ (ряд)	$20шт \bullet x_Р = 80шт$ $x_Р = 80 : 20$
5	$\frac{24коп}{3коп}$	$= N_О$	$N_О = \frac{24}{3} = 8(о)$	$3коп \bullet x_О = 24коп$ $x_О = \frac{24}{3}$
6	$\frac{18м}{2м}$	$= N_П$	$N_П = 18 : 9 = 2$ (п)	$9м \bullet x_П = 18м$ $x_Я = 18 : 9$
7	$\frac{90шт}{10шт}$	$= N_П$	$N_П = \frac{90}{10} = 9(п)$	$10шт \bullet x_П = 90шт$ $x_П = \frac{90}{10}$
8	$\frac{32коп}{4коп}$	$= N_{КАР}$	$N_{КАР} = 32 : 4 = 20$ (кар)	$4коп \bullet x_{КАР} = 32коп$ $x_{КАР} = 32 : 4$

9	$\boxed{\frac{24кг}{2кг}}$	$= N_Б$	$N_Б = \frac{24}{2} = 12(б)$	$2кг \bullet x_Б = 24кг$ $x_Б = \frac{24}{2}$
10	$\boxed{\frac{18л}{3л}}$	$= N_Б$	$N_Б = 18 : 3 = 6$ (б)	$3л \bullet x_Б = 18л$ $x_Б = 18 : 3$
11	$\boxed{\frac{36коп}{9коп}}$	$= N_П$	$N_П = \frac{36}{9} = 4(п)$	$9коп \bullet x_П = 36коп$ $x_П = \frac{36}{9}$
12	$\boxed{\frac{40ст}{10ст}}$	$= N_Р$	$N_Р = 40 : 10 = 4$ (р)	$10ст \bullet x_Р = 40ст$ $x_Р = 40 : 10$

Если вы посмотрите «Графику» всех задач в таблице 3, то увидите, что характернейшей деталью является то, что и делимое, и делитель — однородные величины («одноразмерные»): яблоки «делим» на яблоки, книги — на книги и т. п. В текстах задач эта деталь отражена подчеркиванием. Выделено жирным шрифтом то, что ищем.

«Арифметика» в форме умножения считывается по ключевым словам умножения: по, каждый, такой (синоним — одинаковый, один, каждый). Например, задача 5: купила на 24 к(опейки) — видим ВСЕГО. **По** 3 к(опейки) **за штуку** — видим равные слагаемые, а вот их число — неизвестно, значит, появляется буква *x*, значит, появляется действие умножения, т. е. имеем уравнение $3к \bullet x_О = 24к$.

Букву *x* выгоднее, привычнее использовать в данном случае умножения, добавляя только «размерность» в виде индекса. Не забывайте, читатель, что ГрафАнализ хоть и мощный, но все же вспомогательный инструмент для изучения школьной математики. И он нужен нам не для того, чтобы мы просто рисовали задачи, а для того, чтобы мы глубже вникли в суть арифметических действий, научились «чувствовать» их, научились, благодаря этому, более свободному владению техникой. Впрочем, почему бы не писать уравнение без «размерностей»: $3 \bullet x = 24$? Никто не запрещает нам это делать. Но мне кажется, что все же лучше, предметнее так, как у меня, убирая «размерности» только в решении (в столбце «Арифметика» в форме умножения приведены и решения уравнений через букву *x*).

Комментарий к таблице 3.

1. Последовательность выполнения задач такая же, какая указана в комментарии к таблице 2.

2. Запись задачи в форме умножения показана выше.

Во сколько раз БОЛЬШЕ/МЕНЬШЕ? (кратное сравнение)

13. На тарелку положили
5 яблок,
а на блюдо
30 яблок.
Во сколько раз **больше** яблок положили на блюдо, чем на тарелку? (Во сколько раз **меньше** положили яблок на тарелку, чем на блюдо?) $(:)_{СБ}$ $((:)_{СМ})$

14. В шкафу было 160 книг,
а на полке
20 книг.
Во сколько раз **меньше** было книг на полке, чем в шкафу? (Во сколько раз **больше** было книг в шкафу, чем на полке?) $(:)_{СМ}$ $((:)_{СБ})$

15. В вагоне помещается 51 пассажир. А в поезде 612 пассажиров. Во сколько раз **больше** пассажиров в поезде, чем в вагоне? (Во сколько раз **меньше** пассажиров в вагоне, чем в поезде?) $(:)_{СБ}$ $((:)_{СМ})$

16. В парке посадили восемьдесят роз, а в саду двадцать роз. Во сколько раз **больше** роз посадили в парке, чем в саду? (Во сколько раз **меньше** роз в саду, чем в парке?) $(:)_{СБ}$ $((:)_{СМ})$

Задачи с синонимичными выражениями.

17. Килограмм яблок стоит пятнадцать рублей, а килограмм апельсинов тридцать рублей. Во сколько раз килограмм яблок **дешевле** килограмма апельсинов? (Во сколько раз килограмм апельсинов **дороже** килограмма яблок?) $(:)_{СМ}$ $((:)_{СБ})$

18. Котенку Леве шесть месяцев от роду, а коту Егору тридцать шесть месяцев. Во сколько раз котенок **младше** кота? (Во сколько раз кот **старше** котенка?) $(:)_{СМ}$ $((:)_{СБ})$

19. От Ростова до Каменска нужно ехать четыре часа, а от Ростова до Москвы двадцать часов. Во сколько раз **дольше** ехать до Москвы, чем до Каменска? (Во сколько раз **меньше** ехать до Каменска чем до Москвы?) $(:)_{СБ}$ $((:)_{СМ})$

Ответы: 13) $x = 6$; 14) $x = 8$; 15) $x = 12$; 16) $x = 4$; 17) $x = 2$; 18) $x = 6$; 19) $x = 5$.

Общие замечания.

Задача 1 этого цикла (деление по содержанию) предметно сводилась к тому, что мы 30 яблок раскладывали поровну по 5 яблок, т. е. разбивали 30 яблок на несколько равных частей под названием тарелки и нашли, что понадобится 6 тарелок.

Пусть наши 30 яблок лежат на блюде. На рис. 13а видно, что содержимое **Б**(люда) распределено поровну по 5 я(блок), а на рис. 13б видно, что для этого понадобится 6 **Т**(арелок).

Б

5я	5я	5я
5я	5я	5я

Т

5я

Рис. 13а

Б

Т	Т	Т
Т	Т	Т

Рис. 13б

И теперь можно сказать, что 30 яблок не просто разбиты на несколько равных частей, а конкретно **на 6 равных частей**. То есть можно записать в виде умножения **Б** = 6•**Т**. А вспоминая отношение «Больше В» (цикл II, глава IV), можно сказать, что на **Б**(люде) **в 6 раз**

больше яблок, чем на **Т**(арелке). Или в виде неравенства **Б** ⑥ > **Т**. А отсюда уже совершенно естественным образом формулируется такой вопрос: **во сколько раз больше** яблок на блюде, чем на одной тарелке? То есть мы **сравниваем** содержимое блюда и одной тарелки в том смысле, что узнаем сколько раз надо повторить слагаемым 5 яблок (содержимое одной тарелки), чтобы получить 30 яблок (содержимое блюда). «Разы», в отличие от тарелок, — **безразмерная** величина. Если бы мы **не знали** во сколько раз на блюде яблок больше, чем на тарелке, то отношение «Больше В» должны были бы записать так, как на рис. 14.

Б (x) > **Т** или **Б** = x•**Т**

Рис. 14

И произносили бы: **Б** в ***x* раз** больше **Т**.

В только что приведенном уравнении мы видим, что x — неизвестный множитель, а значит, действие деления: x = **Б : Т**.

Вывод: ответ на вопрос «во сколько раз больше?» получается **действием деления** большего числа на меньшее.

И уже понятно, что существует и вопрос «во сколько раз меньше?» — На блюде в 6 раз больше, значит на тарелке в 6 раз меньше. Или как выше (по рис. 14): **Б** в ***x* раз** больше **Т**, значит **Т** в ***x* раз** меньше **Б**. И поскольку «меньше мы не знаем», то вопрос «во сколько раз **Т** меньше **Б**?» мы мгновенно переводим в вопрос «во сколько раз **Б** больше **Т**», который записывается в виде уравнения **Б** = x•**Т**, где x — число «разов» — одно и то же и для «меньше», и для «больше». Вот почему задача «во сколько раз?» и для «меньше», и для «больше» решается одним и тем же действием деления большего числа на меньшее.

О слове и понятии «отношение».

Стоит добавить, что узнавая делением, во сколько раз одно число больше другого (или какую часть одно число составляет от другого), мы находим **частное**, которое обычно называют **отношением** (6-й класс) Мы с вами, читатель, используем три понятия со словом «отношение»: отношение «Больше НА», отношение «Больше В» и отношение «Равенства». Поскольку ребенок давно уже привык к этим понятиям, то маловероятно, что он будет путать отношение — как частное, как математическое понятие и слово «отношение», составляющее часть наших трех понятий: отношение как взаимосвязь величин (во всяком случае после надлежащих объяснений в 6-м классе).

Переходим к работе.

Задача 1

Несмотря на то, что к делению мы пришли от умножения (как это делается начиная с 5-го класса), но вы, читатель, разумеется, уже заметили, что рисовать деление легче именно в виде графэлемента деления, вне зависимости от той или иной формы этого действия. Деление в виде умножения в задачах будет нам нужно не так уж часто. ГрафАнализ отнюдь не требует искусственно прибегать к принципу — «меньше мы не знаем» в случаях, когда это не оправдано сутью задачи. «Графика» задачи всегда должна быть максимально прозрачна и ясна с точки зрения ви́дения арифметических действий и их практического использования. Чем дальше будет продвигаться ребенок в использовании ГРАН, тем более гибким образом он будет его использовать. Будут появляться собственные обозначения, собственный подход в рисовании «Графики», какие-то элементы будут опускаться и т. п. и т. п. Все, что дано в этой книге — всего лишь основа для применения ГрафАнализа. Если вы видите, что ребенку легче воспринять и нарисовать задачу немного иначе, нежели рекомендуется, то пусть он и осуществляет свой вариант. Лишь бы при этом не нарушались технологические требования и не страдало понимание.

В таблице 4 в «Графике» изображен графэлемент деления по содержанию, относящийся к понятию «во сколько раз больше?».

Таблица 4

Графика			**Алгебра**	**Арифметика**
Т $\boxed{5я}$ Б $\boxed{30я}$	$\dfrac{\boxed{Бя}}{\boxed{Т_я}}$	$=x$	$x=\dfrac{30}{5}=$	$\dfrac{30}{5}=6$
	$\dfrac{\boxed{30я}}{\boxed{5я}}$	$=x$		$x=\dfrac{30}{5}=6$

«Графика» состоит из двух элементов. В первом столбце мы просто извлекаем данные из условия. **Это должно осуществляться автоматически**: видим в тексте число, можем дать имя? — мгновенно рисуем (и уж конечно же с «размерностью»). По вопросу задачи — во сколько раз больше? — **видим** деление, а конкретно — деление по содержанию (об этом же наглядно говорят и одинаковые «размерности» делимого и делителя **Б** и **Т**).

Обратите внимание на безразмерный x — «во сколько раз больше?». Ситуация с «иксом» совершенно аналогична разностному сравнению в вычитании — «на сколько больше-меньше?» (цикл III, глава III). Результат деления оказывается безымянным, поэтому используем x.

Во втором столбце «Графики» даны два варианта деления: верхний — «в буквах» и нижний — «в числах». Можно выбрать любой из них. Вариант «в числах» короче, не требует «Алгебры» (а для начальной школы, где ГрафАнализ, в том, что касается деления, на данном этапе будет больше выполнять иллюстративно поясняющую функцию, этот вариант, по-видимому, единственно возможный). Но начиная с 5-го класса нужно использовать вариант «в буквах». Не только потому, что мы привыкли работать с буквенными уравнениями, но и для соблюдения единой стилистики ГРАН. Ведь вопрос «во сколько раз больше?» может являться вопросом сложной задачи в несколько действий. А уж там уповать на арифметический способ решения стоит далеко не во всех случаях. Поэтому стоит чередовать варианты второго столбца «Графики» так, как показано в таблице 5, в которой приведены решения всех задач.

Никаких особых пояснений таблица 5 не требует, кроме следующих:

1. Вопросы каждой задачи реализованы как в виде «во сколько раз больше», так и в виде «во сколько раз меньше». **Обязательно обращайте внимание ребенка на тот факт, что и графически, и арифметически решение одно и то же: большее число делится на меньшее**.

2. Ответы — безразмерны, например, **в 6 раз** больше (или меньше).

В таблице 6 решения всех задач реализованы в виде умножения, т. е. деление как поиск неизвестного множителя. Начиная с 5-го класса стоит провести решение всех задач и в этой форме, закрепляя смысл действия деления.

Замечание.

Впрочем, в своей книге «Методика обучения математике в начальных классах» Н. Б. Истомина формулируя следующее задание: сделай рисунок, к которому можно записать три выражения: а) $5 \cdot 4$, $20 : 4$, $20 : 5$; б) $4 \cdot 5$, $20 : 4$, $20 : 5$ пишет: «В процессе выполнения приведенных выше заданий учащиеся осознают связь действий умножения и деления, которая обобщается в виде правил, отражающих взаимосвязь компонентов и результатов умножения и деления. Эти правила формулируются в таком виде:

• Если значение произведения разделить на один множитель, то получим другой множитель.

• Если делитель умножить на значение частного, то получим делимое.

• Если делимое разделить на значение частного, то получим делитель» [7, с. 81–82].

Таблица 5

№ з-чи	Графика			Алгебра	Арифметика
13	Т: 5я; Б: 30я	$\frac{Б_{я}}{Т_{я}}$	$= x$	$x = \frac{Б}{Т} =$	$\frac{30}{5} = 6$
14	Ш: 160кн; П: 20кн	$\frac{160_{кн}}{20_{кн}}$	$= x$		$x = 160 : 20 = 8$
15	В: 51п; П: 612п	$\frac{П_{п}}{В_{п}}$	$= x$	$x = \frac{П}{В} =$	$\frac{612}{51} = 12$
16	П: 80р; С: 20р	$\frac{80р}{20р}$	$= x$		$x = 80 : 20 = 4$
17	Я: 15руб; А: 30руб	$\frac{А_{РУБ}}{Я_{РУБ}}$	$= x$	$x = \frac{А}{Я} =$	$\frac{30}{15} = 2$
18	Л: 6м; Е: 36м	$\frac{36м}{6м}$	$= x$		$x = 36 : 6 = 6$
19	К: 4ч; М: 20ч	$\frac{М_{ч}}{К_{ч}}$	$= x$	$x = \frac{М}{К} =$	$\frac{20}{4} = 5$

Таблица 6

№ з-чи	Данные из условия	Алгебра	Арифметика
13	Т: 5я; Б: 30я	$Б = x \cdot Т$ $x = \frac{Б}{Т} =$	$\frac{30}{5} = 6$

14	Ш П $\boxed{160кн}$ $\boxed{20кн}$	Ш x > П Ш = x•П x = Ш : П =	160 : 20 = 8
15	В П $\boxed{51п}$ $\boxed{612п}$	П = x • В $x = \frac{П}{В} =$	$\frac{612}{51} = 12$
16	П С $\boxed{80р}$ $\boxed{20р}$	П x > С П = x•С x = П : С =	80 : 20 = 4
17	Я А $\boxed{15руб}$ $\boxed{30руб}$	А = x • Я $x = \frac{А}{Я} =$	$\frac{30}{15} = 2$
18	Л Е $\boxed{6м}$ $\boxed{36м}$	Е x > Л Е = x•Л x = Е : Л =	36 : 6 = 6
19	К М $\boxed{4ч}$ $\boxed{20ч}$	М = x • К $x = \frac{М}{К} =$	$\frac{20}{4} = 5$

Резюме циклов I–II.

Выяснили, что действие деления содержательно **распадается** на две совершенно разные формы: деление на равные части и деление по содержанию.

Смысл деления на равные части состоит в том, чтобы **найти содержимое единицы делителя** (п. «Немного о делении»).

Смысл деления по содержанию сводится к тому, чтобы **найти число равных частей**, на которые мы разбиваем некоторое количество предметов так, что в каждой части содержится равное количество предметов (задача 1, цикл II).

Однако обе формы деления **возникают из одной и той же задачи**: «распределить поровну». Обе формы деления **математически сводятся к одному и тому же: найти неизвестный множитель** (п. «Немного о делении»).

Деление на равные части выступает **в двух видах** (поэтому в одном цикле даны оба вида деления): деление на равные части как таковое (найти **содержимое** единицы делителя) и «меньше в несколько раз» (найти **содержимое** одной из равных частей).

Деление по содержанию выступает **в трех видах** (поэтому в одном цикле даны три вида деления): деление по содержанию как таковое (найти **число** равных частей) и **сравнение** — во сколько раз больше или меньше?

Тем самым **<u>один</u>** графэлемент деления реализует **<u>пять</u> логических элементов арифметики**: деление на равные части, уменьшить в несколько раз, деление по содержанию, во сколько раз больше?, во сколько раз меньше?

В силу принципиальной содержательной разницы выделены как отдельные графические элементы **ГРАЭЛ-(:)$_Р$** (задача 1 цикл I**)** и **ГРАЭЛ-(:)$_С$** (задача 1 цикл II**).**

«… деление при решении задач употребляется в следующих случаях:

Когда данное число надо разделить на несколько равных частей или уменьшить его в несколько раз.

Когда надо узнать, сколько раз в данном числе содержится другое число, или определить во сколько раз одно число больше другого (найти отношение чисел» [11, с. 68]

Цикл III. Простейшие группы задач из Математики-2

Группа I, «нотная» запись: $\square$ + $(:)_P$

1. (346_{77}) [5, Ц-I] Пионеры собрали для питомника 45 кг желудей. Они упаковали в ящик 18 кг желудей, а **остальные** поровну в 3 пакета. Сколько килограммов желудей было в каждом пакете?

2. (383 $(1)_{85}$) [6, Ц-I] Девочка принесла 30 морковок. Она положила 12 морковок в корзину, а **остальные** раздала поровну 9 кроликам. По скольку морковок она дала каждому кролику?

3. (389_{86}) [7, Ц-I] В куске было 24 м ткани. Из 10 м этой ткани сшили детские костюмы, а из **остальной** ткани **7** одинаковых детских пальто. Сколько метров ткани расходовали на 1 пальто?

Группа I, «нотная» запись: $\square$ + $(:)_C$

4. (16_{94}) [12, Ц-II] Для школьного зала купили 50 новых стульев, 10 стульев поставили на сцену, а **остальные** расставили в ряды по 10 стульев в каждом. Сколько рядов стульев поставили?

5. (383 $(2)_{85}$) [6, Ц-II] Девочка принесла 30 морковок. Она отдала 12 морковок кроликам, а **остальные** связала в пучки по 9 морковок в каждом. Сколько получилось пучков?

Группа II, «нотная» запись: $(:)_P + \otimes$

6. (454_{103}) [10, Ц-I] В трех одинаковых ящиках 21 кг апельсинов. Сколько килограммов апельсинов в 8 таких ящиках?

7. (447 $(1)_{101}$) [9, Ц-I] В первый день магазин продал 8 одинаковых портфелей и получил за них 32 р. Во второй день было продано 6 таких портфелей. Сколько денег получили за портфели во второй день?

8. (460 $(1)_{104}$) [11, Ц-I] Из куска ткани длиной 24 м в мастерской сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 10 таких костюмов?

9. (467_{105}) [12, Ц-I] Из 12 мотков шерсти получается 3 одинаковых детских свитера. Сколько таких мотков шерсти потребуется на 5 свитеров?

Группа III, «нотная» запись: $(:)_P + (:)_C$

10. (472_{106}) [14, Ц-I и 9, Ц-II] В 6 банок поровну разложили 12 кг варенья. Сколько надо таких банок, чтобы разложить 24 кг варенья?

11. (471_{106}) [13, Ц-I и 8, Ц-II] За 2 карандаша по одинаковой цене уплатили 8 к. Сколько таких карандашей можно купить на 32 к.?

12. (478 $(1)_{107}$) [15, Ц-I и 10, Ц-II] В 9 банок поровну разлили 27 л сока. Сколько надо таких банок, чтобы разлить 18 л сока.

13. (22_{115}) [16, Ц-I и 11, Ц-II] Десяток пуговиц стоит 90 к. Сколько таких пуговиц можно купить на 36 к.?

Ответы: 1) $П_1$ = 9 кг; 2) $К_1$ = 9 м.; 3) $П_1$ = 2 м; 4) N = 2 ряда; 5) N = 2 пучка; 6) $Я_8$ = 56 кг; 7) $П_6$ = 24 р.; 8) $К_{10}$ = 30 м; 9) $С_5$ = 20 м.; 10) N = 12 банок; 11) N = 8 карандашей; 12) N = 6 банок; 13) N = 4 пуговицы.

Общие замечания.

В цикле даны задачи, условно разбитые на три группы. Но эта разбивка отнюдь не означает каких–то особо выдающихся логических качеств этих задач. Просто с точки зрения ГрафАнализа в учебнике Математика-2 (см. [18]) задач с такой **логической структурой** оказалось относительно много по сравнению с другими.

Каждая задача состоит из двух графсхем в виде графических элементов вычитания, умножения, деления на равные части и деления по содержанию. Поэтому в «Графике» вместо обозначений графсхем ГРАС-1 и ГРАС-2 будут использоваться обозначения соответствующих графэлементов: вычитание — ГРАЭЛ-(Δ), умножение — ГРАЭЛ-(⊗), деление на равные части ГРАЭЛ-$(:)_Р$— и деление по содержанию — ГРАЭЛ-$(:)_С$.

Рядом с номером группы — группа-I, II или III — указана «нотная» запись логической структуры задачи.

Что это такое?

Во всех циклах в текстах задач вы видели подобные значки, читатель. Подробно они описаны в главе VI «Нотная» запись логической структуры задач». И хотя не принято ссылаться на материал, расположенный в тексте далее того, который рассматривается в данный момент, мы с вами можем себе это позволить, т. к. все основные, подлежащие изучению логические элементы арифметики нами уже рассмотрены. Поэтому, читатель, **прочитайте главу VI** до того места, где начнут встречаться обозначения действий с дробями (рассмотрены в п. «Еще немного о дробях» данной главы). Здесь же я только скажу, что если вы посмотрите тексты задач в цикле I главы III, цикле I главы IV, циклах I и II главы V, то увидите, что используемые значки являются обозначениями в «нотной» записи вышеупомянутых четырех логических элементов арифметики. Каждый значок соответствует одному арифметическому действию, т. е. глядя на «нотную» запись задачи, мы сразу **видим** не только количество действий, но и какие именно арифметические действия используются в задаче.

Знак «+» (плюс) говорит о том, что «Графика» задачи состоит более чем из одной графсхемы (в нашем случае каждая задача состоит из двух ГРАЭЛов).

Перед текстом задачи в квадратных скобках указаны номера задач из циклов I и II, которые являются частью (или целиком) задач нашего цикла III. В случае затруднений у ребенка — сразу же обращайтесь к этим задачам.

Задачи в каждой группе совершенно тождественны по логической структуре (в группе I $(:)_Р$ — деление на равные части и $(:)_С$ — деление по содержанию являются формами одного и того же графэлемента деления). Поэтому подробно разбирается только одна задача каждой группы. Решения всех задач даются в табличной форме (таблица 7).

Внимание.

Основная цель данного цикла — умение **видеть** соответствующие ГРАЭЛы, а значит — опять и опять! — прежде всего, рисовать «Графику».

Сценарий.

Задача 1 ▭ + $(:)_Р$

В первом предложении задачи видим (рис. 15): 45 кг — это **В**(сего). Во втором предложении видим 2 слагаемых: **Я**(щик) и **О**(стальные). Одно слагаемое известно — Я = 18. Второе — неизвестно. Мгновенно набрасываем ГРАЭЛ-(Разности) (цикл I, глава III). Здесь же видим и ГРАЭЛ-$(:)_Р$ по ключевым словам «остальные поровну». В третьем предложении — вопрос задачи — тот же ГРАЭЛ-$(:)_Р$ по ключевому словам «в каждом».

ГРАЭЛ-(Δ) **ГРАЭЛ-$(:)_P$**

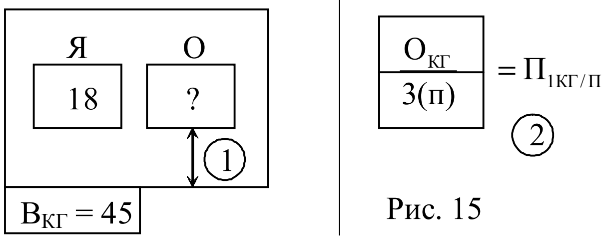


Рис. 15

1) $В = Я + О$

$О = В - Я =$ 45 – 18 = 27 (кг)

2) $К_1 = О : 3 =$ 27 : 3 = 9 (кг)

Надеюсь, читатель, что уже не стоит напоминать о том, что **вопросы ви́дения** вы всегда задаете ребенку: — Что **видим**? **Видим В**(сего)? Сколько слагаемых **видим**? **Видим** деление на равные части и т. п. **Если не видим**, то сразу же обращаемся к задаче 5 цикла I, которая является частью нашей задачи. Разница между нашей задачей и задачей 5 цикла I в том, что в цикле I нам очень легко сразу увидеть деление на равные части, так как сказано, что «**27 кг**… поровну в 3 пакета», а у нас: «**остальные**… поровну в три пакета». **Обязательно спросите** ребенка: «Остальные, т. е. слагаемое **О** (см. таблица 7, задача 1) — это что (**какая «размерность»**)?». Нужно добиться, чтобы ребенок понял, что он **распределяет килограммы**. Об этом говорит и «размерность» **В**(сего) — [кг], и то, что складывать и вычитать мы можем только одноразмерные величины (одного наименования).

Напоминаю, что **в «Графике» действия деления мы обязательно указываем «размерности»**! Именно «размерности» — что́ на что́ делим — помогают избегать ошибок. Без «размерностей» ошибки неизбежны даже в столь простых случаях как наш.

Напоминаю и то, что нужно периодически «считывать» с «Алгебры» или «Графики» вопросы для записи решения задач в школе в форме «с вопросами».

В нашем случае (по действиям):

1) Сколько килограммов желудей упаковали (в 3 пакета)?
   45 – 18 = 27 (кг)
2) Сколько килограммов желудей было в каждом пакете?
   27 : 3 = 9 (кг)

Задача 4 □ + $(:)_C$

Вопросы ви́дения почти те же. Только обратите внимание на деление по содержанию: «стулья — на стулья» (40 стульев делятся на группы по 10 стульев). В случае затруднений — задача 12 цикла II, которая является частью нашей задачи.

Задача 6 $(:)_P + \otimes$

Вопросы ви́дения: — Что **видим** в первом предложении? Что **видим** во втором предложении? Подразумевается: — Как можем нарисовать (какие ГРАЭЛы)? Какие, тем самым, арифметические действия?

ГРАЭЛ-$(:)_P$ **ГРАЭЛ-$(\otimes)$**

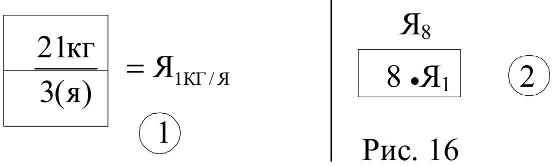


Рис. 16

1) $Я_1 =$ $\frac{21}{3} = 7$ (кг)

2) $Я_8 = 8 \bullet Я_1 =$ $8 \bullet 7 = 56$ (кг)

Более подробные вопросы подсказки: — Что можем узнать из первого предложения? Видим деление на равные части?.. Следовательно, рисуем ГРАЭЛ-$(:)_P$ (рис. 16). — А что узнаем? Верно, сколько килограммов в одном ящике. — Какое имя можем дать?.. Верно, $Я_1$ (см. задача 10, цикл I). — Зная, сколько килограммов в одном ящике, можем узнать сколько в восьми ящиках?.. Верно, умножение. — Рисуем ГРАЭЛ-(⊗) (см. цикл I главы IV).

Так мы идем от данных к вопросу (синтетический способ разбора задачи).

Если пойдем от вопроса к данным (аналитический способ разбора задачи), то вопросы: — Чтобы узнать, сколько килограммов в восьми ящиках, что нужно знать?.. Верно, сколько в одном ящике — действием умножения. — Можем узнать сколько в одном ящике? Как это делается, каким действием? — Делением на равные части. — Есть ли оно у нас?.. — Да, в первом предложении задачи.

Задачи, разумеется, простейшие. Но мы их обязательно рисуем. Задавать все вопросы подряд нет никакой необходимости. Я просто показал разные подходы, разные формулировки, чтобы вы, читатель, могли свободно формулировать свои вопросы-подсказки. Неизменной должна сохраняться только суть вопросов ви́дения, а их форма полностью в ваших руках.

Задача 10 $(:)_Р + (:)_С$

Все задачи группы III использованы по частям и в цикле I, и в цикле II. Первое предложение задач — деление на равные части, а второй — деление по содержанию (рис. 17).

ГРАЭЛ-$(:)_Р$

$$\boxed{\frac{12кг}{6(б)}} = Б_{1кг/б} \quad ①$$

ГРАЭЛ-$(:)_С$

$$\boxed{\frac{24кг}{Б_1кг}} = N_Б \quad ②$$

Рис. 17

1) $Б_1 =$

2) $N_Б = \dfrac{24}{Б_1} =$

$\dfrac{12}{6} = 2\,(кг)$

$\dfrac{24}{2} = 12\,(банок)$

ГРАЭЛ-$(:)_Р$ не вызовет никаких затруднений. Он полностью совпадает с соответствующей задачей цикла I. В ГРАЭЛ-$(:)_С$ может возникнуть трудность, связанная с тем, что в графэлементе деления по содержанию мы пишем делитель не в виде числа, а в виде буквы: имя ГРАЭЛа на равные части — **$Б_1$**. Обходится эта трудность двумя способами. Либо сосредоточиваемся на вопросе: — Что распределяется? — 24 килограмма (вопрос задачи). — Что надо найти: сколько килограммов в одной банке или число банок? — Так как надо найти число банок, то надо знать сколько килограммов в одной банке (содержимое одной банки), а оно у нас есть в первом действии — **$Б_{1\,кг/б}$**. Вот поэтому и пишем, что делим на **$Б_1$**, мы же можем посчитать значение **$Б_1$** (12 кг : 6 = 2 кг).

Либо, если через имя **$Б_1$** трудно, то прямо «в лоб» пишем результат $Б_1$ = 12 : 6 = 2 (кг) здесь же, в ГРАЭЛ-$(:)_Р$ и тут же, в ГРАЭЛ-$(:)_С$, дописываем чему равно **$Б_1$** (рис. 18).

$$\boxed{\frac{12кг}{6(б)}} = Б_{1кг/б} = \left(\frac{12}{6}\right) = 2\,(кг) \qquad \boxed{\frac{24кг}{Б_{1кг} = 2кг}} = N_Б = \left(\frac{24}{2}\right) = 12(банок)$$

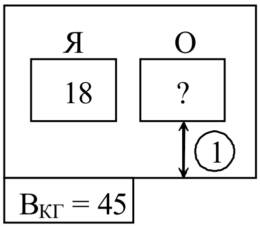
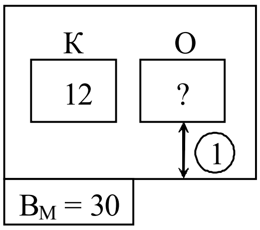
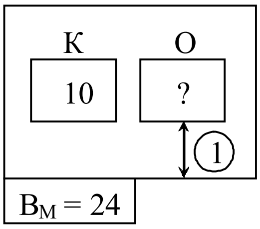
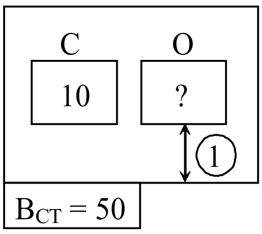
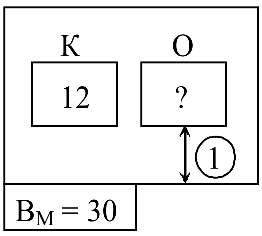
Рис. 18

Что́ на что́ делим я взял в скобки потому, что и в уме очень легко посчитать (тем более, что в графэлементе деления числа указаны) и проще сразу написать: $Б_1$ = 2 (кг), $N_Б$ = 12 (банок). После такого поясняющего рисунка с остальными задачами проблем быть не должно.

Внимание.

Рис. 18 нужно использовать только как пояснение, а решения оформлять так, как это сделано в таблице 7.

Таблица 7

№ з-чи	Графика		Алгебра	Арифметика
1	**Группа I** ▭ + (:)$_Р$			
	ГРАЭЛ-(Δ) 	**ГРАЭЛ-(:)$_Р$** $\frac{О_{КГ}}{3(п)} = П_{1КГ/П}$ ②	1) $В = Я + О$ $О = В - Я =$ 2) $К_1 = О : 3 =$	45 – 18 = 27 (кг) 27 : 3 = 9 (кг)
2	**ГРАЭЛ-(Δ)** 	**ГРАЭЛ-(:)$_Р$** $\frac{О_{М}}{9(к)} = К_{1М/К}$ ②	1) $В = К + О$ $О = В - К =$ 2) $К_1 = \frac{О}{9} =$	30 – 12 = 18 (м) $\frac{18}{9} = 2$ (м)
3	**ГРАЭЛ-(Δ)** 	**ГРАЭЛ-(:)$_Р$** $\frac{О_{М}}{7(п)} = П_{1М/П}$ ②	1) $В = К + О$ $О = В - К =$ 2) $П_1 = О : 7 =$	24 – 10 = 14 (м) 14 : 7 = 2 (м)
4	**Группа I** ▭ + (:)$_С$			
	ГРАЭЛ-(Δ) 	**ГРАЭЛ-(:)$_С$** $\frac{О_{СТ}}{10ст} = N_Р$ ②	1) $В = С + О$ $О = В - С =$ 2) $N_Р = \frac{О}{10} =$	50 – 10 = 40 (ст) $\frac{40}{10} = 4$ (ряда)
5	**ГРАЭЛ-(Δ)** 	**ГРАЭЛ-(:)$_С$** $\frac{О_{М}}{9м} = N_П$ ②	1) $В = К + О$ $О = В - К =$ 2) $N_П = О : 9 =$	30 – 12 = 18 (м) 18 : 9 = 2 (пучка)

	Группа II $(:)_Р + \otimes$			
6	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{21кг}{3(я)}} = Я_{1КГ/Я}$ 1	**ГРАЭЛ-$(\otimes)$** $Я_8$ $\boxed{8 \bullet Я_1}$ 2	1) $Я_1 =$ 2) $Я_8 = 8 \bullet Я_1 =$	$\frac{21}{3} = 7(кг)$ $8 \bullet 7 = 56$ (кг)
7	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{32руб}{8(п)}} = П_{1РУБ/П}$ 1	**ГРАЭЛ-$(\otimes)$** $П_6$ $\boxed{6 \bullet П_1}$ 2	1) $П_1 =$ 2) $П_6 = 6 \bullet П_1 =$	$32 : 8 = 4(руб)$ $6 \bullet 4 = 24$ (руб)
8	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{24м}{8(к)}} = К_{1М/К}$ 1	**ГРАЭЛ-$(\otimes)$** $К_{10}$ $\boxed{10 \bullet К_1}$ 2	1) $К_1 =$ 2) $К_{10} = 10 \bullet К_1 =$	$\frac{24}{8} = 3(м)$ $10 \bullet 3 = 30$ (м)
9	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{12мот}{3(с)}} = С_{1МОТ/С}$ 1	**ГРАЭЛ-$(\otimes)$** $С_5$ $\boxed{5 \bullet С_1}$ 2	1) $С_1 =$ 2) $С_5 = 5 \bullet С_1 =$	$12 : 3 = 4(мот)$ $5 \bullet 4 = 20$ (мот)
	Группа III $(:)_Р + (:)_С$			
10	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{12кг}{6(б)}} = Б_{1КГ/Б}$ 1	**ГРАЭЛ-$(:)_С$** $\boxed{\frac{24кг}{Б_1кг}} = N_Б$ 2	1) $Б_1 =$ 2) $N_Б = \frac{24}{Б_1} =$	$\frac{12}{6} = 2(кг)$ $\frac{24}{2} = 12(банок)$
11	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{8коп}{2(кар)}} = К_{1КОП/КАР}$ 1	**ГРАЭЛ-$(:)_С$** $\boxed{\frac{32коп}{К_1коп}} = N_{КАР}$ 2	1) $К_1 =$ 2) $N_{КАР} = 32 : К_1 =$	$8 : 2 = 4(коп)$ $32 : 4 = 8(каранд.)$
12	**ГРАЭЛ-$(:)_Р$** $\boxed{\frac{27л}{9(б)}} = Б_{1Л/Б}$ 1	**ГРАЭЛ-$(:)_С$** $\boxed{\frac{18л}{Б_1л}} = N_Б$ 2	1) $Б_1 =$ 2) $N_Б = \frac{18}{Б_1} =$	$\frac{27}{9} = 3(л)$ $\frac{18}{3} = 6(банок)$

13	**ГРАЭЛ-(:)$_Р$** $\dfrac{90коп}{10(п)} = П_{1коп/п}$ (1)	**ГРАЭЛ-(:)$_С$** $\dfrac{36коп}{П_1коп} = N_П$ (2)	1) $П_1 =$ 2) $N_П = 36 : П_1 =$	$90 : 10 = 9$ (коп) $36 : 9 = 4$ (пугов.)

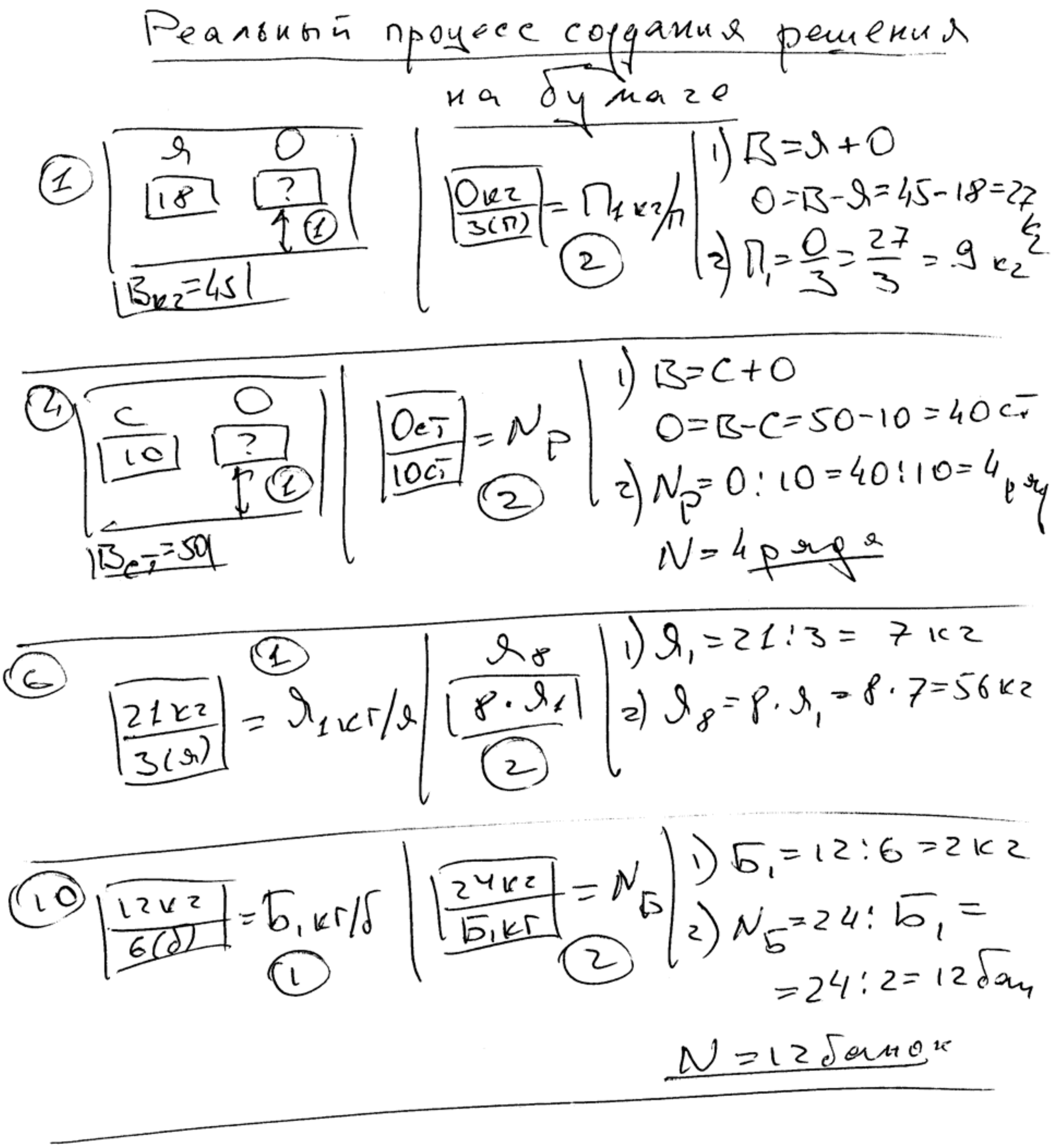


Рис. 19

Примечание.

В книге Н. С. Поповой (см. [14, с. 113]) задачи групп II и III называются задачами на простое тройное правило, в которых «… раскрывается пропорциональная зависимость величин… В этих задачах даются два значения одной величины и одно из соответствующих значений другой величины. Искомым является “четвертое пропорциональное”». Там же способ решения задач группы II называется способом прямого приведения к единице, а способ решения задач группы III называется способом обратного приведения к единице. Способ решения обеих задач называется способом приведения к единице потому, что первым вопросом задач является нахождение содержимого единицы делителя.

Читатель, чтобы у вас не сложилось впечатление, что процесс решения очень громоздок со всеми этими «Графика», «Алгебра», «Арифметика», скобками в «Арифметике» и т. п.; чтобы вам не казалось, что необходимо все вырисовывать как художественное произведение я даю рис. 19, на котором показан реальный процесс «набрасывания» решения. Как видите, даже «размерность» в «Арифметике» я даю без скобок, и уж отнюдь не увлекаюсь рисованием самим по себе. Однако сравните с решениями в таблице 7: все необходимое на рис. 19 — в реальном процессе — присутствует. Конечно, вы давно и сами пришли к такой манере рисования задачи, но все же лучше еще раз напомнить, что ГрафАнализ для нас — это инструментарий, конструктор решений, а отнюдь не самоцель.

Цикл IV. Все арифметические действия (задачи в 2–7 действий)

1. Заводы «Прибой» и «Рубин» выпускают **две тысячи** компьютеров в месяц. «Прибой» выпускает **в четыре раза** меньше компьютеров, чем оба завода. Сколько компьютеров в месяц выпускает «Рубин»? $(:)_{\text{РМ}}\square$

2. В зоопарке **тридцать** слонов и обезьян, причем слонов **в три раза** меньше, чем всех животных. **Во сколько раз** в зоопарке больше обезьян, чем слонов? $(:)_{\text{РМJ}} + (*)_{\text{СБ}}$

3. Рыбаки поймали **двадцать одну** селедку, килек — **в семь раз** меньше, чем селедок, а хеков серебристых свежемороженых **в три раза** меньше, чем килек. Сколько рыбы поймали рыбаки? $[(:)_{\text{РМ}}(:)_{\text{РМ}}](\bullet\bullet\bullet)$

4. В пустыне Гоби было **тридцать** шакалов, а верблюдов **в три раза** меньше. **На сколько** меньше было верблюдов, чем шакалов? $(:)_{\text{РМ}}(\bullet)_{\text{М}}$

5. В пустыне Гоби было **десять** верблюдов, а львов **на четыре** меньше. Шакалов же было **в два** раза меньше, чем верблюдов и львов. **На сколько** меньше было шакалов, чем верблюдов и львов? $(\bullet)(\bullet\bullet) + (:)_{\text{РМ}} + (\bullet)_{\text{М}}$

6. В пустыне Гоби было **тридцать** шакалов, а верблюдов **в три раза** меньше. В пустыне Сахара львов было **в два раза** меньше, чем всех животных в пустыне Гоби, а диких собак **в три раза** больше, чем львов. а) **На сколько** меньше было львов в пустыне Сахара, чем всех животных в пустыне Гоби? б) **Во сколько ра**з меньше было животных в пустыне Гоби, нежели в пустыне Сахара? $(:)_{\text{РМ}}(\bullet\bullet) + [(:)_{\text{РМ}}\otimes_{\text{Б}}](\bullet\bullet) + (\bullet)_{\text{М}} + (:)_{\text{СМ}}$

Ответы: 1) Р = 1500 к.; 2) а. $x = 2$ (**в** 2 раза больше); 3) В = 25 шт.; 4) $x = 20$ шт.(**на** 20 меньше); 5) $x = 8$ шт. (**на** 8 меньше); 6) а. $x_1 = 20$ шт. (**на** 20 меньше), б. $x_2 = 2$ (**в** 2 раза меньше).

Данный цикл построен на тех же принципах, что и цикл III главы IV. Просмотрите начало цикла III главы «Умножение», читатель, и переходим к работе[12].

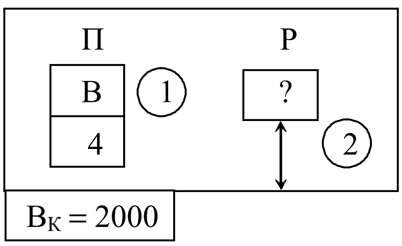
Замечание.

Числа в текстах задач даны в словесной форме и выделены жирным шрифтом. Точно так же выделены логические элементы «больше-меньше на», «больше-меньше в».

Задача 1

На рис.20 «меньше в четыре раза» нарисовано так, как на рис. 9 цикла I — в виде привычного для нас слагаемого с именем «**П**(рибой).

Графика



Алгебра Арифметика

1). П = В **:** 4 = 2000 **:** 4 = 500

2). В = П + Р

Р = В – П = 2000 – 500 = 1500

Рис. 20

[12] Поскольку применению $(:)_{\text{Р}}$ — деление на равные части и $(:)_{\text{С}}$ — деление по содержанию посвящен предыдущий цикл, то в цикле IV я использую $(:)_{\text{РМ}}$ — меньше в несколько раз наиболее часто встречающееся в виде слагаемого в задачах 6-го класса.

Обратите внимание, что **В**(сего) внутри слагаемого **П** мы пишем без «размерности». Это единственный случай, когда в графэлементе деления можно себе это позволить, т. к. «уменьшить в несколько раз» — это деление на равные части «в чистом виде»: делим 2000 компьютеров на 4 равные части и берем содержимое одной части. Были компьютеры — компьютеры и остались, «размерность» не меняется.

«Графика» задач 2, 3, 4 (рис. 21, 22, 23 соответственно) никаких особых пояснений не требует.

Задача 2

ГРАС-1 **ГРАС-2**

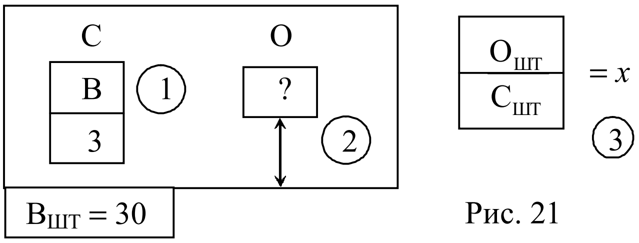


Рис. 21

Алгебра Арифметика

1). $С = В : 3 = 30 : 3 = 10$

2). $В = С + О$

$О = В - С = 30 - 10 = 20$

3). $x = О : С = 20 : 10 = 2$

Задача 3

Графика

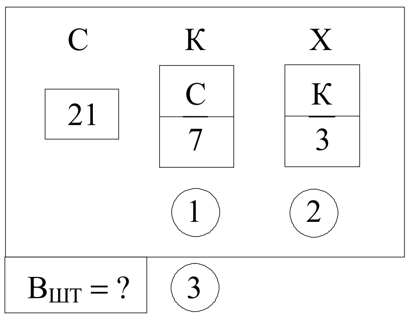


Рис. 22

Алгебра Арифметика

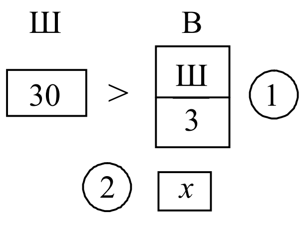
1). $К = \frac{С}{7} = \frac{21}{7} = 3$

2). $Х = \frac{К}{3} = \frac{3}{3} = 1$

3). $В = С + К + Х = 21 + 3 + 1 = 25$

Задача 4

Графика



Алгебра Арифметика

1). $В = Ш : 3 = 30 : 3 = 10$

2). $Ш = В + x$

$x = Ш - В = 30 - 10 = 20$

Рис. 23

Задача 5

На рис. 24 $\mathbf{В_Е}$ (верблюды) и **В** (всего верблюдов и львов), разумеется, разные имена, разные слагаемые.

Отношение «Больше НА» в форме «меньше на» (львов **на** четыре **меньше**) и в форме «на сколько меньше?» (**на сколько меньше** шакалов, а также деление на равные части в форме «меньше в» (шакалов **в** два раза **меньше**) ребенок должен уже безошибочно и мгновенно их рисовать. Как видите, читатель, именно графическая реализация всех этих **трех разных «меньше»** помогает нам **с легкостью** выделять их из текста и избегать ошибок.

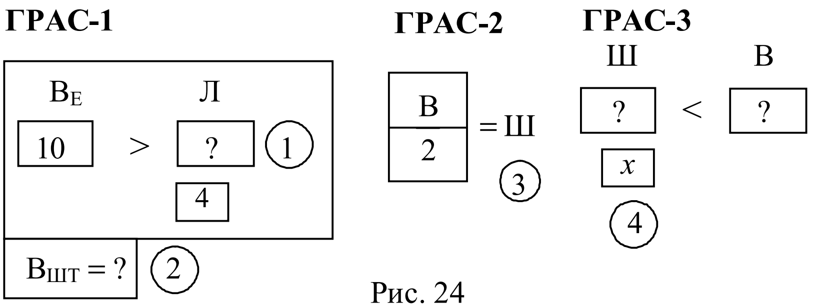


Рис. 24

Алгебра Арифметика

1). $В_Е = Л + 4$

$Л = В_Е - 4 = 10 - 4 = 6$

2). $В = В_Е + Л = 10 + 6 = 16$

3). $Ш = В : 2 = 16 : 2 = 8$

4). $В = Ш + x$

$x = В - Ш = 16 - 8 = 8$

Задача 6

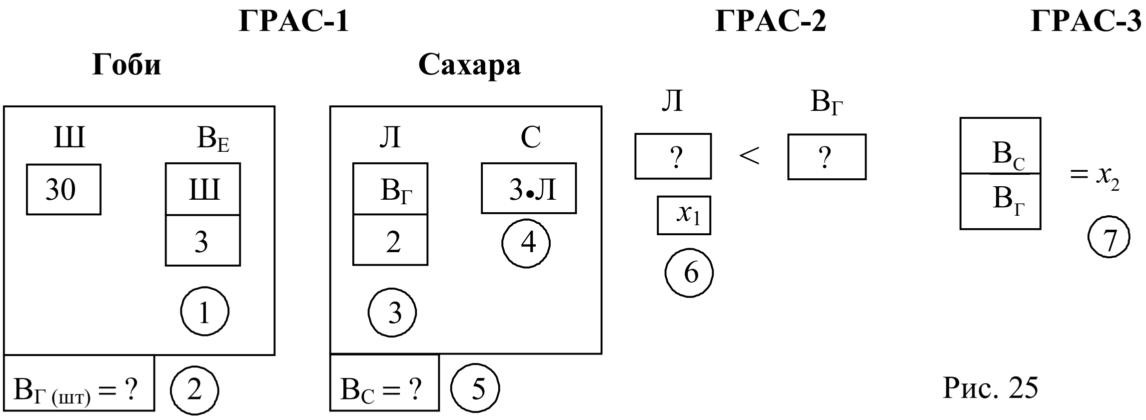


Рис. 25

Алгебра Арифметика

1). $В_Е = Ш : 3 = 30 : 3 = 10$

2). $В_Г = Ш + В_Е = 30 + 10 = 40$

3). $Л = В_Г : 2 = 40 : 2 = 20$

4). $С = 3 \cdot Л = 3 \cdot 20 = 60$

5). $В_С = Л + С = 20 + 60 = 80$

6). $В_Г = Л + x_1$

$x_1 = В_Г - Л = 40 - 20 = 20$

7). $x_2 = В_С : В_Г = 80 : 40 = 2$

На первый взгляд задача большая — **целых 7 действий** (рис. 25). Но… она не трудная, хоть и состоит из трех графсхем. Право же, легче некоторых задач для 3-го класса (и это повод задуматься о традиционном содержании курса математики-3 Во всяком случае, о его более глубоком продолжении в курсах математики-5 и 6). Я думаю, читатель, все **пять** «меньше-больше» (в три раза меньше, в два раза меньше, в три раза больше, на сколько меньше? во сколько раз меньше?) теперь уже не представляют для ребенка каких-то особых трудностей. Однако, в силу объемности задачи, они требуют внимания. На всю «Графику» у меня ушло около 4 минут, да плюс **проверка** — 1 минута. «Алгебра» с «Арифметикой» заняли в два с половиной раза меньше времени — всего около 2 минут. В связи с этим, напомните ребенку: **проверка «Графики»** — важнейший этап — обязательна!

В ГРАС-2, 3 «иксы» разные: x_1 и x_2.

Цикл V. «Супер-задачи»

1. У Ани в голове было в три раза меньше глупых мыслей, чем умных. У Маши глупых мыслей было на четыре меньше, чем своих умных мыслей. Во сколько раз всяких мыслей было больше у Маши, чем у Ани, если известно, что у Маши было в четыре раза больше умных мыслей, чем у Ани глупых, и к тому же на тот момент в голову Ани затесалась всего лишь одна глупая мысль. $[(:)_{\text{РМ}} \to \otimes_{\text{Б}}](\bullet\bullet) + [\otimes_{\text{Б}}(\bullet)](\bullet\bullet) + (:)_{\text{СБ}}$

2. Пираты спрятали серебряные и золотые монеты, и в десять раз меньше алмазов, чем изумрудов. Когда пионер Вася нашел клад, то в нем оказалось двести пятьдесят пять монет и драгоценных камней, причем изумрудов было ровно пятьдесят штук. «Во сколько раз золотых монет больше, чем изумрудов?» — подумал Вася.

Вот странный Вася! Тут бы клад в зубы — и домой… Но все-таки, помоги Васе, раз уж ему так хочется, и если я добавлю, что всех монет было в два раза больше, чем серебряных. $(:)_{\text{РМ}}(\bullet\bullet)\square[\otimes_{\text{Б}} \to (:)_{\text{РМ}}]\square + (:)_{\text{СБ}}$

3. Два ученых-астролога поспорили, кто из них лучше предсказывает судьбу, но, не решив этого вопроса, отправились к царю Соломону, славившемуся своей мудростью. Один астролог сказал: «О, Владыка, в прошлом году я предсказал судьбу сто пятьдесят раз по внутренностям барана, по кофейной гуще на пятьдесят меньше, и в два раза больше по звездам, чем по барану. А еще я сделал столько же предсказаний по своему левому уху, сколько по барану, звездам и кофейной гуще».

Второй астролог с гордостью заявил: «А я, о, Владыка, за три месяца сделал на девятьсот пятьдесят предсказаний больше по кофейной гуще, и хоть по барану — в три раза меньше, зато по звездам — в четыре раза больше, чем мой соперник по своему левому уху».

Царь Соломон призвал математика и велел ему: «Ну-ка, посчитай, кто из этих двух сделал больше предсказаний и во сколько раз?»

Мудр был царь Соломон, но его придворным математиком, к несчастью, на сей раз предстоит быть тебе, и я тебе от души сочувствую. $[(\bullet)\otimes_{\text{Б}}(\bullet\bullet\bullet)(=)](\bullet\bullet) + [(*)_{\text{Б}}(:)_{\text{РМ}}\otimes_{\text{Б}}](\bullet\bullet\bullet) + (:)_{\text{СБ}}$

Ответы: 1) $x = 1$; 2) $x = 2$ (**в** 2 раза больше); 3) $x = 3$ (в 3 раза больше).

Общие замечания.

Как в завершающем цикле VI главы III «Вычитание», так и здесь, в завершающем цикле V главы V «Деление», я говорю: в этом цикле будут даны действительно сложные задачи. Можно разобрать их решение, начиная с 6-го класса, но вряд ли стоит рассчитывать на то, что ребенок такого возраста их решит. Правда, одно исключение у меня было, с ними справилась девочка-шестиклассница, которая одолела задачу о пиратах (задача 6, цикл VI, глава II) без ГрафАнализа. Тем не менее, задачи данного цикла, приближаясь к более-менее серьезным арифметическим задачам, несут большую позитивную психологическую нагрузку. Ребенок, **с вашей помощью**, в состоянии, в какой-то мере, охватить логическую структуру задачи целиком и на завершающем этапе «Алгебры» ему приятно справиться с задачей «ну почти самостоятельно». Да еще с таким монстром в 10 действий, как задача 3 (хотя на самом деле задача 3 гораздо легче первых двух задач). Ощущение победы, благодаря именно крайней наглядности «Графики» и «Алгебры», останется надолго.

Все графические решения я привожу в рукописном виде, чтобы вы, читатель, как в цикле III увидели реальный процесс построения решения на бумаге: последовательность возникновения «Графики» из текста, расположение на листе бумаги, почерк, манера рисования и т. п. Если убрать слова Графика, ГРАС, Рис., то все остальное — именно тот стиль, который возникает при работе с ГрафАнализом и на который стоит ориентироваться.

Поскольку задачи не рассчитаны на самостоятельное решение детей (за исключением старшеклассников), то я ограничиваюсь минимумом пояснений.

В таблицах 8–10 еще и еще раз обращаю ваше внимание на соотношение между затратами времени на «Графику» с ее реализацией в «Алгебре» и «Арифметике — «Графика» требует в 2,5–4 раза больше времени!

Задача 1

Хотя при внимательном чтении текста мы в общем-то могли бы нарисовать «Графику» (рис. 28) сразу, но запутанность логической структуры вынуждает нас идти по пути **наименьшей затраты усилий**. Никогда ни одна задача, за исключением тривиальных, никем не может быть понята сразу, во всех своих связях. Понимание приходит постепенно, по мере осмысления того или иного блока задачи. Поэтому хоть мы и видим в тексте две сум-

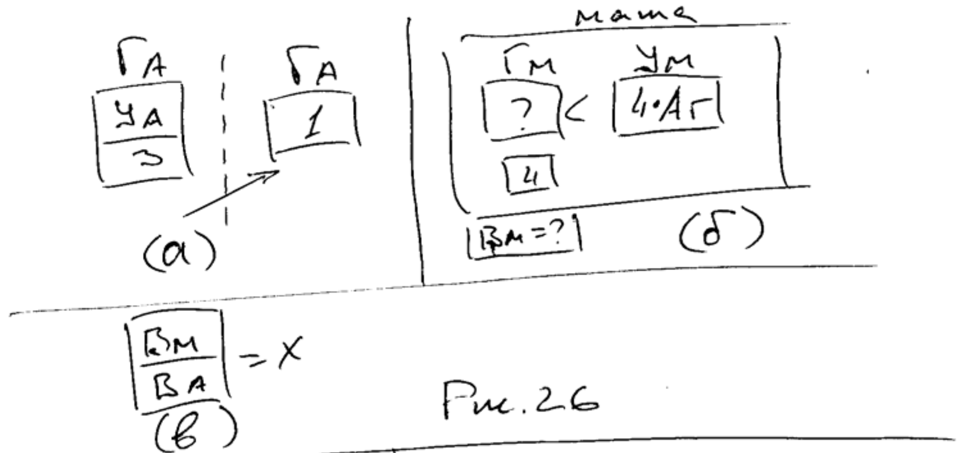


Рис. 26

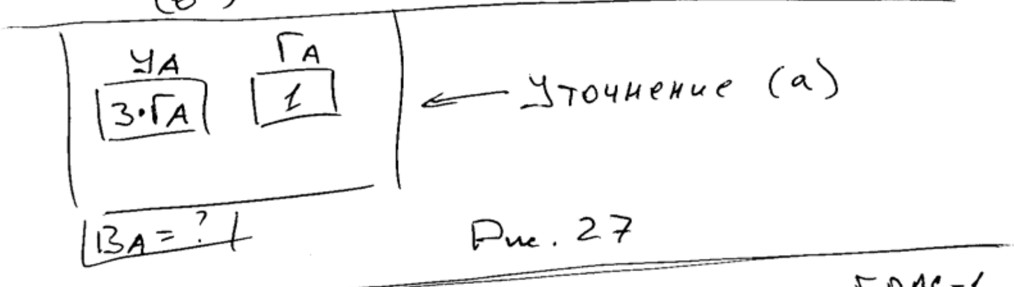


Рис. 27

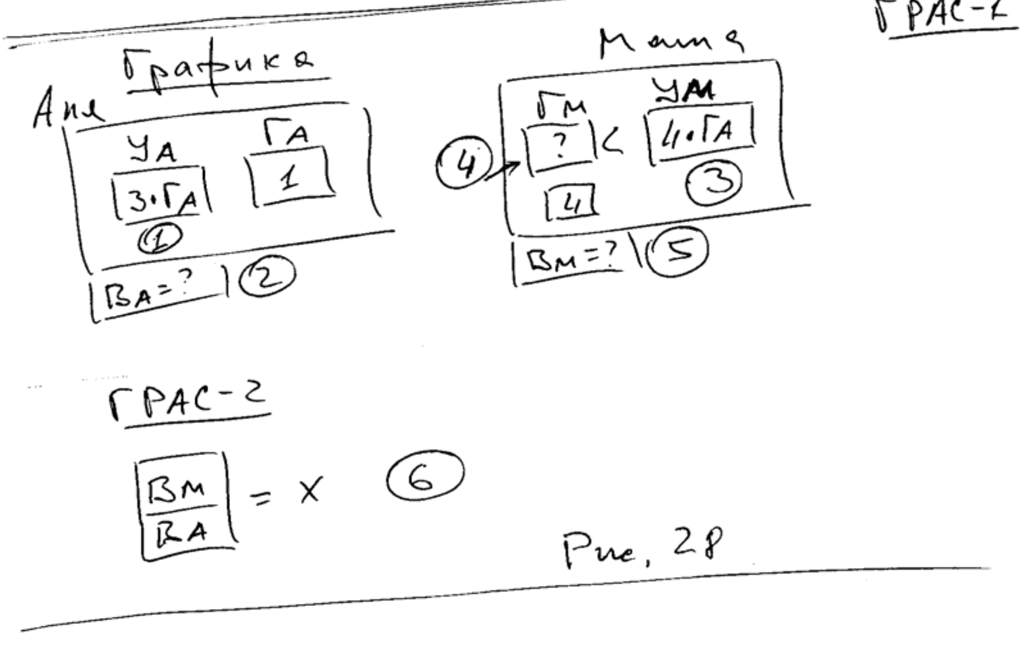


Рис. 28

мы («Во сколько раз **всяких** мыслей было больше у Маши, чем у Ани…), не стоит браться сразу за окончательную «Графику», а рисовать ее (после прочтения) по мере появления логических элементов в тексте.

Рис. 26 (а) возникает не сразу, поскольку содержимое слагаемого $Г_А = У_А : 3$ в первом предложении дается в виде формулы, а его же содержимое в виде числового значения — в последнем предложении. Последовательное рисование «Графики» дает нам возможность на рис. 27 уточнить рис. 26 (а), перевести «меньше в 3 раза» в «больше в 3 раза» и увязать известное слагаемое $\mathbf{Г_А}$ с неизвестным слагаемым $\mathbf{У_А}$.

На этом этап осмысления задачи закончен и мы рисуем окончательную «Графику» задачи (рис. 28).

Хотя имена слагаемых прозрачны, привожу их расшифровку (во всех трех задачах цикла):

$У_А$ — количество умных мыслей Ани
$Г_А$ — количество глупых мыслей Ани
$У_М$ — количество умных мыслей Маши
$Г_М$ — количество глупых мыслей Маши
$В_А$ — всего мыслей Ани

Алгебра Арифметика

1). $У_А = 3 \cdot Г_А = 3 \cdot 1 = 3$
2). $В_А = У_А + Г_А = 3 + 1 = 4$
3). $У_М = 4 \cdot Г_А = 4 \cdot 1 = 4$
4). $У_М = Г_М + 4$
$Г_М = У_М - 4 = 4 - 4 = 0$
5). $В_М = Г_М + У_М = 0 + 4 = 4$
6). $x = \frac{В_М}{В_А} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow В_М = В_А$

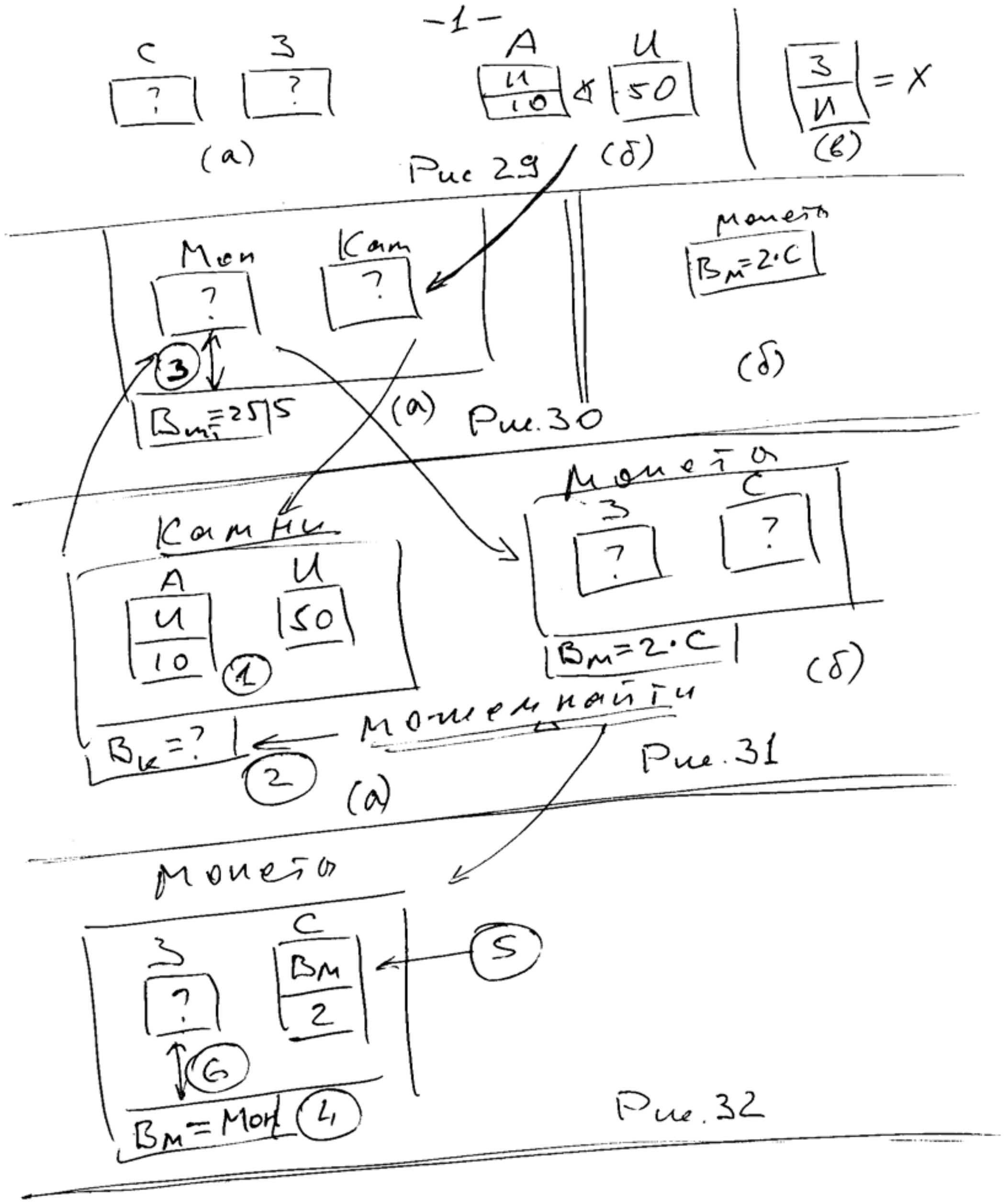
$В_М$ — всего мыслей Маши.

Обратите внимание на интерпретацию результата. Мы получили, что отношение $x = В_М : В_А$ равно единице ($x = 1$), а вопрос задачи — во сколько раз больше? Не можем же мы сказать, что $В_М$ в один раз больше, чем $В_А$. То, что отношение равно единице, содержательно означает, что слагаемые **Аня** и **Маша** (рис. 28) равны, то есть, возвращаясь к сюжету задачи, у Ани и Маши (уже не слагаемых) одинаковое число мыслей, а именно — четыре (алгебраически: $В_М = В_А = 4$).

Таблица 8

Вид работы	Временны́е затраты
Первое прочтение	~ 1 мин
Рис. 26–27	~ 6 мин
Проверка рис. 26–27 — по тексту	~ 2 мин
Окончательная «Графика» (рис. 28)	~ 2 мин
Проверка окончательной «Графики» (рис. 28)	~ 1 мин
Расстановка действий	~ 1 мин
Итого «Графика»:	**~ 13 мин**
«Алгебра» и «Арифметика»	**~ 3 мин**
Итого:	~ 16 мин

Задача 2



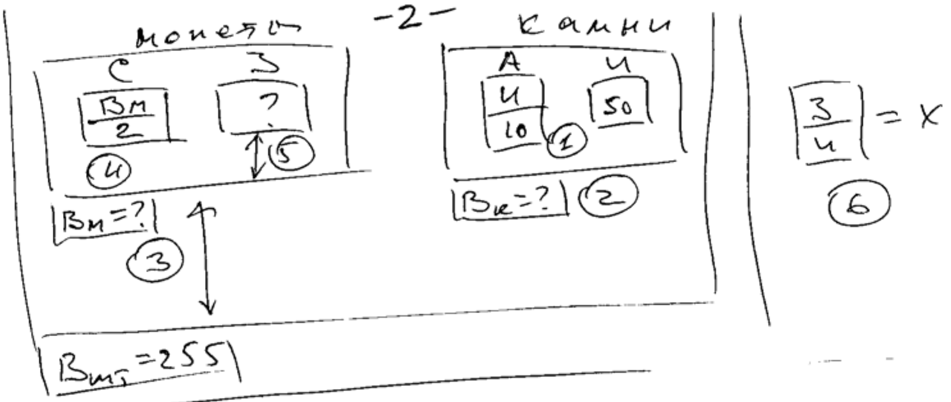
Первое предложение задачи реализовано на рис. 29 (а, б) сразу по мере прочтения. Рис. 29 (в) — вопрос задачи, третье предложение текста. А вот рис. 30 (а, б) — второе предложение текста — возникает позже, после первого прочтения вот почему. Данные, изображенные на рис. 29, мы легко считываем сразу с текста в рисунок. А поскольку легко, то сразу и набрасываем слагаемые и отношения рис. 29 уже при первом прочтении первого и третьего предложений. На втором предложении останавливаться как-то не хочется из-за его усложненной стилистики. Зато часть задачи графически зафиксирована.

После первого быстрого прочтения возвращаемся ко второму предложению и извлекаем графику рис. 30 (а), добавляя сюда же информацию из последнего предложения — рис. 30 (б). Имена слагаемых-сумм: **Мон**(еты), **Кам**(ни) — рис. 30 (а); **Монеты**, **$В_м$** (всего монет), рис. 30 (б) извлекаются из текста «в лоб».

Рис. 31 (а) возникает как уточнение рис. 29 (а) и рис. 30 (а), но при этом идет активная работа с текстом. Уже на этом этапе возможна расстановка действий (1-е и 2-е действия) по принципу: можем посчитать? Это приводит к пониманию, что найдя **В$_{\text{К}}$** (всего камней), можем найти и число монет (слагаемое **Мон**, рис. 30 (а)), что и будет третьим действием. Теперь внимание неизбежно сосредоточивается на рис. 31 (б). **Обратите внимание**, что рис. 31 (а, б) возник как **естественное уточнение** (развитие, углубление) рис. 30, слагаемые которого **Мон** и **Кам** являются очевидными промежуточными суммами. (Кстати, заметьте, что рис. 30 (б) перешел в виде формулы $В_{М} = 2•С$ в рис. 31 (б)).

Теперь видим, что **В$_{\text{М}}$** (всего монет) нам известно после 3-го действия, рис. 30 (а), а значит нам нужна не формула $В_{М} = 2•С$, а формула $С = В_{М}$ **:** 2 (**переводим «больше в» в «меньше в»**, в «нотной» записи этому переводу соответствует фрагмент $[\otimes_{Б} \rightarrow (:)_{РМ}]$), т. е. можем найти **С** — число серебряных монет. Возникает рис. 32 и соответствующие действия.

Вот теперь из всех набросков графики мы можем создать «Графику» задачи (рис. 33), поскольку чувствуем, что пришла пора охватить всю задачу целиком. При этом несколько меняется число действий. На рис. 32 мы были вынуждены осуществить операцию приравнивания $В_{М}$ = Мон, т. к. одно и то же слагаемое было по разному обозначено на разных рисунках (рис. 30 (а) и рис. 31 (б)). Теперь же слагаемое $В_{М}$ (всего монет) является промежуточной суммой (**Монеты**) на рис. 33 и мы его находим третьим действием.



1) $A = \frac{И}{10} = \frac{50}{10} = 5$

2) $В_к = А + И = 5 + 50 = 55$

3) $В = В_м + В_к$

$В_м = В - В_к = 255 - 55 = 200$

4) $С = \frac{В_м}{2} = \frac{200}{2} = 100$

5) $В_м = С + З$

$З = В_м - С = 200 - 100 = 100$

6) $x = \frac{З}{И} = \frac{100}{50} = \boxed{2}$

Рис. 33

Имена слагаемых:	
А — алмазы И — изумруды С — серебряные монеты З — золотые монеты	$В_К$ — всего камней $В_М$ — всего монет В — всего монет и камней

Замечание.

Стрелочками на рис. 29–32 показан процесс осмысления задачи.
Затраты времени даны в таблице 9.

Таблица 9

Вид работы	**Затраты времени**
Первое прочтение и рис. 29 Рис. 30 Рис. 31–32 **Проверка** рис. 29–32 — по тексту Окончательная «Графика» (рис. 33)	~ 2 мин ~ 2 мин ~ 9 мин ~ 2 мин ~ 5 мин
Проверка окончательной «Графики» Расстановка действий	~ 2 мин ~ 1 мин
Итого «Графика»:	**~ 23 мин**
«Алгебра» и «Арифметика» **Проверка** «Алгебры» и «Арифметики»	**~ 3–4 мин** ~ 2 мин
Итого:	~ 29 мин

Задача 3

Основным в задаче 3, этом арифметическом монстре в 10 действий, является легкость выявления ее логической структуры средствами ГрафАнализа по сравнению с задачами 1 и 2 в 6 действий каждая. Ясно показано, что **сложность арифметической задачи отнюдь не измеряется количеством действий или слагаемых**. Впрочем, что касается числа слагаемых, мы убедились в вышесказанном уже на задачах цикла VI главы III.

Графическая реализация решения возникает примерно следующим образом. Текст — огромный, поэтому прочитывается весь без попыток как-то реализовать его части по мере прочтения, как это было сделано в задаче 2. Зато легко выделяются в процессе чтения 4 слагаемых в первом абзаце ($\mathbf{Б}_1$, $\mathbf{К}_1$, $\mathbf{З}_1$, **У**), промежуточная сумма **В** (всего предсказаний по барану, кофейной гуще и звездам) и 3 слагаемых во втором абзаце ($\mathbf{Б}_2$, $\mathbf{К}_2$, $\mathbf{З}_2$). Так же легко видно, что обозначения должны быть индексными (1-й и 2-й астрологи). Поэтому уже после первого прочтения мы **сразу** можем реализовать «Графику» всей задачи, состоящую из трех графсхем ГРАС-1, 2, 3. Требуется только не спеша и внимательно во втором прочтении следить за текстом. Никаких проблем не возникает, поскольку логическая структура задачи легко воспринималась при первом прочтении.

Первый абзац текста — рис. 34, второй — рис. 35, третий — рис. 36.

Имена слагаемых

Астролог-1	**Астролог-2**
$\mathbf{Б}_1$ — число предсказаний по барану $\mathbf{К}_1$ — число предсказаний по гуще $\mathbf{З}_1$ — число предсказаний по звезда **У** — число предсказаний по уху	$\mathbf{Б}_2$ — число предсказаний по барану $\mathbf{К}_2$ — число предсказаний по гуще $\mathbf{З}_2$ — число предсказаний по звезда
$\mathbf{В}_1$ — всего предсказаний астролога-1 $\mathbf{В}_2$ — всего предсказаний астролога-2 **В** — промежуточная сумма (всего предсказаний астролога-1 по барану, гуще и звездам)	

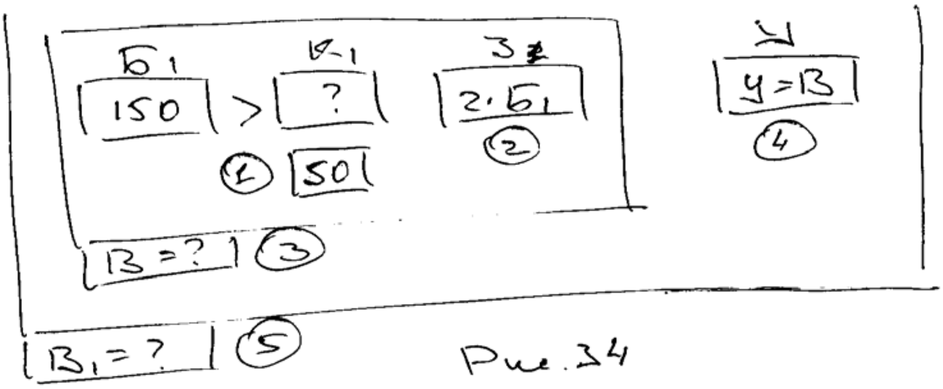


Рис. 34

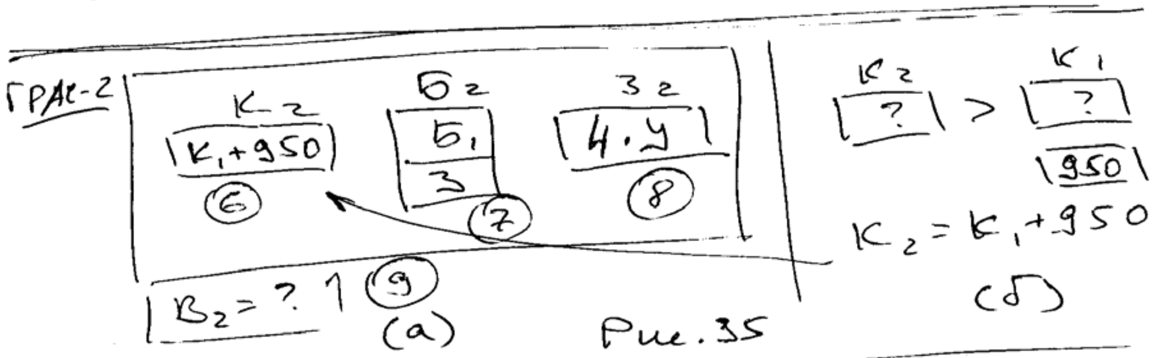


Рис. 35

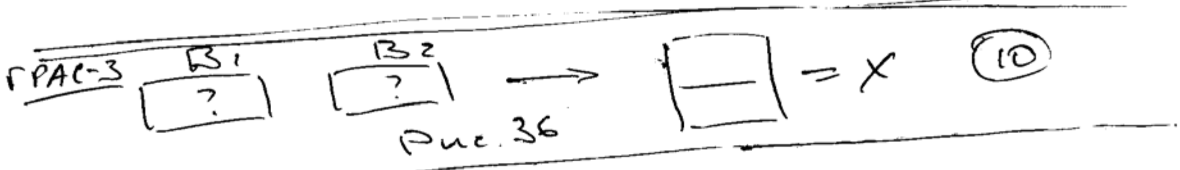


Рис. 36

1) $Б_1 = К_1 + 50$

$К_1 = Б_1 - 50 = 150 - 50 = 100$

2) $З_1 = 2 \cdot Б_1 = 2 \cdot 150 = 300$

3) $В = Б_1 + К_1 + З_1 = 150 + 100 + 300 = 550$

4) $У = В = 550$

5) $В_1 = В + У = 550 + 550 = \boxed{1100}$

6) $К_2 = К_1 + 950 = 100 + 950 = 1050$

7) $Б_2 = Б_1 : 3 = 150 : 3 = 50$

8) $З_2 = 4 \cdot У = 4 \cdot 550 = 2200$

9) $В_2 = К_2 + Б_2 + З_2 = 1050 + 50 + 2200 = \boxed{3300}$

10) $X = В_2 : В_1 = 3300 : 1100 = \boxed{3}$

Осталось добавить несколько пояснений.

Первое касается текста. Вы, читатель (или ребенок), вправе уточнить условие задачи во втором абзаце. В условии есть некоторая неопределенность о предсказаниях по кофейной гуще и барану: что с чем сопоставляется? **$К_2$** с **$К_1$**, **$Б_2$** с **$Б_1$**, т. е. соответствующие предсказания второго и первого астрологов или же все слагаемые астролога-2 **$К_2$**, **$Б_2$**, **$З_2$** сопоставляются со слагаемым **У** астролога-1?

Если речь идет о ребенке, то **скажите** ему, что автор намеренно допустил эту неточность, рассчитывая на то, что его — автора — попросят уточнить условие. Сопоставляются **соответствующие** слагаемые **$К_2$** и **$К_1$**, **$Б_2$** и **$Б_1$** второго и первого астрологов.

Больше никаких пояснений рис. 35 (а) не требует.

Обратите внимание на рис. 35 (б). Во-первых, этот рисунок вспомогательный, а во-вторых, он позволяет записать содержимое слагаемого $\mathbf{К_2}$ сразу в виде формулы, в виде готового действия $К_2 = К_1 + 950$, как это происходит с отношением «Больше В».

Что касается рис. 36, то поскольку мы не знаем заранее, что больше чего: $\mathbf{В_2}$ или $\mathbf{В_1}$ — оставляем «во сколько раз больше» в виде пустотки ГРАЭЛа деления, указывая только безразмерной буквой x на этот логический элемент.

Наконец, о 5-м и 9-м действиях в «Арифметике». Значения $\mathbf{В_1}$ и $\mathbf{В_2}$ — результаты этих действий — необходимы нам для последнего 10-го действия. Они являю**тся значимыми результатами** и расположены далеко друг от друга, поэтому мы выделяем их для себя рамкой.

Затраты времени даны в таблице 10.

Таблица 10

Вид работы	Затраты времени
Первое прочтение (выделены 4 слагаемых в первом абзаце и 3 слагаемых во втором)	~ 2 мин
Рис. 34	~ 3 мин
Рис. 35–36	~ 3 мин
Проверка рис. 34–36 — по тексту	~ 1 мин
Расстановка действий	~ 1 мин
Итого «Графика»:	**~ 10 мин**
«Алгебра» и «Арифметика»	**~ 4 мин**
Проверка «Алгебры» и «Арифметики»	~ 2 мин
Итого:	~ 16 мин

Итак, читатель, на этом базовый ГрафАнализ закончен. То, что будет добавлено в п. «Еще немного о дробях» с точки зрения ГРАН не носит принципиального характера, а является всего лишь средством, облегчающим применение ГрафАнализа в работе с дробными числами.

Еще немного о дробях

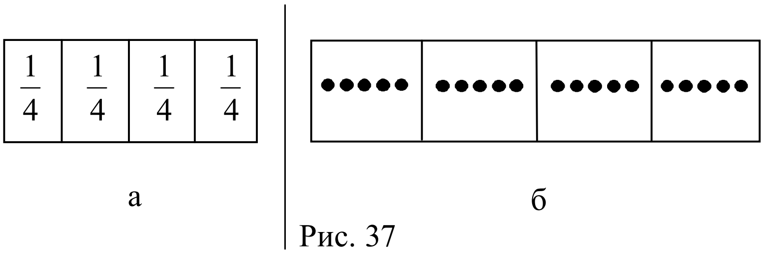
В главе III (п. «Немного о дробях») вы, читатель, познакомились с двумя сторонами дроби: дробь как **безразмерная часть** целого и дробь как **«размерная» величина содержимого части** целого.

В главе III мы поработали с первой стороной дроби, с дробными числами. Теперь займемся второй стороной дроби.

Я предполагаю известными правила умножения и деления **обыкновенных** дробей, изучаемых в 6 классе по учебнику математики Н. Я Виленкина и др. (см. [32]). В учебнике математики 5 класса тех же авторов (см. [33]) для десятичных дробей даются все арифметические действия[13]. Поэтому пользоваться материалом данного пункта можно уже в 5 классе (задачи с десятичными дробями: найти дробь (часть) от числа и число по его части (дроби)).

Задача 1

В ящике было 20 **яблок**. Достали $\frac{1}{4}$ **часть** всех яблок. Сколько **яблок** вынули из ящика? Видим (рис. 37а), ящик разбит на 4 равные части и каждая часть составляет $\frac{1}{4}$ долю ящика.



а б

Рис. 37

Видим (рис. 37б), каждый малый ящик (**каждая одна четвертая**) содержит **5 яблок**. Задача решена: достав $\frac{1}{4}$ часть часть всех яблок, мы, тем самым, вынули из ящика 5 яблок. Арифметически, по смыслу дроби и деления на равные части, задача решается делением: 20 я(блок) **:** 4 = 5 я(блок). Будем отчетливо понимать, что мы нашли содержимое дроби (одной четвертой).

Задача 2

В ящике было 20 **яблок**. Достали $\frac{3}{4}$ **часть** всех яблок. Сколько **яблок** вынули из ящика?

Раз в каждой одной четвертой ящика содержится 5 яблок, то в трех четвертых содержится: 5 я(блок) • 3 = 15 я(блок). И опять мы нашли содержимое дроби.

Однако, арифметически обе задачи решаются умножением дроби на число. Для задачи 2 это выглядит так: $\frac{3}{4} \cdot 20\,я(блок) = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15\,я(блок)$ и при этом получаем содержимое дроби. $\frac{3}{4}$ — безразмерная дробь, число 20 (яблок) — это **В**(сего), «размерное» содержимое целого.

---

[13] Поскольку десятичная дробь частный случай обыкновенной, то я не вижу никаких препятствий для употребления правила умножения обыкновенных дробей в 5 классе при решении задач на нахождение дроби от числа. Кстати, в учебнике Математика-4 И. В. Барановой и З. Г. Борчуговой (см. [24]) в отличие от учебника Математика-5 Н. Я. Виленикина (см. [33]), сначала изучается работа с обыкновенными дробями и только год спустя — с десятичными.

А теперь, читатель, я напишу формулу:

Д • В = СД	Д — дробь (безразмерная величина), В — всего, содержимое целого («размерная» величина), СД — содержимое дроби («размерная» величина).

Формула совершенно прозрачна. Но, несмотря на внешнюю простоту, она крайне облегчает в ГрафАнализе решение задач. Ведь графическая (логическая структура) задач с дробными числами такая же, как с натуральными. А практика показывает, что **основной проблемой**, как раз и является понимание **принципиального различия** между дробью — безразмерной величиной и содержимым дроби — «размерной» величиной. И наша формула, четко разделяя две стороны дроби, позволяет ребенку отчетливо видеть **безразмерную и размерную составляющие дроби, а не просто числа**.

Остается добавить, что поскольку десятичная дробь есть частный случай обыкновенной, например, $0,3=\frac{3}{10}$ и проценты тоже частный случай обыкновенной дроби[14], например, $3\%=\frac{3}{100}$, то при решении задач на нахождение дроби от числа мы не будем испытывать никаких затруднений вне зависимости от того, **в какой форме** дана дробь — обыкновенная, десятичная или в форме процентов. Приведу несколько примеров.

Задача 3 $\otimes_D$ (или $\otimes_{D\%}$ — если дробь дана в форме процентов)

В книге было 60 **страниц**. Прочитали $\frac{3}{10}$ книги (или **0,3** книги, или **30%** книги). Сколько **страниц** прочитано?

Сразу видим, что задача на нахождение дроби от числа, т. к. $\frac{3}{10}=0,3=30\%$ — это дробь, безразмерная часть целого; 60 страниц — это **В**(сего), «размерная» величина. Найти надо **число страниц**, соответствующих дроби $\frac{3}{10}$, т. е. **содержимое** этой дроби, «размерную» величину.

Не раздумывая, пишем формулу Д • В = СД. Нам остается только по тексту выделить, чтó есть **Д**(робь), чтó есть **В**(сего) и чтó есть **СД** (содержимое дроби). Впрочем, я это уже сделал. Подставим в формулу числовые данные и посчитаем.

Прямая задача — дробь от числа $\otimes_D$
$Д \bullet В = СД$
$\frac{3}{10} \bullet 60\,с = СД_С$
или арифметически: $0,3 \bullet 60 = 18\,(с)$

Внимание.

1). Если встречаем проценты — мгновенно превращаем их в десятичную или обыкновенную дробь (как удобнее).

2). «Размерность» поначалу обязательно пишем **с**(траницы), чтобы закрепить четкое различие между **В**(сего) и **СД** (содержимое дроби) как «размерными» величинами, и **Д**(робью) как безразмерной величиной.

3). Формулу пишем обязательно и прямо под нею подписываем числовые данные.

[14] По определению $1\%=\frac{1}{100}=0,01$.

Наша формула позволяет легко проанализировать (тем самым и решить) и обратную задачу — найти число по дроби.

Задача 4 [$\otimes_D \to (:)_P$] (или [$\otimes_{D\%} \to (:)_P$] — если дробь дана в форме процентов)

Прочитано 18 **страниц**, что составляет **0,3** (или $\frac{3}{10}$, или 30%) всей книги. Сколько **страниц** в книге?

По-прежнему, я выделяю в тексте безразмерную дробь и «размерные» величины. Так как, исходя из формулы, мы знаем, чтó именно должны выявить, то легко видим: Д = 0,3; СД = 18 с.; $\mathbf{В_С}$ = ? Остается подставить числовые данные и решить второе простейшее уравнение (группа умножения-деления).

Обратная задача — число по дроби [$\otimes_D \to (:)_P$]
$Д \bullet В = СД$
$0{,}3 \bullet В_С = 18\,с$
так как В - неизвестный множитель, то действие деления
$В = \frac{18}{0{,}3} = 60\,(с)$
или арифметически: $\frac{18}{0{,}3} = 60\,(с)$

Приведу по три задачи из учебника Математика-5 И. В. Барановой и З. Г. Борчуговой (см. [34]). Индекс у номера задачи — это номер страницы.

Прямая задача — дробь от числа (иначе — дробь от ВСЕГО) $\otimes_{D\%}$

438_{89} В школе 500 учащихся. Учащиеся пятых классов составляют 18% всех учеников школы. Сколько учащихся пятых классов?

Обозначения: $В_У$ = 500; Д = 0,18; СД = ? Ответ: СД = 90 у.

440_{89} Завод должен изготовить в месяц по плану 250 приборов. Он выполнил план на 110%. Сколько приборов изготовил завод за месяц?

Обозначения: $В_П$ = 250; Д = 1,1; СД = ? Ответ: СД = 275 п.

443_{89} Из молока получается 25% сливок. Сколько сливок получится из 284 л?

Обозначения: Д = 0,25; СД = ?; $В_Л$ = 284. Ответ: СД = 71 л.

Обратная задача — число по дроби (иначе — ВСЕГО по дроби) [$Д_{D\%} \to (:)_P$]

464_{92} Масса сушеной малины составляет 15% массы свежей малины. Сколько взяли свежей малины, если получили 3 кг сухой?

Обозначения: Д = 0,15; $В_{КГ}$ = ?; СД = 3 кг. Ответ: В = 20 кг.

467_{92} Сберегательная касса начисляет 2% годовых. Вкладчику в конце года начислено 17 р. Какова сумма вклада?

Обозначения: Д = 0,02; СД = 17 руб.; $В_{РУБ}$ = ?. Ответ: В = 850 р.

468_{92} Токарь выполнил план на 110%, сделав 132 детали. Сколько деталей токарь должен был сделать?

Обозначения: Д = 1,1; СД = 132 д.; $В_Д$ = ? Ответ: В = 120 д.

Обратите внимание.

1). Дробь **не обязательно меньше** единицы, она может быть и больше единицы (задачи 440 и 468). Главное, мы должны четко понимать, чтó именно есть **В**(сего)? В задаче 440 за фразой «… должен изготовить… по плану» — звучит «должен **ВСЕГО** изготовить». Значит, 250 приборов — это **В**(сего). В задаче 468 за фразой «… выполнил план на 110%, сделав 132 детали» — звучит «**132 детали — это 110%**, т. е. 132 детали — это **СД** (содержимое дроби).

2). В обратной задаче нужно научить ребенка четко сопоставлять **Д**(робь) и **СД** (содержимое дроби) так, как я только что сделал. Задача 464: 15% — это 3 кг сушеной (это выражено в тексте словами о том, что масса сушеной малины — 15% (т.е. дробь). 3 кг — сухая малина).

3). Задача 467: 2% — это 17 р. (из текста выделяется словами: начисляет 2%... начислено 17 р.).

В 6 классе прямая задача будет использоваться как элемент более сложных задач, что я сейчас и покажу на серии задач из Математики-6 Н. Я Виленкина (см. [32]). Как обычно, индекс у номера задачи указывает страницу учебника.

Задача 475$_{76}$ $\otimes_{D}$(••)

Площадь одной комнаты 21 м^2, а площадь второй комнаты составляет $\frac{3}{7}$ площади первой комнаты. Найдите площадь двух комнат. (рис. 38).

Графика **Алгебра** **Арифметика**

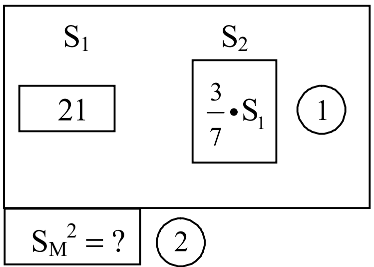


Рис. 38

1). $S_2 = \frac{3}{7} \cdot S_1 = \frac{3}{7} \cdot 21 = 9$

2). $S = S_1 + S_2 = 21 + 9 = 30$ (м^2)

Задача 476$_{76}$ $\otimes_{D}$□

У брата и сестры 90 марок. Сколько марок у сестры, если у брата 0,3 всех марок? (рис. 39).

Графика **Алгебра** **Арифметика**

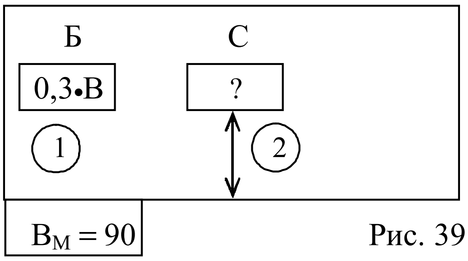


Рис. 39

1). Б = 0,3•В = 0,3 • 90 = 30

2). В = Б + С

С = В – Б = 90 – 30 = 60 (м)

Задача 479$_{76}$ $\otimes_{D\%}$□

Построено 75% газопровода, длина которого будет 102,8 км. Сколько километров газопровода осталось построить?

Задача той же логической структуры, что и задача 476, только дробь дана в форме процентов. Переводим проценты в дробь 75% = 0,75.

Обозначения: П = 0,75•В; $В_{КМ}$ = 102,8.; $О_{КМ}$ = ?. Ответ: О = 25,7 км.

Задача 514_{81} $[\otimes_D\otimes_D](\bullet\bullet)\square$

За три дня на элеватор доставили 651 т зерна. В первый день было доставлено $\frac{10}{31}$ всего зерна, во второй 0,9 того, что было доставлено в первый день. Сколько тонн зерна доставлено на элеватор в третий день? (рис. 40).

Графика **Алгебра** **Арифметика**

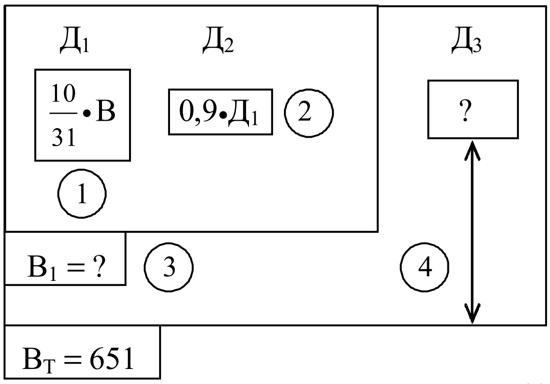


Рис. 40

1). $Д_1 = \frac{10}{31} \bullet В = \frac{10}{31} \bullet 651 = 10 \bullet 21 = 210$

2). $Д_2 = 0{,}9 \bullet Д_1 = 0{,}9 \bullet 210 = 189$

3). $В_1 = Д_1 + Д_2 = 210 + 189 = 399$

4). $В = В_1 + Д_3$

$Д_3 = В - В_1 = 651 - 399 = 252$ (т)

Задача 516_{81} $[\otimes_{D\%}\otimes_{D\%}](\bullet\bullet)\square$

Первая бригада прополола 30% всей площади, занятой свеклой, вторая бригада прополола 80% того, что прополола первая бригада. Остальную площадь прополола третья бригада. Сколько процентов всей площади прополола третья бригада?

Задача той же логической структуры, что и задача 514, только дробь дана в форме процентов. Переводим проценты в дробь 30% = 0,3, 80% = 0,8.

Обозначения: $Б_1 = 0{,}3 \bullet В$; $Б_2 = 0{,}8 \cdot Б_1$; В = 100%. Ответ: О = 46%.

Примечание.

Поскольку речь идет о процентах, то **В**(сего) три бригады пропололи всю площадь или **100%**.

Задача $699(1)_{108}$ $[\otimes_{D\%}(*)](\bullet\bullet)\square$

В книге 240 страниц. В субботу мальчик прочитал 7,5% всей книги, а в воскресенье — на 12 страниц больше. Сколько страниц книги ему осталось прочитать? (Рис. 41).

Графика **Алгебра** **Арифметика**

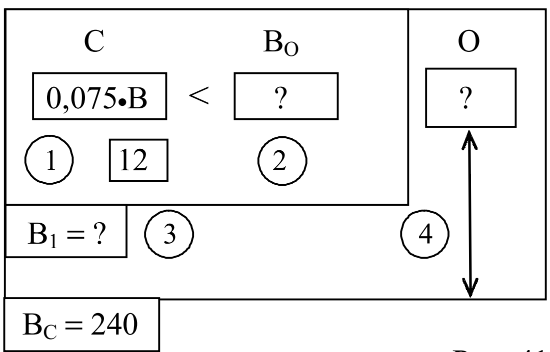


Рис. 41

1). $С = 0{,}075 \bullet В = 0{,}075 \bullet 240 = 18$

2). $В_О = С + 12 = 18 + 12 = 30$

3). $В_1 = С + В_О = 18 + 30 = 48$

4). $В = В_1 + О$

$О = В - В_1 = 240 - 48 = 192$ (с)

Для последних трех задач (514, 516, 699(1)) была использована часть «Графики» задачи 1, цикла IV, главы III.

Еще немного об уравнениях

В главе III, п. «Немного об уравнениях», мы с вами рассмотрели первую группу простейших уравнений — группу сложения-вычитания, опираясь на определение действия вычитания.

Сейчас мы разберемся со второй группой простейших уравнений — группой умножения-деления, опираясь на определение действия деления[15].

В п. «Немного о делении» действие деления было определено как нахождение **неизвестного множителя**. Тем самым было введено основное (или второе основное) уравнение второй группы $x \bullet 6 = 30$ и его решение $x = 30 : 6$. Вторая группа, как и первая, тоже состоит из трех уравнений (1)–(3). Я покажу их решения на конкретных числовых примерах.

Уравнение	**Решение уравнения**
(1) $\mathbf{x \bullet 6 = 30}$	$\mathbf{x = 30 : 6}$ **(1′)** или $x = \frac{30}{6}$
(2) $\mathbf{x : 2 = 3}$ или $\frac{x}{2} = 3$	$\mathbf{x = 3 \bullet 2}$ **(2′)**
(3) $\mathbf{20 : x = 4}$ или $\frac{20}{x} = 4$	$\mathbf{x = 20 : 4}$ **(3′)** или $x = \frac{20}{4}$

Уравнение (1), решаемое по определению деления мы уже разобрали в п. «Немного о делении». **Стрелочкой, направленной вниз**, показано куда уходит известный множитель (в знаменатель). Эта графическая мнемоника решения особенно действенна, когда мы записываем деление в виде дроби.

Сравнивая уравнение (2) с решением (1′) уравнения (1), видим, что x — **неизвестное произведение** (делимое) — вспомните терминологию п. «Немного о делении», — а значит числа 2 и 3 — **известные множители**. Отсюда получаем решение (2′). **Стрелочка, направленная вверх**, показывает, куда уходит известный множитель (в числитель).

В уравнении (3), сравнивая с уравнениями (1) и (2), видим: 20 (что́ делим) — **известное произведение** (делимое), x — **неизвестный множитель** (делитель) и 4 — **известный множитель** (частное). Следовательно, решение (3′) получаем действием деления. **Стрелочки показывают, как меняются местами известный и неизвестный множители**.

Более подробно решение (3′) получим, рассматривая следующую цепочку преобразований:

(3) $\frac{20}{x} = 4 \longrightarrow \mathbf{20 = 4 \bullet x} \longrightarrow x = \frac{20}{4}$ **(3′)**

Неизвестный множитель

[15] Прежде чем читать далее, я рекомендую вам, читатель, вернуться к главе III и еще раз прочитать п. «Немного об уравнениях», поскольку в своем изложении буду опираться на ваше понимание первой группы простейших уравнений.

Внимание.

Как и с уравнениями первой группы, вы «впечатываете» в память ребенка решения всех трех уравнений второй группы. При затруднениях просите его показать стрелочкой (нарисовать, как у меня) куда что идет.

В таблице 11 дана небольшая подборка уравнений второй группы.

Таблица 11

Уравнение (1)	Уравнение (2)	Уравнение (3)
$2 \bullet x = 4$	$x : 3 = 6$	$10 : x = 2$
$5 \bullet y = 15$	$\frac{y}{3} = 4$	$\frac{15}{y} = 3$
$3 \bullet z = 2$	$\frac{z}{5} = 10$	$\frac{5}{z} = 3$

В таблице 12 даны решения этих уравнений.

Таблица 12

Решение уравнения (1)	Решение уравнения (2)	Решение уравнения (3)
$x = 4 : 2 = 2$	$x = 6 \bullet 3 = 18$	$x = 10 : 2 = 5$
$y = \frac{15}{5} = 3$	$y = 4 \bullet 3 = 12$	$y = \frac{15}{3} = 5$
$z = \frac{2}{3}$	$z = 10 \bullet 5 = 50$	$z = \frac{5}{3}$

Обратите внимание на дробные значения решений ($z = \frac{2}{5}$ и $z = \frac{5}{3}$). Как ни странно, но обычно ребенок недоуменно спрашивает: «Как это? Ведь 2 на 3 не делится.», — пока не напомнишь ему, что дробь — это еще и действие деления.

При необходимости, читатель, вы с легкостью увеличите число простейших уравнений, памятуя о том, что крайне важно (после правильно записанного решения) следить за правильностью счета.

Однако, в отличие от главы III, сейчас (освоив решения) важнейшим для нас будет **совместное применение** методов решения уравнений первой и второй групп.

Я подробно покажу один пример. Остальные уравнения будут даны в табличной форме.

Уравнение: $2 \bullet x + 1 = 4$. Вы, читатель, **пишете** вспомогательное уравнение $\mathbf{A} + 1 = 4$ и **спрашиваете** ребенка: « Знаем, как решать это уравнение? Ну разумеется: $\mathbf{A} = 4 - 1$, т. е. $\mathbf{A} = 3$. В алгебре мы одной буквой можем обозначить все, что угодно. Мы с тобой обозначили буквой **А** выражение $2 \bullet x$. Подставим в решение вместо буквы **А** ее значение и получим $2 \bullet x = 4 - 1$ или $2 \bullet x = 3$. А теперь смотри, что получилось? — уравнение (1) группы умножение-деление, которое мы уже прекрасно умеем решать: $x = \frac{3}{2}$ ».

Примерно так же поступаете с остальными уравнениями — принцип ясен.

В таблице 13 дана подборка уравнений и их решения на совместное применение методов решения уравнений первой и второй групп.

Таблица 13

Уравнения, сводящееся к типу (1) $a \bullet x = b$	Решения уравнений $x = \frac{b}{a}$
$5 \bullet x + 3 = 5$	$5 \bullet x = 5 - 3 \to 5 \bullet x = 2 \to x = \frac{2}{5}$
$3x - 4 = 1$	$3x = 1 + 4 \to 3x = 5 \to x = \frac{5}{3}$
$4y - 10 = 2$	$4y = 2 + 10 \to 4y = 12 \to y = \frac{12}{4} = 3$
$4 - 2x = 3$	$2x = 4 - 3 \to 2x = 1 \to x = \frac{1}{2}$
$10 - 4y = 1$	$4y = 10 - 1 \to 4y = 9 \to y = \frac{9}{4}$
Уравнения, сводящееся к типу (2) $\frac{x}{a} = b$	**Решения уравнений** $x = b \bullet a$
$x : 3 = 6$	$x = 6 \bullet 3 \to x = 18$
$2y : 3 = 12$	$2y = 12 \bullet 3 \to 2y = 36 \to y = 36 : 2 \to y = 18$
$5z : 10 = 3$	$5z = 30 \to z = 6$
$\frac{4x}{8} = 2$	$4x = 16 \to x = 4$
$\frac{7y}{2} = 14$	$7y = 28 \to y = 4$
$(2x - 4) : 4 = 6$	$2x - 4 = 24 \to 2x = 28 \to x = 14$
$\frac{5y - 12}{2} = 19$	$5y - 12 = 38 \to 5y = 50 \to y = 10$
$(7 - x) : 2 = 3$	$7 - x = 6 \to x = 7 - 6 \to x = 1$
$\frac{14 - 2y}{4} = 2$	$14 - 2y = 8 \to 2y = 14 - 8 \to 2y = 6 \to y = 3$
Уравнения, сводящееся к типу (3) $\frac{a}{x} = b$	**Решения уравнений** $x = \frac{a}{b}$
$35 : x = 7$	$x = 35 : 7 \to x = 5$
$30 : 2y = 5$	$2y = 30 : 5 \to 2y = 6 \to y = 3$
$\frac{60}{3z} = 20$	$3z = \frac{60}{20} \to 3z = 3 \to z = 1$
$20 : (x + 3) = 4$	$x + 3 = 20 : 4 \to x + 3 = 5 \to x = 5 - 3 \to x = 2$

$\frac{90}{5x}=9$	$5x=10 \to x=2$
$\frac{30}{2y-1}=5$	$2y-1=6 \to 2y=7 \to y=\frac{7}{2}$
$\frac{60}{3z+6}=2$	$3z+6=30 \to 3z=24 \to z=8$
$\frac{20}{5-x}=4$	$5-x=5 \to x=5-5 \to x=0$
$\frac{10}{3-2x}=5$	$3-2x=2 \to 2x=1 \to x=\frac{1}{2}$

Внимание.

1). Так же, как и уравнения первой группы, должны прорешиваться **все** уравнения второй группы из таблицы 13 («набить руку» до автоматизма).

2). Вы видите, читатель, что, дав несколько уравнений с подробнейшей росписью решений, я далее (после двойной черты) некоторые этапы пропускаю и провожу вычисления в уме. Вот здесь мы не только можем, **но и должны** так поступать, поскольку **числа очень простые** и мы можем удержать вычисления в уме. Но кроме того умение проводить вычисления в уме (**в нужных местах!**) — свидетельство хорошей техники. Поверьте, когда в старших классах преподаватель видит необоснованную (то есть, нет дробей и многозначных чисел) подробнейшую роспись решения, то ничего, кроме раздражения, это не вызывает.

3). Все время **старайтесь приучать ребенка кончиком пера показывать, что куда идет**, т. е. переносы слагаемых в другую часть равенства — **это напоминание** о смене знаков; множители — вверх или вниз (в числитель или знаменатель дробей) — **это напоминание** о методе решения соответствующего уравнения: чтó на чтó делится или умножается. Движение кончиком ручки заменяет рисование стрелочек **и крайне способствует безошибочной записи решений**.

О размерностях, физическом смысле величин и делении на равные части

Физическое понимание — это нечто неточное, неопределенное и абсолютно нематематическое, но для физика оно совершенно необходимо.

Р. Фейнман

О размерностях

Пришла пора, читатель, ближе познакомиться с понятием «размерность». Но теперь этот термин будет употребляться без кавычек.

Физические величины отражают реальные физические явления. Мы вводим их не произвольным образом, а в силу того, что они являются выражением характерных свойств явлений и объективных связей между явлениями, выраженных в физических законах.

Скорость — характерное свойство движения, реально существующего явления большей или меньшей «быстроты» движения. Плотность — характерное свойство вещества, большей или меньшей массы различных веществ равного объема. Напряженность электрического поля — характерное свойство поля с большей или меньшей силой действовать на один и тот же заряд в разных точках пространства или же на разные заряды в одной и той же точке. Необходимость ввода магнитной индукции — силовой характеристики магнитного поля — возникает на основе закона Ампера, в который магнитная индукция входит как множитель, характеризующий поле. И т. д. и т. п.

Но говорить о величинах — значит говорить о численных значениях величин, поскольку в математической форме, в конечном счете, мы работаем с числами (численными значениями величин) и единицами измерения величин.

Численные же значения получаются при измерениях. Когда мы говорим: три килограмма или полтора метра, то тем самым говорим, что **сравниваем** массу купленных яблок или длину стола **с однородными** величинами, **условно принятыми за единицу** — с массой эталонной гири в 1 кг и с длиной эталонной линейки в 1 м.

Следовательно, измерить физическую величину — значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу. Сравнить — сказать, во сколько раз больше (меньше) данная величина своей единицы, т. е. определить тем самым **отношение** (в смысле деления по содержанию) величины к единице величины. Иначе — сказать сколько раз единица и ее доли содержатся в измеряемой величине.

Вот здесь-то и возникает проблема единиц измерения величин.

«… в редакции проекта государственного стандарта «Единицы физических величин» 1973 г. приведены свыше 100 производных единиц Международной системы» [35, с. 15].

Что же получается? Если каждая физическая величина требует своей собственной единицы измерения, то нам нужно более 100 эталонов этих единиц?! А список величин имеет тенденцию только к росту.

Поступают иначе.

Выбирают независимо несколько величин, называемых **основными** (в Международной системе единиц СИ их семь: единицы длины, массы, времени, электрического тока, термодинамической температуры, силы света и количества вещества — соответственно: метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, кандела и моль[16]), а единицы остальных величин, называемых **производными**, устанавливают, используя физические закономерности, связываю-

[16] «Моль — расчетная единица и эталона для его воспроизведения не существует» [34, с. 74].

щие производные единицы с основными. Иначе говорят, что производные единицы образуются с помощью простейших уравнений связи (определяющих уравнений).

Чтобы построить, например, производную единицу скорости, берут в качестве уравнения связи определение скорости для равномерного движения $V = \frac{S}{t}$ (V — скорость, S — длина пройденного пути, t — время) и подставляют единицы основных величин 1 м и 1 с. Тогда видно, что **за единицу скорости** принимается **скорость** такого движения, при котором за одну секунду проходится путь, равный одному метру. Это словесное определение единицы скорости.

Теперь об обозначениях.

«Для этой единицы применяется **обозначение** $1\frac{\text{см}}{\text{сек}}$. **Символ** см/сек называется ***размерностью*** скорости **при основных единицах** — сантиметре для длины и секунде для времени. **Размерность скорости** записывается так: $[v] = \frac{\text{см}}{\text{сек}}$» (все выделено мной. — В. Х. [35, с. 26])[17].

В цитированном выше отрывке используется система СГС (CGS), основными единицами которой являются сантиметр (см), грамм (г), секунда (с)). В наших единицах будет $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ($\frac{1\text{м}}{1\text{с}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$).

Аналогично единицу ускорения из определения ускорения $a = \frac{\Delta V}{t}$ (a — ускорение, ΔV — изменение скорости, t — время) получаем, подставляя $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ — единицу скорости и 1 с — единицу времени в определяющее уравнение. Получим $\frac{1\frac{\text{м}}{\text{с}}}{1\,\text{с}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. То есть **за единицу ускорения** берется **ускорение**, при котором за одну секунду скорость изменяется на $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$. («Для этой единицы ускорения применяется **обозначение** $1\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$. **Символ** $\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$ представляет собой **размерность ускорения**» (все выделено мной. — В. Х. [36, с. 27]))

Еще пример. Из второго закона Ньютона $F = ma$ (F — сила, m — масса, a — ускорение), подставляя 1 кг — единицу массы, $1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — единицу ускорения, получаем единицу силы $1\text{кг}\bullet 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1\frac{\text{кг}\bullet\text{м}}{\text{с}^2}$, которая называется *ньютон*.

Словесно: **за единицу силы** берется **сила**, сообщающая массе в 1 кг ускорение в $1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Размерность силы $[F] = \frac{\text{кг}\bullet\text{м}}{\text{с}^2}$.

«Так как всякая величина X может быть представлена как произведение ее числового значения (X) на единицу $[X]$, то $X = (X)[X]$» [34, с. 16]. Эта простая зависимость позволяет нам работать отдельно с численными значениями величин и отдельно — с единицами величин, с размерностями величин. Например, для второго закона Ньютона $F = ma$ пусть $m = 5$ кг $= (5)\bullet[1$ кг$]$ и $a = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = (10)\bullet[1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}]$. Тогда $F = (5)\bullet[1\text{ кг}]\bullet(10)\bullet[1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}] = (5\bullet 10)\bullet[1\text{ кг}\bullet 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}] =$ $= (50)\bullet[1\frac{\text{кг}\bullet\text{м}}{\text{с}^2}] = 50$ Н.

[17] При рассмотрении единиц ускорения и силы и размерности ускорения и силы, я следую стилю изложения §8 «Размерность физических величин» из уже цитированного «Курса общей физики» Л. Д. Ландау, А. И. Ахиезера и Е. М. Лифшица (см. [36, с. 26–27]).

Или отдельно для размерности силы $[F]=[m][a]=\text{кг}\bullet\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\frac{\text{кг}\bullet\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н}.$

Точное определение размерности: «Размерностью называют символическое (буквенное) обозначение зависимости производных величин (единиц) от основных [35, с. 16].

Итак, понятие размерности появляется в физике по той причине, что та или иная система единиц физических величин строится по принципу: несколько независимых основных, а все остальные — производные. Это дает нам возможность вводить единицы производных величин через единицы основных. Это же дает нам возможность переводить единицы одной системы в другую. «Перевод единиц одной системы в другую производится довольно просто на основе размерностей единиц. Например, размерность ньютона $\text{кг}\bullet\text{м}/\text{с}^2$, а размерность дины г•см/с^2; так как в килограмме 10^3 г и в метре 10^2 см, то 1 Н = 10^5 дин» [37, с. 51].

А теперь — важный и довольно тонкий момент.

В своей превосходной книге «Единицы физических величин и их размерности» Л. А. Сена пишет: «… с самого начала считаю нужным подчеркнуть, что слово «размерности» **следует связывать только со словом «единицы», а не со словом «величины»**. Как мне кажется, в книге достаточно убедительно показано, что понятие «размерность физической величины» лишено всякого смысла и может применяться только как разговорное сокращение понятия «размерность единицы данной физической величины в рамках данной системы единиц». Хотя в книге для краткости повсеместно применяется это разговорное сокращение (**учитывая, кроме краткости, его широкое распространение**), его истинный смысл необходимо иметь в виду» (все выделено мной. — В. Х. [38, с. 6]).

Приведу часть таблицы «Международная система физических единиц СИ» из книги известного физика академика Я. Б. Зельдовича и математика доктора физ.- мат. наук И. М Яглома «Высшая математика для начинающих физиков и техников» [39, с. 480]. Книгу в 500 страниц формата А4 никак нельзя отнести к разряду так называемых популярных. Это именно введение в математический анализ вплоть до степенных и тригонометрических рядов, и далее до дельта-функции Дирака и некоторых приложений функции комплексного переменного. Здесь же затрагиваются — и широко! — ряд разделов и тем из физики, и отнюдь не на школьном уровне.

Международная система физических единиц СИ			
Величина		Единица СИ	
наименование	размерность	наименование	обозначение
	Основные единицы		
Длина	м	метр	м
Масса	кг	килограмм	кг
Время	с	секунда	с
	Производные единицы		
Скорость	м/с	метр в секунду	м/с
Ускорение	м/с^2	метр на секунду в квадрате	м/с^2
Сила	кг•м/с^2	ньютон	Н
Давление	Н/м^2 (= кг/(м•с^2))	паскаль	Па
Работа, энергия, количество теплоты	Н•м (= кг•м^2/с^2)	джоуль	Дж
Мощность	Дж/с (= кг•м^2/с^2)	ватт	Вт

Л. А. Сена говорит, что размерность надо относить к единицам, а не к величинам. Более того, понятие размерности вообще связывается прежде с тем, как меняется единица величины при изменении основных величин: «Соотношение, показывающее, как изменяется единица измерения величины при изменении основных единиц, называется размерностью этой величины» [40, с. 57].

Посмотрите на таблицу.

При взгляде на размерности единиц, **первое, на чем фиксируется внимание — это не перевод единиц** из одной системы в другую (метры — в сантиметры, джоули в эрги и т. п.) — **его тут и нет, а то, <u>в каких единицах работаем</u>**. Например, для производных единиц: давление — Н/м^2, мощность — Дж/с.

С одной стороны, например, Дж/с — **это символ**, обозначение единицы измерения мощности. С другой — отражение уравнения связи, определения мощности $N=\frac{A}{t}$, а значит и возможность перевода единиц $\frac{\text{Дж}}{\text{с}}=10^7\,\frac{\text{эрг}}{\text{с}}$ (т. к. 1 Дж = 10^7 эрг).

Но размерность, полученную непосредственно из определяющего уравнения, можно выразить и через основные единицы: $\frac{\text{Дж}}{\text{с}}=\frac{\text{н•м}}{\text{с}}=\frac{\text{кг•м}}{\text{с}^2}•\frac{\text{м}}{\text{с}}=\frac{\text{кг•м}^2}{\text{с}^3}$. Или для единиц:

$$1\text{Вт}=1\frac{\text{Дж}}{\text{с}}=1\frac{\text{кг•м}^2}{\text{с}^3}=1\frac{10^3\text{г•}(10^2\,\text{см})^2}{\text{с}^3}=10^7\,\frac{\text{г•см}^2}{\text{с}^3}=10^7\,\frac{\text{эрг}}{\text{с}}.$$

Итак, поскольку размерность единиц воспринимается прежде всего как то, в каких единицах работаем, то мы и говорим: размерность скорости, размерность давления и т. п., тотчас, однако, уточняя (если требуется считать): скорость **измеряется** в метрах в секунду, давление **выражается** в ньютонах на метр в квадрате и т. п.

При изучении физики настолько сживаешься с тем, что заряд измеряется в кулонах, сила — в ньютонах, скорость — в метрах в секунду, что такие понятия как «величина», «численное значение величины», «размерность единицы измерения» становятся едва ли не тождественны, и все вместе **становится единым**, неуловимо перетекающим одно в другое, **целым**. Это явление того же порядка, о котором Н. Н. Лузин говорит: «В результате функция и кривая оказываются так тесно связанными друг с другом, что не приходится удивляться тому, что математик, естественник и статистик **отождествляют** в уме эти два понятия и, говоря о функциональной зависимости, своим воображением **видят** соответствующую кривую» (все выделено мной. — В. Х. [21, с. 45]).

Работаем мы всегда, в конечном счете, с числами, с численными значениями величин. Не можем же мы, в самом деле, делить метры на секунды или килограммы на кубические метры. — Все равно, что тракторы разделить на яблоки.

Можно поделить **число** тракторов **на число** яблок, **число** килограммов **на число** кубических метров.

Но **если первое** деление **совершенно бессодержательно** (ну что нам дает результат 6 : 2 = 3, где 6 — число тракторов, 2 — число яблок!), **то за вторым стоит одна из важных физических величин** — плотность.

И прежде всего потому **содержательно** второе деление, что понятие плотности **отражает реальное физическое явление**, характерное свойство различных веществ быть тяжелее или легче при равных объемах.

А во-вторых, — и именно в силу реальности явления! — за этим стоит физика, как наука построенная на измерениях, которые порождают **необходимость измерения величин**, а следовательно, и **построения систем измерения величин**.

Вернемся к тракторам и яблокам (книга все-таки посвящена арифметике). Нельзя поделить 6 тракторов на 2 яблока — глупо, бессмысленно. А вот 6 тракторов распределить на 2 бригады мы можем. Получим содержимое единицы делителя — 3 трактора на каждую бригаду.

В физике, как я уже говорил, мы ведь не по произволу связываем те или иные величины, вводя их определения или используя физические законы. Определения физических величин отражают **характерные свойства** движения, вещества, поля.

Посмотрите на подборку определений физических величин (ниже), а именно **Л-1$_{18}$**: «При обозначении плотности обычно указывают, сколько граммов (г) весит кубический сантиметр (см^3) тела, — после числа ставят **символ** г/см^3. Для определения плотности **число** граммов надо разделить **на число** кубических сантиметров; дробная черта в символе напоминает об этом» (все выделено мной. — В. Х. [41, с. 18]).

Взглянув на таблицу единиц, мы можем, таким образом, сказать, что **число** метров надо разделить **на число** секунд и получим скорость. Для определения давления — размерность Н/м^2 — **численное** значение силы надо поделить **на численное** значение площади. Для работы — **численное** значение силы в ньютонах надо умножить **на число** метров. **Но тут же мы должны указать наименование единицы измерения величины, ее размерность**. В противном случае, численное значение **величины** станет просто **бессодержательным числом**.

Разумеется, употребляемый мною термин «размерность» (в кавычках) никоим образом не связан с переводом единиц измерения из одной системы в другую. Мы с вами работаем с именованными числами. Но посмотрите чуть ниже, читатель, на то, что пишет С. Э. Фриш: «… складывать, вычитать и связывать знаком равенства можно только величины одной размерности». А начинается понимание этого с арифметики, К тому же, при изучении физики очень важно понимание «физического» смысла деления на равные части. Вот почему мне и понадобился в этой книге термин «размерность», хоть и в кавычках.

Ведь содержательность (и, главное, понимание этой содержательности) арифметической задачи в чем-то очень родственна понятиям: «закономерность», «характерное свойство».

Напоследок, раз уж мы говорим о размерностях[18], приведу выдержку из «Курса общей физики» С. Э Фриша: «Знание размерности физических величин существенно не только потому, что оно позволяет легко подсчитать, как меняется единица измерения данной физической величины при изменении единиц измерения основных величин, но и потому, что сравнение размерности величин позволяет контролировать правильность расчетов. Этот контроль основан прежде всего на следующем очевидном положении: *складывать, вычитать и связывать знаком равенства можно только величины одной размерности*.

В самом деле, нельзя складывать, например, массу с какой-либо длиной или утверждать, что площадь некоторой фигуры может равняться длине какого-либо отрезка и т. д.» [42, с. 100].

---

[18] Если выбрать систему единиц типа *LMT*, т. е. систему, в которой основными величинами являются длина, масса и время (через *L*, *M*, *T* обозначены обобщенные единицы этих величин без указания конкретного размера единиц), то «При данном выборе основных физических величин возможен различный выбор единиц их измерения, и, таким образом, возникает вопрос, как зависят производные единицы от единиц основных величин… Если производная единица *A* меняется пропорционально *p*-й степени единицы длины *L*, *q*-й степени единицы массы *M* и *r*-й степени единицы времени *T*, то говорят, что единица *A* имеет размерность *p* относительно единицы длины, размерность *q* — относительно единицы массы и размерность *r* — относительно единицы длины времени. Такую зависимость единицы *A* от единиц основных величин выражают символической формулой (формулой размерности) $[A] = L^pM^qT^r$ [42, с. 99]. Подробнее смотри [35, с. 16] и [38, § 2.1 «Формулы размерности»].

О физическом смысле величин

А теперь, читатель, посмотрим на то, какую роль играет деление на равные части в физике, в понимании смысла определений физических величин.

Ниже я привожу относительно небольшую подборку определений величин из разных книг по физике. В основном, это относится к определениям скорости — $V = \frac{S}{t}$, плотности — $\rho = \frac{m}{V}$, мощности — $N = \frac{A}{t}$, напряженности электрического поля — $E = \frac{F}{q}$. Формулы и обозначения величин, участвующих в них, я полагаю общеизвестными (при необходимости, их легко найти в школьных учебниках или справочниках). Все существенное в цитируемом, выделено жирным шрифтом мною. Ссылки на источник — очевидны. Например, **Л-2**$_{72}$ означает: страница 72, книга 2, «Физика для всех» Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского.

В качестве примера **построения определения** физической величины разными авторами, возьмем определение напряженности электрического поля $E = \frac{F}{q}$, где E — напряженность, F — сила и q — заряд. Последовательность определений, которую мы сейчас рассмотрим, я назвал последовательностью «сверху-вниз» — от точного математического определения до его интерпретации на основе деления на равные части, т. е. до такого определения, который можно назвать физическим смыслом величины.

1. Отношение силы к заряду $E = \frac{F}{q}$ (ЛГ-2$_{44}$).

2. Отношение $E = \frac{F}{q}$ уже **не зависит** от q (Т$_{25}$, К-3$_{16}$).

3. E **численно равна** силе F, действующей **на единицу** заряда q (ЛГ-2$_{44}$, КШ$_{115}$).

4. E **измеряется** силой F, действующей **на единичный** заряд q (Ж$_{33}$, С$_{162}$).

5. E — **определяется как сила** F, действующая **на единичный** заряд q (Р$_{414}$).

Посмотрите, читатель, как плавно перетекает определение напряженности от ключевого слова «**отношение**» — **как частное двух величин**, к делению на равные части — **как содержимому единицы делителя** (напряженность — как сила, действующая на единичный заряд).

И вот здесь, мне кажется, и таится самый корень трудностей с восприятием физики.

В 6-м классе понятие «отношение» вводится как деление по содержанию в форме «во сколько раз больше?». Частное, являющееся результатом деления, и называют отношением. Но деление по содержанию относится к однородным величинам, в то время как уже в самой формуле $E = \frac{F}{q}$ мы видим, что F и q — величины разной размерности. Сила F измеряется в ньютонах и ее размерность [Н], а заряд q — в кулонах, его размерность [Кл]. Отсюда размерность напряженности $[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Доктор педагогических наук Л. М. Фридман пишет: «Рассмотрим сначала случай, когда в характеристике какого-то явления участвуют две совершенно независимых друг от друга скалярно-аддитивных предметных величин, например, стоимость и масса, путь и время и т. д. Оказывается, что во всех этих случаях **это же явление характеризуется и третьей величиной** — производной от первых двух — **величиной их отношения**. Так, например, покупку товара характеризуют две независимые основные величины — стоимость товара c и его количество k. Но это же явление характеризуется **и производной величиной отношения** этих величин — ценой товара $\text{Ц} = \frac{c}{k}$ …

Остановимся на вопросе **определения** этих **величин отношения** в школе. Обычно эти величины определяются **как значение** величины А **при единичном** значении величины В, например, цену определяют как стоимость единицы товара, скорость — как путь в единицу времени и т. д. И с научной и с психологической точек зрения такие определения **являются плохими** потому, что, например, скорость и путь (пройденный за единицу времени) **хотя численно равны, но имеют различные наименования**: размерность скорости, например, м/сек, а размерность пути… есть м. С психологической точки зрения такое определение неудачно потому, что ведь не всегда путь, пройденный за единицу времени есть скорость…

Поэтому целесообразно в школе **с самого начала определять** эти величины — цену, скорость, урожайность, производительность и им подобные **как отношения** соответственно стоимости к количеству, пути к времени и т. д.» (все выделено мной. — В. Х. [29, с. 187– 189]).

Да, математическая форма физических определений действительно дается как отношение, как частное значений двух величин, связанных функциональной зависимостью. Однако **арифметически** отношение — как деление по содержанию — безразмерная величина. Оно вторично. А первичным является «физический» смысл деления на равные части, поскольку по сути своей деление на равные части дает размерную величину.

Поэтому гораздо более важным для нас является последовательность определений «снизу-вверх» — от деления на равные части к делению по содержанию.

С точки зрения физики отношение двух величин используется для того, чтобы сказать: это отношение уже не зависит от величины заряда (см. п. 2 последовательности), поскольку дает характеристику поля, численно равную силе, измеряемую силой, действующей на единичный заряд (см. п. 3–4 последовательности).

В термине «отношение» скрывается деление по содержанию, но здесь же, поскольку берется отношение разноразмерных величин, скрывается и деление на равные части. В силу первичности деления на равные части нам важен именно физический, размерный смысл величин.

И еще одна, уже не арифметическая, а физическая причина того, почему так важен физический смысл величин, выраженный в делении на равные части.

За определениями физических величин, даваемых в математической форме (тем самым, дающими возможность **измерения** величин), **стоят реальные физические явления, а это и есть первичная реальность**!

За понятием скорости — большая быстрота движения.

За плотностью — более тяжелое тело равного объема.

За давлением — большая сила, действующая на одну и ту же поверхность.

За мощностью — большая работа механизма.

За теплоемкостью — способность поглотить больше тепла при нагревании.

За напряженностью — большая сила действия электрического поля.

И т. д. и т. д.

Чтобы характеризовать эти физические явления или, скажем, сравнивать разные тела, участвующие в том или ином физическом явлении, мы и вводим определения физических величин, выражающих меру явления «по отношению к единице».

Осталось добавить немногое, читатель.

Просмотрите все выдержки из книг по физике и сравните их. Особенно обратите внимание на издание «Физика для всех» в четырех книжках Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского (это издание хоть и считается научно-популярным, но вначале писалось с целью составить конкуренцию школьным учебникам) и на книгу Г. Роуэлла и С. Герберта «Физика», авторы которой много лет работали в экзаменационных комитетах Великобритании. На любимое мною высказывание лорда Кельвина ($З_{12}$).

Все это — подход физиков к своей науке. А что касается «Физики», то английские физики всегда отличались от континентальных пристрастием к эксперименту (посмотрите биографию Э. Резерфорда в серии ЖЗЛ). И именно поэтому физический смысл величин (в разбираемой мною форме) выражен у них так однозначно и прямо. Впрочем, советский теоретик Л. Д. Ландау, как видите, с ними по большей части согласен. То же относится и к определениям Л. А. Сены ($С_{101}$, $С_{106}$…).

Но обратите внимание и на формулировки профессора Принстонского университета Э. Роджерса, например: «**Само по себе поле не является силой**, это **некое состояние готовности подействовать** на массу с силой притяжения…» (ЭР-1_{279}).

Теперь, я думаю, читатель, понятен смысл эпиграфа этого пункта — слова известного американского теоретика Р. Фейнмана. Давайте еще раз вспомним их: «Физическое понимание — это нечто неточное, неопределенное и абсолютно нематематическое, но для физика оно совершенно необходимо» [43, с. 29].

Поэтому я придаю такую значимость «всего лишь арифметике». Поэтому, не отрицая, разумеется, строгих формулировок, построенных на понятии «отношение», я все-таки ставлю во главу угла физический смысл величин в значении деления на равные части. Поэтому, мне кажется, стоит большее, гораздо большее внимание уделять при преподавании построению определений физических величин по типу «снизу-вверх», формируя у ребенка изменчивое, текучее, но все более наполняющееся для него конкретным содержанием восприятие физических величин.

И уже потом, в университете, когда ребенок станет молодым человеком, студентом, при изучении курса общей физики, для него за словом «отношение» будет стоять не некое абстрактное частное двух чисел, а совершенно конкретное физическое явление, максимально опредмеченная характерная величина этого явления, порожденная функциональной зависимостью двух других величин.

Подборка определений физических величин.

Л. Д Ландау, А. И. Китайгородский «Физика для всех», книга 1 [41], **«Физические тела», книга 2**, **«Молекулы»** [44].

Л-$1_{17\text{-}18}$ «Что подразумевают, когда говорят: тяжелый как свинец, или легкий как пух? Ясно, что крупинка свинца будет легкой, и в то же время гора пуха обладает изрядной массой. Те, кто пользуется подобными сравнениями, имеют в виду не массу тела, а плотность вещества, из которого это тело состоит. **Плотностью** тела называется **масса единицы объема**. Понятно, что **плотность свинца одинакова** и в крупинке свинца и в массивном блоке. При **обозначении** плотности обычно указывают, **сколько граммов** (г) **весит кубический сантиметр** ($см^3$) тела, — после числа ставят символ $г/см^3$. Для определения плотности **число** граммов нужно разделить **на число** кубических сантиметров; дробная черта в символе напоминает об этом».

(Плотность ρ нам нужна как величина, характеризующая разные вещества с точки зрения массы; для **сравнения** разных веществ вне зависимости от их масс и объемов. Чтобы получить такую величину, нужно взять **отношение** двух величин, **отнести** массу к единице объема, измерить и сравнить массы **в единице** объема — синонимичные утверждения. А это, как вы читатель видите, **есть смысл деления на равные части — найти содержимое единицы делителя!** — В. Х.)

Л-1_{24} «**Скорость** есть **перемещение за единицу** времени».

Л-1_{42} «**Ускорением** называют изменение скорости **за единицу** времени. Вместо того, чтобы говорить: «**скорость** тела **изменилась** на величину a за **1 секунду**», мы говорим короче: «ускорение тела равно *a*»… $a = \frac{V_2 - V_1}{t}$, где t — время, в течение которого нарастала скорость.

Скорость измеряется в см/с (или м/с и т. д.), время — в секундах. Значит, ускорение **измеряется** в см/с за секунду. **Число** сантиметров в секунду **делится** (подразумевается — **на число** секунд. — В. Х.) на секунды. Таким образом, единица ускорения будет см/с^2 (или м/с^2 и т. д.)».

Л-1$_{48}$ «Очевидно, **сила равна единице** в том случае, **если** она **массе в 1 г придает ускорение**, равное **1 см/с^2**» (о формулировке единицы из второго закона Ньютона: $F = ma$ — В. Х.)

Л-1$_{96}$ «Работа **измеряется** произведением пути на составляющую силы вдоль направления пути».

Л-1$_{99}$ «Чтобы судить о возможности машины производить работу, а также о потреблении работы, пользуются понятием мощности.

Мощность — это **работа**, совершенная **в единицу** времени».

Л-1$_{186}$ «**Отношение** F/S физики называют **давление** (его обозначают буквой р). Вместо того, чтобы говорить: сила в 1 кгс действует на площадь в 1 см^2, мы будем говорить короче: давление р = 1 кгс/см^2. Это давление называют технической атмосферой 1 кгс/см^2 = 1 ат».

Л-2$_{72}$ «Внутренняя энергия тела, разумеется, зависит от температуры. Чем больше надо нагреть тело, тем больше требуется энергии. На нагрев от T_1 до T_2 к телу требуется подвести в виде тепла энергию Q, равную

$$Q = C(T_1 - T_2).$$

Здесь C — коэффициент пропорциональности, который называется **теплоемкостью** тела. Из формулы следует **определение** понятия теплоемкости: C есть **количество тепла**, необходимое для повышения температуры **на 1°**С… Величины C **относят** обычно к **единице массы**. Тогда их обозначают строчными буквами c.

Количество тепла, идущее на нагревание тела массы m, запишется формулой $Q = mc(T_1 - T_2)$».

(Из этой формулы получаем $c = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)}$, то есть удельная теплоемкость c — это **количество тепла**, нужное для нагревания **одного грамма** (если масса измеряется в граммах) вещества **на один** градус — В. Х.).

А. И. Китайгородский «Физика для всех», книга 3, «Электроны» [45].

К-3$_9$ «И, во-вторых, он (исследователь. — В. Х.) предлагает назвать **силой тока количество электричества**, протекающее по цепи **в единицу** времени: $I = q/t$».

К-3$_{16}$ «… с помощью пробного шарика можно измерить электрическое поле, окружающее заряженное тело, и охарактеризовать его вполне исчерпывающим образом, указав величину и направление силы. Чтобы описание поля не зависело от выбора величины заряда пробного шарика, электрическое поле характеризуют его напряженностью: $E = F/q$, где q — электрический заряд пробного шарика».

(То есть **отношение** двух величин берут — тем самым, **относят** силу **к единице** заряда — именно потому, что **отношение** $\frac{F}{q}$ уже **не зависит** от величины заряда (ср. с Телесниным), поскольку поделив F на q мы получаем в качестве результата — по смыслу деления на равные части! — **содержимое единицы делителя**: силу, действующую на единичный заряд).

Л. Д Ландау, А. И. Ахиезер, Е. М. Лифшиц «Курс общей физики» [36].

Л-КОФ$_{12}$ «При равномерном движении **значение** скорости определяется просто как **путь**, проходимый частицей **в единицу** времени».

(А это уже курс лекций по физике, прочитанный Л. Д. Ландау на физико-техническом факультете МГУ! — хоть и вводится уточнение «**значение** скорости», а не сама скорость, тем не менее, по-прежнему это «**путь… в единицу** времени»).

Л-КОФ$_{35}$ «Источники энергии **характеризуются, работой,** совершаемой **в единицу** времени. **Эта работа** называется мощностью».

Л-КОФ$_{55}$ «Так как в закон Кулона входит произведение зарядов, то сила, действующая на некоторый заряд e со стороны другого заряда e_1, может быть записана в виде $F = eE$, где E — вектор, **не зависящий от величины** (ср. К-3$_{16}$) заряда e, а определяется только зарядом e_1 и расстоянием r между зарядами e и e_1. Этот вектор называется *напряженностью электрического поля* или, как часто говорят, просто электрическим полем, создаваемым зарядом e_1. Он равен **по величине** $E = \frac{e_1}{r^2}$ и направлен вдоль прямой линии, соединяющей точку, где находится заряд e_1, с точкой, где находится заряд e».

Я. Б. Зельдович, И. М. Яглом «Высшая математика для начинающих физиков и техников» [39]

З$_{12}$ «Когда студенты знаменитого Уильяма Томпсона, лорда Кельвина (1824–1907), пытались определять производную «по Коши», то это только раздражало старого профессора. «Да бросьте… — говорил он тогда, — ведь **производная — это скорость**».

З$_{56}$ «В частном случае *равномерного* движения все совсем просто. **Скорость** определяется как **путь**, пройденный движущейся точкой **за единицу** времени».

(И почти сразу добавляется, — но в скобках, во вторую очередь! — что этот путь **численно** равен скорости — В. Х.)

З$_{61}$ «… производная функции определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю приращения независимой переменной. — и тут же (поскольку к понятию производной пришли из физических соображений, рассматривая движение, понятие мгновенной скорости) говорится — **Мгновенная скорость** движения тела **равна производной** координаты тела по времени».

(То есть авторы дают физический смысл производной, но в форме, данной лордом Кельвиным (см. З$_{12}$): да скорость это, скорость! — разумеется, полностью понимая, что не сама производная, а численное значение производной равно численному значению мгновенной скорости, а не самой скорости. То же относится к формулировке геометрического смысла производной (см. З$_{68}$) — В. Х.).

З$_{68}$ «… **угловой коэффициент** (наклон) касательной **равен производной** функции $f'(x)$ в точке x_0».

З$_{263}$ «Произведение Fv… есть **работа**, **отнесенная к единице** времени; оно называется **мощностью**… **отношение** работы к протекшему времени (**т. е. работа**, произведенная **в единицу** времени, **или мощность**) есть $\frac{A}{t} = Fv$ ».

Г. Роуэлл, С. Герберт «Физика» [31].

Р$_{41}$ «**Плотность** определяется как **масса в единице** объема… Единица СИ для массы — килограмм, а для объема — кубический метр, поэтому **единица СИ** для плотности — это килограмм на кубический метр (кг·м$^{-3}$)».

Р$_{73}$ «**Давление** — это нормальная к поверхности (перпендикулярная) **сила**, действующая **на единицу** площади».

Р$_{93}$ «**Численное значение скорости** объекта — это **расстояние**, пройденное **за единицу** времени (название темы: «Числовое значение скорости (скалярная величина)»)… **Скорость** объекта — это его **перемещение за единицу** времени (название темы: «Скорость (векторная величина)»)».

Р$_{180}$ «**Мощность** определяется **скоростью выполнения работы** или скоростью использования энергии и является **отношением** проделанной работы ко времени, за которое эта работа выполнена (в данном случае для авторов важно, что:

$$\text{мощность}\, P = \frac{\text{работа}}{\text{время}} = \text{сила} \times \frac{\text{перемещение}}{\text{время}} = F \bullet v$$

и «Когда v увеличивается при постоянной F, то P должна увеличиваться. Это является следствием увеличения кинетической энергии»).

Р$_{185}$ «**Удельная теплоемкость вещества тела** определяется как **количество тепловой энергии**, которое нужно передать телу **массой 1 кг** для того, чтобы **повысить** его температуру **на 1 К»**.

Р$_{245}$ «**Удельная… теплота плавления** — это **количество теплоты**, необходимое для превращения **единицы** массы твердого вещества в жидкость без изменения температуры».

Р$_{252}$ «**Удельная… теплота парообразования** — это **количество тепловой энергии**, необходимое для превращения **единицы** массы жидкости в пар без изменения температуры».

Р$_{392}$ «**Потенциал** V заряженного тела определяется **как работа** W, затраченная на перенесение **единичного заряда** от нулевого потенциала до заряженного тела. Если заряд в Q кулонов перенесен между двумя точками с разностью потенциалов V вольт, то проделанная работа определяется по формуле $W = QV$ джоулей».

Р$_{414}$ «**Напряженность** электрического поля в данной точке E определяется **как сила**, действующая **на единичный заряд**, помещенный в этой точке поля».

Р$_{419}$ «… движение заряда известно как **электрический ток**. Точнее говоря, **заряд**, проходящий через данную точку **за одну** секунду, **определяет** электрический ток. Электрический ток обычно обозначается буквой I. Следовательно $I = Q/t$, где t — время, выраженное в секундах».

Э. Роджерс «Физика для любознательных», том I, II, III [46], [47], [48]

ЭР-1$_{40}$ «**Назовем** ускорением **величину**

$$\frac{\text{приращение скорости}}{\text{затраченное время}}, \text{или} \frac{\text{изменение скорости}}{\text{в единицу времени}}$$

Давая это **определение** ускорению, мы **на самом деле *выбираем* величину** (*приращение скорости*)/(*затраченное время*), **удобную для пользования**, а затем как-то называем ее. **Мы вовсе не раскрываем истинного смысла, заключенного в слове** «ускорение»! Мы делаем выбор и приписываем выбранной величине наименование, потому что она **оказывается удобной для описания рассматриваемого явления природы**».

ЭР-1$_{97}$ «В обиходном языке, говоря о скорости, имеют в виду, **насколько быстро** движется предмет по какой-либо траектории. В физике скорость — это перемещение за единицу времени в определенном направлении, представляющее собой вектор. Чтобы задать скорость, указывают число, единицу измерения и направление, например 15 *км/час* в северном направлении».

ЭР-1$_{279}$ «**Само по себе поле не является силой**, **это некое состояние готовности подействовать** на массу с силой притяжения» (пункт: «Напряженность поля силы тяжести». — В. Х.) «Если поместить **массу 1 *кг*** вблизи поверхности Земли, то **сила притяжения** будет равна 9,8 *ньютон*. Сила притяжения, действующая на 10 *кг*, равна 98 *ньютон*, а на массу M килограммов — (M) (9,8) *ньютон*. Таким образом, мы **говорим**, что ***«напряженность» поля*** *равна* 9,8 *ньютон* на *килограмм*. Мы представляем себе, что **поле готово подействовать** на любой кусок вещества с силой притяжения 9,80 *ньютон* **на каждый килограмм** вещества».

ЭР-2$_{483}$ «**Мощность** — это ***скорость*** передачи энергии:

$$\text{мощность} = \frac{\text{переданная энергия}}{\text{время}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

ЭР-2$_{484}$ «**Мощность** — это ***скорость*** работы.

ЭР-2$_{460}$ «**Удельная теплоемкость** — очень полезная характеристика при тепловых расчетах, но мы не будем рассматривать ее здесь подробно».

ЭР-2$_{464}$ «Список **тепловых расходов** для **превращения в пар 1 кг** льда…

ЭР-3$_{24-26}$ «… теперь мы говорим **о токе**, как **о потоке зарядов**. Обсуждая здесь эту тему, мы не объясняем, что такое заряд, а говорим лишь, что заряд есть нечто такое, что течет, когда появляется ток…

$$\text{сила тока в амперах} = \frac{\text{заряд в кулонах}}{\text{время в секундах}}$$

При силе тока в 1 *а* мы говорим, что через поперечное сечение проводника в каждой точке цепи проходит один кулон электричества в секунду. (определение единицы тока. — В. Х.) … мы говорим, что при силе тока в 5 *а* через сечение проводника в каждой точке цепи *проходит 5 кулон электрического заряда* ***в секунду***. *Ток силой I а означает, что через каждое сечение проводника в любой точке цепи проходит I кулонов в секунду*.

ЭР-3$_{101-103}$ «Мы представляем себе, что с каждым зарядом связано электрическое поле, подобное в известном смысле полю тяготения. *Напряженность электрического поля в любой точке определяют* ***как силу****, действующую на пробный кулон, помещенный в эту точку*. Принимая во внимание, что 1 *кулон* — огромный заряд, сформулируем это определение более реалистически следующим образом:

$$\text{напряжённость электрического поля} = \frac{\text{сила, действующая на малый пробный заряд}}{\text{величина пробного заряда}}$$

Мы получаем **силу**, действующую **на единичный заряд**, в *ньютон/кулон*… Чем меньше пробный заряд, тем меньше изменение поля. Поэтому мы берем все меньший и меньший заряд и мысленно совершаем математическую операцию перехода к пределу. ПРЕДЕЛ отношения СИЛА/ЗАРЯД мы называем НАПРЯЖЕННОСТЬЮ поля».

Р. В. Телеснин , В. Ф. Яковлев «Курс физики. Электричесво» [49].

Т$_{25}$ «Пусть на заряд q в данной точке поля действует сила F. Величина этой силы зависит как от свойств поля в данной точке пространства, так и от величины пробного заряда. Но если взять **отношение** $\frac{F}{q}$, то получим **величину, <u>не зависящую</u> от размеров заряда**. Это отношение является векторной (**силовой**) характеристикой поля, обозначается буквой E и названо ***напряженностью электрического поля***. Итак, **по определению понятия** имеем $E = \frac{F}{q}$».

Т$_{31}$ «Пусть заряд в данной точке обладает потенциальной энергией W. В различных точках поля потенциальная энергия данного заряда может быть различной. Но если взять **отношение** $\frac{W}{q}$, то получим **величину, <u>не зависящую</u> от размеров заряда**. Это отношение взято в качестве **энергетической** характеристики поля и называется ***потенциалом поля***. Следовательно, потенциал данной точки поля **определяется** формулой $U = \frac{W}{q}$».

А. В. Перышкин, Н. А. Родина «Физика-7» [50]

П$_{32}$ «**Скорость** тела при равномерном движении **показывает**, **какой путь** проходит тело **в единицу** времени…

Скорость тела при равномерном движении — это величина, **равная отношению** пути ко времени, за которое этот путь пройден (определение. — В. Х.)»..

П$_{44}$ «**Плотность показывает**, **чему равна масса** вещества, взятого **в объеме 1 м^3** (или 1 см^3)… **плотность** есть физическая величина, **равная отношению** массы тела к его объему».

П$_{67}$ «От того, какая сила действует **на каждую единицу** площади поверхности, **зависит результат** действия этой силы…

Величина**, равная отношении силы**, действующей перпендикулярно поверхности, к площади этой поверхности, называется **давлением** (определение. — В. Х.)».

Л. С. Жданов, В. А. Маранджян «Курс физики» [51]

Ж$_{33}$ «**Напряженность** электрического поля в какой-либо точке **измеряется силой**, с которой поле действует **на единичный** положительный заряд, помещенный в эту точку».

Н. И. Кошкин, М. Г. Ширкевич «Справочник по элементарной физике» [52]

КШ$_{25}$ «**Плотностью** вещества (ρ) называют **массу**, приходящуюся **на единицу** его объема.

КШ$_{25}$ «**Мощностью** (N) называется величина, **измеряемая работой**, совершаемой **в единицу** времени».

КШ$_{57}$ «… **удельная теплоемкость численно равна количеству тепла**, которое нужно сообщить телу **единичной** массы для повышения его температуры от t° С до (t + 1)° С при любом t».

КШ$_{58}$ «***Удельной теплотой плавления*** называется **количество теплоты**, которое нужно сообщить **единице** массы твердого тела, находящегося при температуре плавления, для того, чтобы перевести его в жидкое состояние».

КШ$_{115}$ «***Напряженность*** электрического поля в данной точке **численно равна** силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку».

Г. С. Ландсберг «Элементарный учебник физики», том I, II [53], [54]

ЛГ-1$_{25}$ «**Скоростью** равномерного движения называют **отношение** длины пути, пройденного телом, к промежутку времени, за который этот путь пройден».

ЛГ-1$_{135\text{-}136}$ «… **отношение** массы тела к его объему является постоянной величиной, **характерной** для данного вещества. Эту величину называют **плотностью**… **Можно также сказать**, что **плотность равна массе единицы объема** данного вещества».

ЛГ-1$_{233}$ «**Отношение** произведенной работы A ко времени t, в течение которого эта работа произведена, называют **мощностью**… Мощность **можно назвать скоростью** произведения работы».

ЛГ-2$_{44}$ «… **отношение** $\frac{F}{q}$, **равное силе**, действующей **на единицу** заряда, и принимают **за количественную меру** поля и называют **напряженностью** поля… Итак, ***напряженность*** *электрического поля в данной точке пространства есть* ***отношение*** *силы, действующей на заряд, помещенный в эту точку к величине заряда*. Следовательно, напряженность поля **численно равна** силе, действующей **на единичный** заряд».

ЛГ-2$_{117}$ «***Силой тока*** *в проводнике условились называть* ***количество*** *электричества, проходящего через сечение проводника* ***за единицу*** *времени*. Таким образом, если за время t через сечение проводника проходит количество электричества, равное q, то величина тока I **равна отношению** q/t».

Л. А. Сена «Единицы физических величин и их размерности» [38]

С$_{101}$ «**Давление** при равномерно распределенной нагрузке, **определяется силой**, приходящейся на единицу поверхности».

С$_{104}$ «**Работа** под действием постоянной силы **определяется** как произведение силы на путь и на косинус угла между их направлениями… За единицу работы принимается работа, произведенная **единицей силы** на пути **равном единице длины**, в случае, когда сила и путь совпадают по направлению… В системе СИ единицей работы является джоуль — **работа одного ньютона** на пути в 1 м».

$С_{106}$ «**Мощность**, или эффект, есть **быстрота совершения работы**. Мощность… **равна работе**, совершаемой **в единицу** времени».

$С_{162}$ «… **напряженность** поля **измеряется** силой, **которую испытывает** в данном поле положительный заряд, **равный единице**».

$С_{163}$ «… **сила** неизменяющегося **тока** определяется **как количество** электричества, протекающее через поперечное сечение проводника **в единицу** времени».

Резюме главы V.

Хотя действие деления графически может быть реализовано одним графическим элементом — «пустоткой деления» (рис. 4, задача 1, цикл I), но в силу принципиальной содержательной разницы между двумя формами деления введены два графических элемента: **ГРАЭЛ-$(:)_Р$** — графэлемент деления на равные части (задача 1, цикл I), и **ГРАЭЛ-$(:)_С$** — графэлемент деления по содержанию (задача 1, цикл II).

Деление на равные части выступает **в двух видах** (поэтому в одном цикле даны оба вида деления): деление на равные части как таковое (найти **содержимое** единицы делителя) и «меньше в несколько раз» (найти **содержимое** одной из равных частей).

Деление по содержанию выступает **в трех видах** (поэтому в одном цикле даны три вида деления): деление по содержанию как таковое (найти **число** равных частей) и **сравнение** — во сколько раз больше или меньше?

Тем самым **<u>один</u>** графэлемент деления реализует **<u>пять</u> логических элементов арифметики**: деление на равные части, уменьшить в несколько раз, деление по содержанию, во сколько раз больше?, во сколько раз меньше?

Введена формула **Д•В=СД** (п. «Еще немного о дробях»), крайне облегчающая ребенку анализ задач «с дробями» (непосредственно к ГрафАнализу отношения не имеет).