



Глава IV

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Несколько слов вначале

Десятичные дроби обычно изучаются в 5 классе, после того, как дети познакомились со сложением и вычитанием обыкновенных дробей (без приведения их к общему знаменателю). Из-за того, что правила умножения обыкновенных дробей они не знают — умножение десятичных дробей схватывается формально. А из-за неотработанности основного свойства дроби — мгновенно проблемы с делением десятичных дробей.

Внимание!

Но разумеется, **большая часть проблем с десятичными дробями** закладывается в начальной школе и в первой половине 5 класса — **работа с натуральными числами** (глава II).

Действительно, если мы умеем грамотно считать — складывать и вычитать, умножать и делить, — то даже формального владения соответствующими правилами десятичных дробей нам достаточно, чтобы относительно безболезненно расширить свою арифметическую технику в натуральных числах на десятичные дроби. Ведь десятичные дроби хотя и являются всего лишь частным случаем обыкновенных дробей, но крайне важным частным случаем — они и образуются, и записываются так же, как и натуральные числа в нашей десятичной позиционной системе счисления (п. «Чтение и запись натуральных чисел», глава I). А значит, и практика подтверждает это, нам нужно всего лишь несколько дней на то, чтобы довольно прилично овладеть техникой работы с десятичными дробями.

Немного о десятичных дробях

Десятичные дроби начали входить в употребление в конце XVI века, когда сложные вычисления с дробями стали широко применяться во всех областях жизни. Они были введены для того, чтобы устранить трудности приведения дробей к общему знаменателю — ведь при мало-мальски больших знаменателях, вычисления с обыкновенными дробями становятся крайне громоздки и трудоёмки.

В десятичных дробях **единица** делится **на десять** долей (десятые доли: $1 = \frac{1 \cdot 10}{1 \cdot 10} = \frac{10}{10}$), каждая **десятая** доля снова делится **на десять** долей (сотые доли: $\frac{1}{10} = \frac{1 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{10}{100}$), каждая **сотая** — **на десять** тысячных (тысячные доли: $\frac{1}{100} = \frac{1 \cdot 10}{100 \cdot 10} = \frac{10}{1000}$) и т.д.

Определение.

Доли $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... называются **десятичными долями**.

Видим, что такое деление (**раздробление**) крупной доли **на десять мелких** математически опирается на основное свойство дроби (п. «Приведение дроби к новому знаменателю», основное свойство дроби, содержательное окружение ядра... , элементы ЗЯМ₂... , глава II) и реализует принцип построения десятичной позиционной системы счисления: **десять мелких долей** (единиц низшего разряда) образуют **одну крупную долю** (одну единицу высшего разряда).

В силу этого, договорились дробь, знаменатель которой единица с одним или несколькими нулями, записывать без дробной черты: сначала пишется целая часть числа, справа ста-

вится запятая, отделяющая целую часть от дробной; **на первом** месте после запятой пишется **цифра**, означающая число **десятых** (десятых долей единицы), **на втором** — число **сотых**, **на третьем** — число **тысячных** и т.д.

Определение.

Цифры, стоящие после запятой, называются десятичными знаками.

Определение.

Дробь, знаменатель которой единица с одним или несколькими нулями, записанную с помощью десятичных знаков называют десятичной дробью.

Примеры.

$$1. \frac{3}{10} = 0,3;$$

$$2. \frac{83}{100} = \frac{80 + 3}{100} = \frac{80}{100} + \frac{3}{100} = \frac{8}{10} + \frac{3}{100} = 0,8 + 0,03 = 0,83;$$

$$3. 7 \frac{305}{1000} = 7 + \frac{300 + 5}{1000} = 7 + \frac{300}{1000} + \frac{5}{1000} = 7 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000} = 7,305;$$

$$4. 3 \frac{8}{100} = 3 + \frac{0}{10} + \frac{8}{100} = 3,08.$$

Читают десятичные дроби так: **сначала** называют **целую часть** числа (натуральное число или ноль), **затем** называют число, стоящее в дробной части (**числитель** дроби), и **добавляют название нижнего разряда** (знаменатель дроби).

Чтение дробей из примеров:

ноль целых три десятых (или просто «три десятых»);

ноль целых восемьдесят три сотых (или просто «восемьдесят три сотых»);

семь целых триста пять тысячных;

три целых восемь сотых.

Внимание.

Если **целая часть** числа **отсутствует**, то слева от запятой **пишут** цифру «**ноль**» (примеры 1–2).

Аналогично, если **отсутствует** какой-либо **разряд** в дробной части (соответствующие доли), то на его месте тоже **пишут** цифру «**ноль**»: пример 3 — отсутствует разряд сотых; пример 4 — отсутствует разряд десятых.

Замечание.

Если смотреть **слева направо** примеры 1–4, то равенство будет означать перевод обыкновенной дроби в десятичную; если смотреть **справа налево**, то равенство будет означать перевод десятичной дроби в обыкновенную.

Проблемы чтения десятичных дробей

При чтении десятичных дробей возникают две основные проблемы:

Правильно прочитать дробную часть числа.

Правильно назвать нужный (низший) разряд дробной части.

Вторая проблема особенно проявляет себя при наличии **более трёх знаков** после запятой (в дробной части).

Сначала, читатель, расширим нашу таблицу разрядов дробной части (таблица 1).

Таблица 1	
0,1	одна десятая
0,01	одна сотая
0,001	одна тысячная
0,000.1	одна десятитысячная
0,000.01	одна сотысячная
0,000.001	одна миллионная
0,000.000.1	одна десятиллионная

Вы видите, что таблицу десятичных долей я разделил на три части.

Во второй и третьей частях (от десятитысячных до миллионных и после миллионных) **после разряда тысячных у меня стоит точка.**

Внимание!

Вы обязательно должны научить ребёнка «**считать ручкой**» первые три разряда (разумеется, не пересчитывая их: «раз, два, три», — а отделяя одним движением ручки), причём, вначале, можно, чтобы он ставил **точку**, которая будет **фиксировать границу** между тысячными и десятитысячными долями. Если эта граница есть (хотя бы и не проставленная точкой, а указанная кончиком ручки), то дальше очень легко безукоризненно правильно прочитать (а значит, и написать) следующую тройку долей: десятитысячные, сотысячные и миллионные. Как только видим, что число знаков в дробной части велико, то мгновенно **отсчитываем ручкой** по три разряда (точки после тысячных и миллионных долей).

Примеры.

0,000.2; 0,000.04; 0,000.007; 0,000.000.9.

Соответственно произносим (без «ноль целых» в данном случае): 2 десятитысячных, 4 сотысячных, 7 миллионных, 9 десятиллионных.

Всё время **говорите ребёнку**: «Отсчитай ручкой три знака (после запятой). На каких долях остановились?.. Верно, **тысячные**. А какие дальше?.. Правильно, десяти (или сто) тысячные (поскольку от третьего знака после запятой, от тысячных долей, да ещё фиксируя ручкой, практически невозможно ошибиться). Точно также — точка после миллионных».

Итак, мы разобрались со второй проблемой — правильно назвать низший разряд дробной части.

Замечание.

Разумеется, таблицу разрядов можно продолжить далее стандартным образом: сто миллионные, миллиардные доли и т.д. но названия этих и дальнейших долей практически не употребляются в школьной, да и не только, практике.

Перейдём к первой проблеме — чтению многозначных чисел в дробной части.

Вам нужно продемонстрировать ребёнку несколько примеров, показывающих, что дробная часть — это числитель дроби, обычное многозначное число, и, чтобы правильно прочитать его, нужно, как с натуральными числами, ручкой отсчитать уже **справа налево** от конца «дробного хвостика» (от последней цифры дробной части) три знака, т.е. дойти до **разряда тысяч** (не путать с **тысячными долями!**), а дальше легко и безошибочно будут прочитываться десятки и сотни тысяч в классе тысяч.

Резюмируем.

Сначала вы **требуете** (и внимательно следите за правильностью), чтобы ребёнок **отсчитал ручкой** слева направо от запятой три знака до границы между тысячными и десятитысячными долями, определился с **наименованием низшего разряда** дробной части (произнёс вслух

название долей) и потом — правильно прочитал число, выражающее дробную часть, добавив наименование долей.

Примеры.

0,234.5 — видим, десятитысячные доли.

2 345 — две тысячи триста сорок пять — читаем дробную часть как многозначное число.

Окончательно и вместе будет звучать: ноль целых две тысячи триста сорок пять **десятитысячных**.

210,156.78 — видим, сотысячные доли.

15 678 — можем прочесть дробную часть как многозначное число.

В результате произносим: двести десять целых пятнадцать тысяч шестьсот семьдесят восемь **сотысячных**.

0,870.004 — видим, миллионные доли.

870 004 — можем прочесть дробную часть как многозначное число.

В результате произносим: ноль целых восемьсот семьдесят тысяч четыре **миллионных**.

Примеры чтения и записи десятичных дробей вы, читатель, наращиваете самостоятельно.

Внимание.

Обязательно сделайте с ребёнком упражнение, развивающее «перевод в математику слов», когда разряды целой и дробной частей записаны словами (таблица 2).

Таблица 2	
1	2 единицы и 8 десятых долей
2	3 десятых доли и 7 сотых долей
3	5 десятков, 1 единица и 9 сотых долей
4	7 сотен, 6 тысячных долей и 4 десятитысячные доли
5	6 сотен, 3 десятка, 2 единицы, 5 <u>десятых долей</u> и 7 <u>сотых долей</u>
6	7 тысяч, 2 сотни, 3 <u>сотых долей</u> и 8 <u>тысячных долей</u>
7	4 десятка, 4 <u>десятых долей</u> , 4 сотых долей и 4 миллионных доли

Таблица 3	
1	2,8
2	0,37
3	51,09
4	700,0064
5	632,57
6	7200,038
7	40,440004

Ответы — таблица 3.

(Последние четыре числа произносятся: семьсот целых шестьдесят четыре десятитысячных, шестьсот тридцать две целых пятьдесят семь сотых, семь тысяч двести целых тридцать восемь тысячных, сорок целых четыреста сорок тысяч четыре миллионных).

Проследите, чтобы ребёнок не путал ни по названию, ни по смыслу десятки, сотни, тысячи — **разряды натурального** числа) и десятые, сотые, тысячные доли — **разряды дробной** части (сравните выделенные разряды в примерах 5, 6, 7 таблицы 2).

Первые (разряды слева от запятой) относятся к целой части (например, 5 десятков = 50; 7 сотен = 700), а вторые (разряды справа от запятой) — к долям единицы, к дробной части (например, 8 десятых = 0,8; 7 сотых = 0,04)

Примеры записи в виде десятичных дробей

соотношений между единицами измерения длины и массы

В таблице 4 я дал соотношение между единицами измерения мелких и крупных мер (например, между миллиметрами и сантиметрами) как в виде обыкновенных дробей, так и в виде десятичных.

Таблица 4	
$1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см} = 0,1 \text{ см}$	
$1 \text{ см} = \frac{1}{100} \text{ м} = 0,01 \text{ м}$	
$1 \text{ мм} = \frac{1}{1000} \text{ м} = 0,001 \text{ м}$	
$1 \text{ г} = \frac{1}{1000} \text{ кг} = 0,001 \text{ кг}$	
$1 \text{ кг} = \frac{1}{1000} \text{ т} = 0,001 \text{ т}$	

В таблице 5 я привожу примеры перевода мелких мер в крупные, записанные в виде десятичных дробей.

Таблица 5		
$4 \text{ мм} = 0,4 \text{ см}$	$3 \text{ см} 1 \text{ мм} = 3,1 \text{ см}$	$3 \text{ м} 2 \text{ см} 5 \text{ мм} = 3,025 \text{ м}$
$5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$	$25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$	$60 \text{ м} 4 \text{ см} = 60,04 \text{ м}$
$45 \text{ г} = 0,045 \text{ кг}$	$2 \text{ кг} 345 \text{ г} = 2,345 \text{ кг}$	$10 \text{ кг} 3 \text{ г} = 10,003 \text{ кг}$
$2 \text{ кг} = 0,002 \text{ т}$	$90 \text{ кг} = 0,090 \text{ т} = 0,09 \text{ т}$	$6 \text{ т} 31 \text{ кг} = 6,031 \text{ т}$

Более подробно перевод мер будет дан в разделах умножение и деление десятичных дробей.

Сравнение десятичных дробей

Вы, читатель, конечно, помните со времён школы, что к десятичной дроби **справа** (к «дробному хвостику») можно приписать несколько нулей (или, наоборот, отбросить их) и получится дробь, равная исходной.

Практически все дети тоже это помнят.

Но очень важно, чтобы на сей раз ребёнок понял, что это возможно благодаря **основному свойству дроби**, которое, напомним, заключается в том, что мы можем умножить или разделить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же число и дробь не изменится.

Смотрите:

$\frac{\overset{10}{3}}{10} = \frac{\overset{10}{30}}{100} = \frac{300}{1000}$ — основное свойство дроби: **приведение дроби $\frac{3}{10}$ к новому знаменателю 100 и 1000.**

Но эти же равенства мы можем записать в виде десятичных дробей:

$$0,3 = 0,30 = 0,300,$$

то есть, **видим**, что можем **приписать** к «дробному хвостику» один или несколько нулей, и дробь не изменится.

Аналогично:

$\frac{\overset{10}{700}}{1000} = \frac{\overset{10}{70}}{100} = \frac{7}{10}$ — основное свойство дроби: **сокращение** на 10 (или на 100).

Эти же равенства мы можем записать в виде десятичных дробей:

$$0,700 = 0,70 = 0,7,$$

то есть, **видим**, что можем **отбросить** справа в десятичной дроби один или несколько нулей, и дробь не изменится.

Благодаря этому, мы можем сравнивать десятичные дроби, уравнивая в них число десятичных знаков (или, математически, **приводя их к наименьшему общему десятичному знаменателю**) приписывая или отбрасывая нули.

(При небольшом навыке мы должны уравнивать число десятичных знаков **устно**.)

Примеры.

$$0,5 > 0,49, \text{ т.к. } 0,50 > 0,49;$$

$$32,68 < 32,7, \text{ т.к. } 32,68 < 32,70;$$

$$5,025 < 5,03, \text{ т.к. } 5,025 < 5,030;$$

$$50,2904 > 50,29, \text{ т.к. } 50,2904 > 50,2900.$$

В первых двух примерах мы приводим дроби к общему знаменателю 100; в третьем — к знаменателю 1000; в четвёртом — к знаменателю 10 000.

В случае одинакового числа десятичных знаков в «дробном хвостике», сравнение происходит обычным образом, как для натуральных чисел: сравнение чисел заканчивается, как только доходим до разряда, в котором дроби отличаются друг от друга.

Примеры.

$$0,39 < 0,45 \text{ — т.к. 4 десятых больше 3 десятых;}$$

$$7,064 < 7,074 \text{ — т.к. 7 сотых больше 6 сотых;}$$

$$0,4607 < 0,4617 \text{ — т.к. 1 тысячная больше 0 тысячных.}$$

Внимание!

Проследите, чтобы ребёнок точно понимал разницу в **приписывании нулей к натуральному числу** и к «дробному хвостiku» — **дробной части** десятичной дроби.

Если мы приписываем нули **к натуральному числу (справа)**, то, тем самым, мы **умножаем** число на 10, 100, ... т.е. увеличиваем число в 10, 100, ... раз. В результате у нас будут **разные числа**:

$$3 \neq 30 \neq 300.$$

Если же мы приписываем нули **к дробной части** десятичной дроби, то дробь **не изменяется**, поскольку мы просто приводим её к новому десятичному знаменателю:

$$2,3 = 2,30 = 2,300.$$

Точно так же нужно проследить за тем, чтобы ребёнок видел **принципиальную разницу** в приписывании нулей **перед** натуральным числом (**слева** от числа) и перед цифрами дробной части после запятой десятичной дроби.

Если мы **перед натуральным числом** 23 напишем пару нулей — 0023, — то эта запись ничего не меняет, — просто показывает: как не было ничего в разрядах сотен и тысяч, так и нет ничего. Поэтому нули **перед натуральным числом ничего не означают**.

Но вот если мы в десятичной дроби 1,23 припишем ноль **перед дробной частью** (после запятой), то ситуация **принципиально изменится**: было число 1,23 (**сотые доли**), а станет число 1,023 (**тысячные доли**). Если их сравнить, приводя к общему десятичному знаменателю 1000, то видим, что $1,023 < 1,230$, т.е. $1,023 \neq 1,23$. Таким образом, приписывая нули перед цифрами дробной части, мы **изменяем число**.



Сложение и вычитание десятичных дробей

Сначала, читатель, небольшое пояснение: почему мы складываем (а значит, и вычитаем) десятичные дроби по правилам сложения (вычитания) натуральных чисел.

Десятичные дроби — частный случай обыкновенных дробей, которые мы можем складывать и вычитать только, приведя к общему знаменателю.

Примеры.

$$1. \quad 3,45 + 4,23 = 3 \frac{45}{100} + 4 \frac{23}{100} = 7 \frac{45+23}{100} = 7 \frac{68}{100} = 7,68.$$

$$2. \quad 3,4 + 4,23 = 3 \frac{\overset{10}{4}}{10} + 4 \frac{23}{100} = 7 \frac{40+23}{100} = 7 \frac{63}{100} = 7,63.$$

В обоих примерах мы переводим десятичную дробь в обыкновенную, а затем обратно в десятичную.

В первом примере дробные части уже с **одинаковым знаменателем** 100 (сотые доли) и мы складываем числители ($45 + 23$) **как натуральные числа** — поразрядно (в п. «Немного о дробях», глава III) я уже говорил о том, что как только дроби приведены к общему знаменателю, мы можем о знаменателе **«забыть»** и заниматься только числителями, ведя счёт в натуральных числах).

Во втором примере мы приводим дробь $\frac{4}{10}$ к знаменателю 100 ($\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$) и далее складываем числители дробных частей десятичных дробей ($40 + 23$) как натуральные числа.

(Заметьте, что, как сказано в п. «Сравнение дробей», мы могли бы поступить чуть иначе, «приписав ноль» к дроби 3,4, т.е. раздробив 4 десятых в 40 сотых ($3,4 = 3,40 = 3 \frac{40}{100}$), как мы реально и поступаем при сложении десятичных дробей.)

Видим, что, складывая **числители** дробей **как натуральные числа**, мы, тем самым, **складываем поразрядно** отдельно **десятые, сотые** и т.д. **доли** десятичных дробей. — Вот и обоснование того, что с десятичными дробями мы работаем при сложении так же, как с натуральными числами.

Сравните:

$345 = 3 \text{ сотни} + 4 \text{ десятка} + 5 \text{ единиц}$ $+$ $423 = 4 \text{ сотни} + 2 \text{ десятка} + 3 \text{ единицы}$	$3,45 = 3 \text{ целых} + 4 \text{ десятых} + 5 \text{ сотых}$ $+$ $4,23 = 4 \text{ целых} + 2 \text{ десятых} + 3 \text{ сотых}$
$768 = 7 \text{ сотен} + 6 \text{ десятков} + 8 \text{ единиц}$	$7,68 = 7 \text{ целых} + 6 \text{ десятых} + 8 \text{ сотых}$

Сводя сложение десятичных дробей к сложению обыкновенных дробей, мы, тем самым, чётко понимаем правило сложения: **«запятая под запятой»** — ведь запятая у нас отделяет целую часть от дробной, а при сложении обыкновенных дробей мы отдельно складываем целые и отдельно дробные части.

Итак, окончательно **правило сложения** (и вычитания) десятичных дробей коротко звучит так:

запятая под запятой, разряд под разрядом (одноимённые разряды).



Тренажёр устного счёта: сложение/вычитание

В тренажёре будут приведены простенькие, но **крайне важные** примеры, которые **действительно необходимо** уметь считать **устно**.

Примеры должны прорабатываться **все**, без пропусков. Основной их массив взят из учебников [11] и [12].

Разумеется, читатель, как и при работе с тренажёром устного счёта главы II, вы, **безусловно, используете два важнейших технологических приёма**: «считает ручка» и «всё вслух» (п. 3 «Поразрядное сложение/вычитание без перехода через десяток (2-у значные $\pm$ 2-у значные)», тренажёр устного счёта: сложение/вычитание — переход через десяток, глава II).

Таблица 6			
$3 + 0,3$	$0,2 + 0,3$	$0,01 + 0,01$	$0,23 + 0,71$
$5 + 0,75$	$0,4 + 0,5$	$0,07 + 0,02$	$0,56 + 0,42$
$0,81 + 1$	$0,2 + 0,6$	$0,03 + 0,04$	$0,37 + 0,21$

Сложение

В первом столбце таблицы 6 может потребоваться пояснение: $3 = 3,0$ (3 целых — это 3 целых и 0 десятых) и поясняющая запись сложения в столбик:

$$\begin{array}{r} 3,0 \\ + \\ 0,3 \\ \hline 3,3 \end{array}$$

Во втором и третьем столбцах таблицы 6 (поразрядное сложение десятых и, соответственно, сотых долей), **показывая ручкой** с первого числа на второе, **и говоря**: «Результат?» — **добивайтесь**, чтобы ребёнок произносил не «ноль целых пять десятых» (или «ноль целых 2 сотых»), а просто: «**пять десятых**» («**две сотых**»), т.е. как натуральное именованное число. Это же относится ко всем дробям без целых частей.

Нужно, чтобы ребёнок закрепил равнозначность, эквивалентность подобных названий десятичных дробей, чтобы **слыша**: «пять десятых», он **писал** 0,5.

В примерах четвёртого столбца таблицы 6, вслед за вашими поразрядными движениями ручкой, ребёнок будет неторопливо проговаривать: «Девяносто... четыре... сотых» (наименование долей, разумеется, произносится) и т.д.

Ответы — таблица 7.

Таблица 7			
3,3	0,5	0,02	0,94
5,75	0,9	0,09	0,98
1,81	0,8	0,07	0,58

Примеры таблицы 6 — это всего лишь разминка перед таблицей 8.

Несмотря на крайнюю простоту содержащихся в ней примеров, именно здесь мы должны раз и навсегда научить ребёнка **безукоризненно видеть поразрядное сложение долей «в горизонтальной записи»**.

Практически весь набор возможных ошибок при устном счёте будет устранён благодаря примерам первого и второго столбцов. Пятый столбец будет подготовительным для примеров таблицы 10.

Таблица 8				
$0,007 + 0,02$	$0,12 + 0,4$	$0,1 + 0,01$	$0,2 + 0,401$	$5,8 + 2,2$
$0,005 + 0,04$	$0,5 + 0,41$	$0,01 + 0,001$	$0,31 + 0,6$	$4,9 + 6,1$
$0,003 + 0,02$	$0,76 + 0,2$	$0,02 + 0,004$	$0,48 + 0,007$	$3,5 + 4,5$

Стандартной ошибкой в примерах первых двух столбцов таблицы 8 является то, что ребёнок **не видит** (не понимает!) **одноимённых** разрядов, они ещё не закрепились в его понимании десятичных дробей.

В первом столбце, в примере $0,007 + 0,02$, — стандартный ответ: 9 тысячных (или 9 сотых) вместо 0,027, т.е. складываются доли **разных разрядов**.

Нужно **сказать ребёнку**, что 7 — это 7 **тысячных** (долей единицы), а 2 — это 2 **сотых** (доли единицы); складывать их нельзя — всё равно, что 7 тракторов сложить с 2 яблоками. И тут же написать пример в столбик, раздробив 0,02 в 0,020 (2 сотых в 20 тысячных).

$$\begin{array}{r} 0,007 \\ + \\ 0,020 \\ \hline 0,027 \end{array}$$

Тут же **обратить его внимание** на то, что цифры 7 и 2 стоят на разных местах, в разных разрядах.

Та же самая ошибка допускается во втором столбце. Обычный ответ: 0,16, вместо 0,52.

Как правило, уже достаточно **спросить ребёнка**: «А четыре чего, **каких долей** (в числе 0,4)?.. Сотых или десятых?» — И как только он произнесёт: «4 десятых», — **тут же спросить**: «А сколько десятых — одна или две — в дроби 0,12?.. **Одна десятая**, верно?.. А поскольку складывать мы можем только доли **одного наименования**, т.е. **1 десятую** дроби 0,12 и **4 десятых** дроби 0,4, то и ответ будет 0,52, а не 0,16».

Если почувствуете необходимость, читатель, то напишите этот пример в столбик или в строчку, **раздробив** 4 десятых в 40 сотых, т.е. $0,12 + 0,40$.

В пятом столбце таблицы 8 мы должны научиться видеть, что 8 десятых + 2 десятых = **10 десятых**, а 10 десятых — это **одна целая единица** ($0,8 + 0,2 = \frac{8}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} = 1$). И ребёнок, складывая сначала целые части дробей 5,8 и 2,2, а затем дробные, будет произносить (вместе с **движением ручки**): «Семь... восемь (целых)».

Ответы — таблица 9.

Таблица 9				
0,027	0,52	0,11	0,601	8
0,045	0,91	0,011	0,91	11
0,023	0,96	0,024	0,487	8

Наконец, закончим устное сложение десятичных дробей таблицей 10 — примеры рационального счёта (использование переместительного $a + b = b + a$ и сочетательного $a + (b + c) = (a + b) + c$ законов сложения).

Таблица 10			
$6 + 3,8 + 1,2$	$0,8 + 0,7 + 0,2$	$4,3 + 5,6 + 2,7$	$4,27 + (0,78 + 5,73)$
$15,4 + 4 + 0,6$	$4,5 + 2,5 + 2,18$	$8,37 + 4,9 + 5,1$	$(12,004 + 9,909) + 0,091$
$1,25 + 4,5 + 3,75$	$4,8 + 1,9 + 3,1$	$2,85 + 4,3 + 0,15$	$25 + (12,07 + 23,93)$

Перед тем, как работать с таблицей 10, просмотрите п. «Рациональный счёт», законы сложения, глава II.

Отличие таблицы 10 в том, что при сложении «ноль» на конце дают дробные части. Мы получаем либо 10 десятых (один знак после запятой), либо 100 сотых (два знака после запятой), либо 1000 тысячных (три знака после запятой), а это всегда будет **одна целая единица**.

Если ребёнок это хорошо усвоил, и к тому же, умеет грамотно и быстро считать в натуральных числах, то рациональный счёт в десятичных дробях явится для него всего лишь расширением техники счёта в натуральных числах.

Реальный счёт (**ручкой и вслух**) осуществляется примерно так:

$$4,27 + (0,78 + 5,73).$$

«Девять... десять ($4,27 + 5,73 = 10$ — отдельно складываем целые части $4 + 5 = 9$ и отдельно — дробные $0,27 + 0,73 = \frac{100}{100} = 1$)». И окончательный ответ: «Десять целых семьдесят

восемь сотых ($10 + 0,78 = 10,78$)». То есть, в виде цепочки равенств:

$$4,27 + (0,78 + 5,73) = (4,27 + 5,73) + 0,78 = 10 + 0,78 = 10,78.$$

Ответы — таблица 11.

В таблице 11 я сначала даю промежуточный результат (натуральное число, которое получается при сложении одной пары десятичных дробей), а затем окончательный ответ.

Таблица 11			
$5 + 6 = 10$	$1 + 0,7 = 1,7$	$7 + 5,6 = 12,6$	$10 + 0,78 = 10,78$
$16 + 4 = 20$	$7 + 2,18 = 9,18$	$10 + 8,37 = 18,37$	$10 + 12,004 = 22,004$
$5 + 4,5 = 9,5$	$5 + 4,8 = 9,8$	$3 + 4,3 = 7,3$	$36 + 25 = 61$

Вычитание

Если мы хорошо поработали с тренажёром устного счёта в натуральных числах (таблицы 4, 5, 7, тренажёр устного счёта: сложение/вычитание — переход через десятков, глава II), а также освоили идею **раздробления** единицы старшего разряда в десять единиц младшего при письменном вычитании (п. «Вычитание», письменное сложение/вычитание, глава II), то расширение нашей счётной техники на десятичные дроби потребует лишь нескольких поясняющих примеров и небольшой практики.

С таблицей 12 работаем так же, как с первыми тремя столбцами таблицы 6 при сложении. При необходимости, напомним ребёнку, что, **как и с обыкновенными дробями**, — отдельно работаем с целыми частями и отдельно с дробными. То есть, в первом столбце, можно на-

писать поясняющий пример: $3,75 - 2 = 3\frac{75}{100} - 2 = 1\frac{75}{100} = 1,75$ (отдельно вычитаем целые

части), или, в четвёртом столбце: $1,5 - 0,5 = 1\frac{5}{10} - \frac{5}{10} = 1$ (отдельно вычитаем дробные час-

ти). Если формально, то должны были бы написать: $1,5 - 0,5 = 1,0$, но очевидно, что $1,0 = 1$.

Таблица 12			
$3,75 - 2$	$0,8 - 0,6$	$0,09 - 0,03$	$1,5 - 0,5$
$4,6 - 3$	$0,9 - 0,5$	$0,17 - 0,02$	$8,34 - 0,34$
$12,695 - 10$	$0,5 - 0,4$	$0,86 - 0,42$	$10,375 - 0,375$

Ответы — таблица 13.

Таблица 13			
1,75	0,2	0,06	1
1,6	0,4	0,15	8
2,695	0,1	0,44	10

Таблица 14 даёт практику быстрого «счёта **ручкой**» и **вслух**, а **важные столбцы 4 и 5** играют ту же роль, что и первые три столбца таблицы 8 при сложении — развивают безукоризненное видение **одноимённых** разрядов.

Таблица 14				
$5,6 - 1,5$	$15,8 - 3,4$	$6,25 - 5,14$	$3,25 - 2,1$	$4,325 - 3,1$
$2,8 - 1,7$	$25,6 - 2,5$	$4,68 - 2,17$	$7,89 - 2,7$	$5,732 - 1,7$
$4,9 - 2,5$	$7,9 - 5,9$	$6,49 - 3,38$	$9,36 - 4,3$	$10,555 - 10,05$

Ответы — таблица 15.

Таблица 15				
4,1	12,4	1,11	1,15	1,225
1,1	23,1	2,51	5,19	4,032
2,4	2	3,11	5,06	0,505

Замечание.

В начале работы с десятичными дробями детей учат произносить, например, дробь 4,1: «четыре целых одна десятая» или дробь 1,15: «одна целая пятнадцать сотых». Но в дальнейшей работе слова: «целая», «десятых», «сотых» и т.п. **при быстром счёте** начинают загромождать речь, и ребёнку постарше стоит посоветовать произносить: 4, 1 — «четыре **и** одна», 1, 15 — «одна **и** пятнадцать», обратив только его внимание на союз «**и**», который характеризует для нас **сумму** целой и дробной частей (т.е. место запятой в десятичной дроби).

Наконец, примеры таблицы 16 **реализуют идею раздробления** единицы старшего разряда в десять единиц младшего.

Именно здесь нам особенно пригодится умение произносить дробь как наименование разряда (т.е. как натуральное именованное число), без «ноль целых», так, как мы это делали при работе с таблицей 6.

Таблица 16				
0,1 – 0,01	1 – 0,3	1 – 0,99	1 – 0,12	4,2 – 3,5
0,3 – 0,03	5 – 0,8	2 – 1,99	1 – 0,33	3 – 2,9
0,7 – 0,23	3 – 0,6	6 – 5,99	1 – 0,001	8 – 4,3

Необходимые пояснения.

1 столбец

В примере 0,1 – 0,01 **говорим ребёнку**: «Сколько в одной десятой содержится **сотых**?» — Как правило, ответа не следует! — Поясняем (**пишем и проговариваем**):

$$0,1 = \frac{\overset{10}{\cancel{1}}}{10} = \frac{10}{100} = 0,10,$$

то есть в одной десятой содержится десять **сотых**.

Вам, читатель, не раз и не два придётся писать и проводить это пояснение! **Не забывайте напоминать ребёнку**, что приводя дробь $\frac{1}{10}$ к знаменателю 100, т.е. получая дробь $\frac{10}{100}$, мы пользуемся **основным свойством дроби**. **Не забывайте**, когда «приписываете ноль» к дроби, т.е. пишете $0,1 = 0,10$, **проговаривать вслух**: «Была одна десятая, стало десять **сотых** (или, как выше: в одной десятой — десять сотых).

Говорите ребёнку: «А десять **сотых** минус одна **сотая** — сколько?.. Верно, девять (мгновенно проговаривая: «Девять чего? каких долей?»)... **сотых**». При необходимости (видя «по глазам ребёнка») — выписываете в строчку раздробление десятой в сотые: $0,1 = 0,10$ и в столбик, «с приписыванием нулей»:

$$\begin{array}{r} 0,10 \\ 0,1 \\ - \\ \hline 0,01 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,10 \\ - \\ \hline 0,01 \end{array}$$

0,09 – 9 *сотых*

Во втором примере **спрашиваете**: «3 **десятых**... или сколько **сотых** (раздроби в сотые)?» — Уже почти наверняка вы услышите: «30 (сотых)».

И **проговариваете** вместе с ребёнком: «30 **сотых** минус 3 **сотых** — 27 **сотых** (или, если написать: 0,27)».

В третьем примере **вслух**: «70 **сотых** минус 23 **сотых** — 47 сотых (0,47)».

Во втором и третьем столбцах таблицы 16 ваш **направляющий вопрос** тот же: «Сколько в единице (в одной целой) **десятых** (долей)? — 10 **десятых**. Сколько в 5 (3) **целых** — **десятых**? — 50 (30) **десятых**. Сколько в единице (в двух, шести **целых**) **сотых**? — 100 (200, 600) **сотых**».

В четвёртом и пятом столбцах таблицы 16 вы **требуете**, чтобы целая часть произносилась сразу в соответствующих долях:

4 столбец

условие	произносим	пишем
$1 - 0,12$	$100 \text{ (сотых)} - 12 = 88 \text{ (сотых)}$	0,88
$1 - 0,33$	$100 - 33 = 67 \text{ (сотых)}$	0,67
$1 - 0,001$	$1000 - 1 = 999 \text{ (тысячных)}$	0,999

5 столбец

условие	произносим	пишем
$4,2 - 3,5$	$42 \text{ (десятых)} - 35 = 7 \text{ (десятых)}$	0,7
$3 - 2,9$	$30 \text{ (десятых)} - 29 = 1 \text{ (десятая)}$	0,1
$8 - 4,3$	$80 \text{ (десятых)} - 43 = 37 \text{ (десятых)}$	3,7

В последнем столбце, пример $8 - 4,3 = 80 \text{ десятых} - 43 \text{ десятых} = 37 \text{ десятых}$, если нужно, напомните ребёнку выделение целой части:

$$37 \text{ десятых} = \frac{37}{10} = \frac{30 + 7}{10} = 3 + \frac{7}{10} = 3\frac{7}{10} = 3,7.$$



Письменное сложение и вычитание

Всё, что сказано о письменном сложении и вычитании натуральных чисел (п. «Письменное сложение и вычитание», глава II), целиком переносится на десятичные дроби.

Если вы, читатель, проработали с ребёнком сложение/вычитание в натуральных числах: «считает ручка» и «всё вслух» — автоматом; **запоминаем единицы** для старших разрядов (единицы переноса) — в кружочках; правильно **проставляем точки займа** при вычитании — тогда грамотное письменное сложение/вычитание десятичных дробей осваивается мгновенно.

Приведу только из учебника [11] примеры грамотной записи «в столбик» (запятая под запятой и разряд под разрядом).

Сложение

Примеры.

$$\begin{array}{r}
 0,269 \\
 + \\
 \hline
 0,984 \\
 \hline
 1,253
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 29,05 \\
 + \\
 \hline
 0,663 \\
 \hline
 29,723
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0,8975 \\
 + \\
 \hline
 120,3 \\
 \hline
 121,1975
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 50,89058 \\
 + \\
 \hline
 493,06 \\
 \hline
 543,95058
 \end{array}$$

Внимание!

Очень большую роль для грамотного письменного счёта играет такая «мелочь» как запись **одноимённых разрядов точно друг под другом** (разряд под разрядом). **Требуйте** от ребёнка такой точности записи, особенно это важно при сложении нескольких чисел. Для практики пусть ребёнок запишет (сразу в столбик) и решит несколько примеров, **проверяя решение на калькуляторе** (напомню, что, осваивая десятичные дроби, мы **обязательно используем калькулятор для проверки — но не для счёта!** — и, тем самым, учимся обнаруживать и исправлять ошибки самостоятельно).

При первоначальном знакомстве с десятичными дробями в пятом классе, мы, при сложении и вычитании, уравниваем число десятичных знаков после запятой в обеих дробях, **приписывая нули**. Например, $0,567 + 14,8 = 0,567 + 14,800$. Но как только десятичные дроби освоены, нужно избавляться от привычки приписывания нулей, а научиться «**видеть нули**» (т.е. раздробление) мысленно, как это сделано в примерах.

Вычитание

Примеры.

$$\begin{array}{r}
 \overset{\bullet\bullet\bullet}{0,3701} \\
 - \\
 \hline
 0,1862 \\
 \hline
 0,1839
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overset{\bullet\bullet\bullet}{189,1004} \\
 - \\
 \hline
 0,0398 \\
 \hline
 189,0606
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overset{\bullet\bullet}{75,044} \\
 - \\
 \hline
 3,77 \\
 \hline
 71,274
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{100,00671} \\
 - \\
 \hline
 3,569 \\
 \hline
 96,43771
 \end{array}$$

Примеры записи, даю, как видите, вместе с постановкой точек займа. Однако, напоминая, читатель, что точки возникают у нас последовательно, в процессе счёта.

Практика — таблица 17.

В таблице 17 даны примеры на сложение и вычитание десятичных дробей одновременно. Однако **реально** нужно давать **письменное сложение сразу после устного**. Так же и с вычитанием.

Внимание.

Небольшого набора примеров таблицы 17 вполне достаточно для детей постарше (уже знакомых с десятичными дробями). Но при первом знакомстве, конечно же, нужно увеличить их число, начиная с более простых.

Таблица 17			
	сложение		вычитание
1	$25,02 + 132,5$	1	$7,21 - 3,964$
2	$615 + 31,27$	2	$3,9 - 0,075$
3	$0,03 + 1,17 + 5$	3	$0,907 - 0,0864$
4	$64 + 3,084 + 15,62$	4	$70,1 - 38,04$
5	$0,9 + 0,99 + 9,999 + 9999 + 99,9$	5	$1000 - 890,7$

Ответы — таблица 18.

Таблица 18			
	сложение		вычитание
1	157,52	1	3,246
2	646,27	2	3,825
3	6,2	3	0,8206
4	82,704	4	32,06
5	10110,789	5	109,3

Необходимые пояснения.

В примере 3, сложение, получив ответ 6,20, нужно **сократить** десятичную дробь на 10, т.е. записать 6,2 («вычеркнуть» ноль сотых).

В примере 5, сложение, нужно:

1. Проследить за точностью записи «запятая под запятой, разряд под разрядом» (**без приписывания нулей**).

2. При счёте в разрядах десятых долей и единиц — **напомнить** ребёнку (если он сам не заметит) **о сути действия умножения как сложения равных слагаемых**. То есть, чтобы при счёте, например, десятых долей, он **не складывал** $9 + 9 + 9 + 9$, а умножал $9 \cdot 4 = 36$.

Что касается вычитания, то примеры выбраны так, чтобы приходилось много раз занимать единицу в старших разрядах и раздроблять, **проставляя точки займа**.

Внимание.

Этого набора из десяти примеров вполне достаточно, читатель, чтобы ребёнок (старше 5 класса) освоил грамотную технику письменного сложения и вычитания десятичных дробей, но при одном **непременном условии**: **вы внимательнейшим образом следите за его работой**: за «счётом ручкой» и т.п. В том случае, если вы видите, что ребёнок сомневается в правильности результата, **требуйте**, чтобы он **проверил на калькуляторе, не забывая** при этом **напомнить ему**, что калькулятор — это всего лишь «железка», поскольку очень просто, например, нажать не ту клавишу или не там поставить запятую (если прочитываем число «про себя» и «глазками»). Поэтому, ребёнок должен научиться **доверять себе** (при наличии хорошей счётной техники), т.е. при несовпадении его «ручного» ответа с результатом счёта на калькуляторе, он должен **внимательнейшим образом** пересчитать на калькуляторе (потому что быстрее) и, убедившись, что счёт верен, **внимательнейшим образом проверить** свой «ручной» счёт. Именно при работе с десятичными дробями, калькулятор помогает сформировать **умение поиска своих ошибок**.

Ещё раз внимание!

Кончилась работа с дробной частью — **мгновенно ставим запятую** (граница между целой и дробной частями десятичной дроби).

Замечание.

Ещё раз напомним, что если ребёнок в 5 классе и только осваивает десятичные дроби, то вы, читатель, должны озаботиться сначала относительно небольшим набором более простых примеров с одним и двумя десятичными знаками.

Совместные действия сложения и вычитания десятичных дробей

Для закрепления сложения и вычитания десятичных дробей вполне достаточно нескольких примеров таблицы 19.

Таблица 19			
	примеры	промежуточные результаты	ответ
1	$12,5 - 6,7 + 4,2$	$5,8 + 4,9$	10,7
2	$2,79 - 0,99 + 3,72$	$1,8 + 3,72$	5,52
3	$5,0005 - 3,044 - 0,07 - 0,5$	$1,9565 - 0,07 - 0,5; 1,8865 - 0,5$	2,3865
4	$(34,07 + 25,5) - (3,7 + 5,25)$	$59,57 - 8,95$	50,62

Промежуточные результаты (например, $12,5 - 6,7 = 5,8$ в примере 1) даны для самоконтроля.

Работа идёт по действиям, причём сразу пишем действия «в столбик».

Замечание.

Начиная с 7 класса времени на примеры таблиц 17 и 19 должно уходить 5–10 минут (ближе к 5), если, разумеется, мы грамотно считаем в натуральных числах (глава II).



Умножение десятичных дробей

Сначала, читатель, несколько слов о том, как возникает известное правило умножения десятичных дробей.

Самым прозрачно-наглядным образом обоснование этого правила выявляется превращением десятичных дробей в обыкновенные.

Рассмотрим три примера.

Пример 1.

$$4,3 \cdot 0,7 = \frac{43}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{43 \cdot 7}{100} = \frac{301}{100} = 3,01$$

десятые • десятиые сотые
доли доли

2 знака после запятой

($4,3 = 4\frac{3}{10} = \frac{43}{10}$ — перевели десятичную дробь 4,3 в обыкновенную неправильную дробь

$\frac{43}{10}$.)

Видим, при умножении **десятых** долей получаются **сотые** доли ($\frac{43}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{301}{100}$).

Пример 2.

$$4,3 \cdot 0,07 = \frac{43}{10} \cdot \frac{7}{100} = \frac{43 \cdot 7}{1000} = \frac{301}{1000} = 0,301$$

десятые • сотые тысячные
доли доли

3 знака после запятой

Пример 3.

$$0,43 \cdot 0,07 = \frac{43}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{43 \cdot 7}{10000} = \frac{301}{10000} = 0,0301$$

сотые • сотые десятитысячные
доли доли

4 знака после запятой

Во всех трёх примерах мы перемножали **числители** дробей как **натуральные числа** ($43 \cdot 7 = 301$) и **отделяли** (должны были отделить по смыслу записи обыкновенной дроби в виде десятичной) в произведении **столько десятичных знаков, сколько знаков после запятой было в обоих множителях**.

Количество отделяемых знаков определяется знаменателем дроби-произведения

($\frac{301}{100} = 3,01$; $\frac{301}{1000} = 0,301$; $\frac{301}{10000} = 0,0301$).

Из этих примеров с очевидностью следует **правило умножения** десятичных дробей:
«Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо:

- умножить их как натуральные числа;
- в полученном произведении **отделить запятой** справа налево **столько** десятичных знаков, **сколько их в обоих множителях вместе**,

Если цифр в полученном произведении **меньше** числа десятичных знаков в обоих множителях вместе, то к нему приписывают **слева нули**» [11, с. 47, всё выделено мной. — В.Х.].

(Пример 3: произведение имеет 3 знака, а нужно отделить 4 знака — приписали слева ноль, чтобы было отделено 4 знака после запятой, соответствующие десятичным долям).

Замечание.

К сожалению, если в учебнике 5 класса умножение обыкновенных дробей не изучается, то правило умножения десятичных дробей приходится вводить менее наглядным и общим способом (как, например, в [12], вычисляя площадь прямоугольника со сторонами $a = 4,3$ см и $b = 0,7$ см и переводя сантиметры в миллиметры и обратно:

$$S = a \cdot b = 4,3 \text{ (см)} \cdot 0,7 \text{ (см)} = 43 \text{ (мм)} \cdot 7 \text{ (мм)} = 301 \text{ (мм}^2\text{)} = 3,01 \text{ (см}^2\text{)}).$$

Поскольку перевод единиц измерения и вообще работа с мерами для большинства детей в 5 классе затруднительны (да и не только в 5 классе в наше время), то можно ограничиться в этом случае формальным знанием правила умножения десятичных дробей, **но обязательно показать его обоснование позже**, когда ребёнок научится умножать обыкновенные дроби.



Тренажёр устного счёта: умножение

Таблица 20, несмотря на краткость, позволяет закрепить правило умножения десятичных дробей на достаточном уровне.

Таблица 20					
$4 \cdot 0,7$	$7 \cdot 0,02$	$3 \cdot 3,2$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,3 \cdot 0,06$	$4 \cdot 0,25$
$6 \cdot 0,6$	$5 \cdot 0,06$	$5 \cdot 1,1$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,5 \cdot 0,08$	$8 \cdot 0,15$
$7 \cdot 0,9$	$9 \cdot 0,004$	$2 \cdot 4,3$	$0,8 \cdot 0,9$	$0,4 \cdot 0,05$	$5 \cdot 0,12$
$5 \cdot 0,4$	$2 \cdot 0,003$	$4 \cdot 2,2$	$0,3 \cdot 0,8$	$0,7 \cdot 0,08$	$8 \cdot 2,5$

Необходимые пояснения.

Первый, второй, четвёртый и пятый столбца таблицы 20, как видите, представляют собой в сущности таблицу умножения в применении к десятичным дробям.

Ваше движение ручкой с одного множителя на другой, и **вопрос**: «Четырежды семь ($4 \cdot 0,7$)?.. — или — Семью два ($7 \cdot 0,02$)?.. — или — Трижды шесть ($0,3 \cdot 0,06$)?..» — Ведь перемножаем десятичные дроби **как натуральные числа**, не обращая внимания на запятую.

Ответ ребёнка соответственно: «Двадцать восемь (четыренадцать, восемнадцать)».

Вы — мгновенно! — **вопрос**: «Сколько знаков надо отделить, сколько знаков **в обоих множителях** (подразумевается, после запятой)?».

В $4 \cdot 0,7$ — **один** знак, в $7 \cdot 0,02$ — **два** знака, в $0,3 \cdot 0,06$ — **три** знака.

Значит, не 28, а 2,8; не 14, а 0,14; не 18, а 0,18 (применяем вторую часть правила: отделим в произведении столько знаков после запятой, сколько их в обоих числах).

Результаты умножения второго, четвёртого и пятого столбцов **лучше произносить не «ноль целых»**, а называть **получающиеся доли**: $7 \cdot 0,02 = 14$ сотых, $0,4 \cdot 0,3 = 12$ сотых, $0,3 \cdot 0,06 = 18$ тысячных.

Второй столбец стоит формулировать так: «7 умножить на 2 ... 14 чего (каких долей)? — **сотых**. 9 умножить на 4... 36 чего? — **тысячных**».

Третий столбец — простое поразрядное умножение: $3 \cdot 3,2 = 9$ целых 6 десятых.

Шестой столбец — умение умножать однозначное число на двузначное (глава II) и устное сокращение на 10 или 100 («зачёркивание нулей»): $4 \cdot 0,25 = 1,00 = 1$ (иначе: $4 \cdot 25$ сотых = 100 сотых = 1, или $8 \cdot 15$ сотых = 120 сотых = 1,20 = 1,2).

Ответы — таблица 21.

Таблица 21					
2,8	0,14	9,6	0,12	0,018	$1,00 = 1$
3,6	$0,30 = 0,3$	5,5	0,42	$0,040 = 0,04$	$1,20 = 1,2$
6,3	0,036	8,6	0,72	$0,020 = 0,02$	$0,60 = 0,6$
$2,0 = 2$	0,006	8,4	0,24	0,056	$2,00 = 2$

Умножение десятичных дробей на разрядную единицу

10^n (10; 100; 1000; ...) и 10^{-n} (0,1; 0,01; 0,001; ...)

Умение умножать десятичную дробь на разрядную единицу (**устно!**) крайне важно при переводе единиц измерения в курсе физики (подробно, как я уже говорил, будет рассмотрено в главе VII).

Умножение на 10, 100, 1000, ... (10^n)

Обычно правило этого умножения формулируется так:

«Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т.д., надо запятую в этой дроби **перенести вправо** соответственно на **1, 2, 3** и т.д. **цифры**» ([11, с. 52, всё выделено мной. — В.Х.])

Но вместо того, чтобы запоминать, куда именно (вправо или влево) нужно переносить запятую, стоит сказать о том, что умножая на 10, 100, 1000, ... мы **увеличиваем число** соответственно в 10, 100, 1000, ... раз. А раз число увеличивается, то и запятая будет «сама собой» переноситься **вправо**, поскольку увеличение числа «сдвинет запятую» (ручку) в нужном направлении «автоматом».

Примеры.

$$3,287 \cdot 10 = 32,87;$$

$$3,287 \cdot 100 = 328,7;$$

$$3,287 \cdot 1000 = 3287;$$

$$3,287 \cdot 10000 = 32870.$$

В последнем примере запятая переносится на 4 разряда, поэтому «приписывается ноль» (хотя на самом деле, раздробив тысячные доли в десятитысячные, мы получаем: $3,287 \cdot 10000 = 3,2870 \cdot 10000 = 32870$).

Практика — таблица 22.

Таблица 22		
$4,32 \cdot 10$	$7,55 \cdot 10$	$78,2 \cdot 100$
$4,32 \cdot 100$	$0,0021 \cdot 10$	$1,24 \cdot 1000$
$4,32 \cdot 1000$	$5,284 \cdot 100$	$72,1 \cdot 1000$
$4,32 \cdot 10000$	$0,0032 \cdot 1000$	$0,203 \cdot 10000$

Ответы — таблица 23.

Таблица 23		
43,2	75,5	7820
432	0,021	1240
4320	528,4	72100
43200	3,2	2030

Замечание.

Разумеется, умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... подчиняется общему правилу умножения:

$$3,287 \cdot 10 = 32,870 = 32,87 \quad (3287 \cdot 10 = 32870);$$

$$3,287 \cdot 100 = 328,700 = 328,7 \quad (3287 \cdot 100 = 328700);$$

$$3,287 \cdot 1000 = 3287,000 = 3287 \quad (3287 \cdot 1000 = 3287000).$$

Важное замечание!

Правило умножения десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... позволяет легко переходить **от крупных к более мелким** единицам метрической системы мер.

Примеры.

$$5,615 \text{ м} = (5,615 \cdot 100) \text{ см} = 561,5 \text{ см} \quad (1 \text{ м} = 100 \text{ см});$$

$$3,05 \text{ руб.} = (3,05 \cdot 100) \text{ коп.} = 305 \text{ коп.} \quad (1 \text{ руб.} = 100 \text{ коп.});$$

$$7,032 \text{ т} = (7,032 \cdot 1000) \text{ кг} = 7032 \text{ кг} \quad (1 \text{ т} = 1000 \text{ кг});$$

$$0,3 \text{ тыс.} = (0,3 \cdot 1000) = 300 \quad (1 \text{ тысяча} = 1000 \text{ единиц});$$

$$0,075 \text{ млн.} = (0,075 \cdot 1000000) = 75000 \quad (1 \text{ миллион} = 1000000 \text{ единиц}).$$

(Последние два примера формулируются в виде задачи: записать числа 0,3 тыс.; 0,075 млн. цифрами.)

Умножение десятичных дробей на 0,1; 0,01; 0,001; ... (10^{-n})

Умножение десятичной дроби на 0,1; 0,01; 0,001; ... эквивалентно делению её на 10, 100, 1000, ... как мы узнаем ниже, в п. «Деление десятичных дробей». Но деление почти всегда лучше превращать в умножение. **Умножение десятичной дроби на 0,1; 0,01; 0,001; ... подчиняется, конечно же, общему правилу.** А поскольку, умножая десятичную дробь на 0,1; 0,01; 0,001; ... , мы сначала умножаем её как натуральное число **просто на 1**, т.е. просто берём первый множитель, а потом отделяем столько десятичных знаков, сколько их в обоих множителях, то правило переноса запятой при делении на 10, 100, 1000, ... в этом случае у нас получается автоматически. Единственное, о чём всегда нужно помнить, так это: «считать ручкой» число разрядов, на которые переносится запятая.

Практика — таблица 24.

Таблица 24			
$12 \cdot 0,1$	$56,1 \cdot 0,01$	$37,8 \cdot 0,001$	$2,2 \cdot 0,1$
$0,05 \cdot 0,1$	$1,256 \cdot 0,01$	$5,8 \cdot 0,001$	$4 \cdot 0,001$
$2,6 \cdot 0,1$	$0,04 \cdot 0,01$	$47 \cdot 0,001$	$280 \cdot 0,0001$

Ответы — таблица 25.

Таблица 25			
1,2	0,561	0,0378	0,22
0,005	0,01256	0,0058	0,004
0,26	0,0004	0,047	$0,0280 = 0,028$

Далее можно ещё проще (и это будет лучше!): ставим запятую не по количеству знаков, а исходя из имеющихся долей.

$0,1 \cdot 0,1$ — **десятые** доли умножить на **десятые** получим **сотые**.

$0,1 \cdot 0,01$ — **десятые** доли умножить на **сотые** получим **тысячные**.

$0,01 \cdot 0,01$ — **сотые** доли умножить на **сотые** получим **десятитысячные**.

Ну и так далее.

Например:

$2,6 \cdot 0,1$ — **десятые** доли умножить на **десятые** получим **сотые**, то есть 26 сотых (0,26).

$56,1 \cdot 0,01$ — **десятые** доли умножить на **сотые** получим **тысячные**, то есть 561 тысячная (0,561).

$0,04 \cdot 0,01$ — **тысячные** доли умножить на **сотые** получим **стотысячные**, то есть 1256 стотысячных (0,01256).

$1,256 \cdot 0,01$ — **сотые** доли умножить на **сотые** получим **десятитысячные**, то есть 4 десяти тысячных (0,0004).

То есть опять-таки избавляемся от дробей и работаем в натуральных числах, только с наименованием долей (перевод крупных мер в мелкие)!



Письменное умножение десятичных дробей

Поскольку первая часть правила умножения гласит: умножаем десятичные дроби как натуральные числа, не обращая внимания на запятую, и если мы умеем грамотно умножать натуральные числа (п. «Письменное умножение», глава II), остаётся только показать примеры грамотной записи в столбик множителей, читатель, и дать несколько примеров для практики.

Примеры записи умножения «в столбик» — таблица 26.

Таблица 26					
54,8	10,06	4,3	8,03	0,00803	0,0012
×	×	×	×	×	×
4	0,48	560	1400	0,506	5,6

Внимание.

При слабом владении счётной техникой десятичных дробей, зачастую путаются правила **письменного сложения и умножения**, т.е. при умножении ребёнок располагает множители не как натуральные числа при умножении, а как десятичные дроби при сложении — запятая под запятой.

В этом случае напишите ему несколько примеров, например, из столбцов 2, 5, 6, таблицы 26 сначала без запятой, как **умножение натуральных чисел «в столбик»** ($1006 \cdot 48$; $803 \cdot 506$; $12 \cdot 56$), а затем допишите недостающие разряды и проставьте запятые (например, 10,06; 0,0803; 0,0012).

Практика — таблица 27.

Таблица 27			
$12,7 \cdot 5$	$0,41 \cdot 0,07$	$40,8 \cdot 6,79$	$0,0077 \cdot 0,545$
$8,14 \cdot 70$	$0,009 \cdot 21,1$	$4,08 \cdot 6,79$	$0,402 \cdot 0,0905$
$8 \cdot 0,0703$	$120 \cdot 3,24$	$0,408 \cdot 679$	$1400 \cdot 0,000205$

Ответы — таблица 28.

Таблица 28			
63,5	0,028.7	277,032	0,004.196.5
$569,80 = 569,8$	0,189.9	27,703.2	$0,036.381.0 = 0,036.381$
0,5624	$388,80 = 388,8$	277,032	$0,287.000 = 0,287$

Пояснение к таблицам 27–28.

Для удобства чтения чисел я, как видите, проставил точки, отделяющие разряд тысячных от разряда десятитысячных и разряд миллионных от разряда десятимиллионных (п. «Проблемы чтения десятичных дробей»).

При грамотной записи умножения «в столбик» мы, там где надо, меняем порядок множителей, например, $8 \cdot 0,0703 = 0,0703 \cdot 8$; $0,009 \cdot 21,1 = 21,1 \cdot 0,009$; $120 \cdot 3,24 = 3,24 \cdot 120$. Так же поступаем со всеми примерами четвёртого столбца.

Дроби 0,009; 0,0077 — сначала записываем их умножение «в столбик» без нулей: $21,1 \cdot 9$; $0,545 \cdot 77$ и только потом приписываем недостающие нули, поскольку трудно заранее рассчитать положение последней цифры (9 в 0,009 и 7 в 0,0077), если начать записывать эти дроби слева направо, с «ноль целых».

При умножении на число с нулями на конце ($8,14 \cdot 70$; $3,24 \cdot 120$; $0,000205 \cdot 1400$), как и при умножении натуральных чисел, **«сносим нули»** множителей 70, 120, 1400 в самом конце умножения.

Внимание!

Эти нули при простановке запятой в произведении мы учитываем, т.к. они возникают **не в результате раздробления** разрядов «дробного хвостика», а в результате **увеличения** произведения в 10 и 100 раз ($70 = 7 \cdot 10$; $120 = 12 \cdot 10$; $1400 = 14 \cdot 100$).

Данный факт отражён в таблице 28, где ответы даны сначала с получившимися нулями и проставленной запятой, и лишь потом **нули дробной части** «зачёркиваются» (дроби сокращаются на 10, 100 и 1000).

В примерах третьего столбца таблицы 27 достаточно, чтобы ребёнок один раз перемножил **натуральные числа** $408 \cdot 679 = 277032$, поскольку в произведении 277032 он легко отделит нужное число знаков после запятой.

Наконец, в примере $0,41 \cdot 0,07$ у нас **запятая будет написана под запятой**. На это **нужно обратить внимание ребёнка** и сказать, что только в таких частных случаях (ещё, например, в $4,08 \cdot 6,79$) такое будет случаться, но это — только частный случай.



Деление десятичных дробей

Данный раздел разбит на два подраздела: деление десятичной дроби **на натуральное число** и деление десятичной дроби **на десятичную дробь**, но главное — научиться грамотно и быстро делить на натуральное число, поскольку, благодаря основному свойству дроби, деление на десятичную дробь сводится к делению на натуральное число.

И в тренажёре устного счёта, и в письменном делении оба подраздела излагаются последовательно, один за другим. Но **при работе с ребёнком сначала** отрабатывается устное и письменное деление на натуральное число **и только потом** — на десятичную дробь.

Деление десятичной дроби на натуральное число

Просмотрите ещё раз, читатель, таблицу 17, п. «Техника письменного деления», письменное деление, глава II.

В принципе, уже таблицы 17 достаточно, чтобы понять технику деления десятичных дробей. Но ради наглядности, я в таблице 29 покажу деление десятичных дробей на натуральное число.

Таблица 29			
I	II	III	IV
$\begin{array}{r} 8,7 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 2,7 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79,2 \overline{) 2} \\ \underline{6} \\ 19 \\ \underline{18} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7,92 \overline{) 2} \\ \underline{6} \\ 19 \\ \underline{18} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3,4 \overline{) 4} \\ \underline{30} \\ 28 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$

Как и при делении натуральных чисел «уголком», самым важным является знание ребёнком **разрядов числа** и **ключевое слово «дробим»** (понимание того, что одна единица старшего разряда раздробляется в десять единиц младшего).

Если вы, читатель, просмотрите примеры таблицы 29, то **увидите**, что деление десятичной дроби на натуральное число осуществляется так же, как и деление натуральных чисел.

Вертикальной чертой я (не надеясь только на запятую) отделил целые части от дробных.

Внимание.

Ребёнок безусловным образом должен следовать правилу: закончилось деление целой части — **в частном мгновенно ставим запятую**.

Далее, кружками я выделил те остатки, **раздробление** которых нас интересует, и каковое раздробление мы должны **проговаривать вслух ребёнку**:

I — 2 единицы дробим в 20 десятичных;

II — 1 единицу дробим в 10 десятичных;

III — 1 единицу дробим в 10 десятичных, затем 1 десятую дробим в 10 сотых;

IV — 3 единицы дробим в 30 десятичных, затем 2 десятичных дробим в 20 сотых.

Замечание.

В примере IV я отчеркнул 3 целых и под цифрой 3 написал раздробление в 30 десятичных. Но это сделано исключительно ради наглядности. В реальной работе мы сразу приписываем цифру 0.

Деление десятичной дроби на десятичную дробь

Десятичную дробь мы всегда можем превратить в натуральное число, умножив её на разрядную единицу 10, 100, 1000, ... («сдвинув запятую» вправо), а на натуральное число мы делить умеем (только что научились).

Если деление десятичных дробей мы запишем с помощью дробной черты, то, **умножая дробь-знаменатель** на разрядную единицу (т.е. сделав делитель **натуральным числом**), мы, по основному свойству дроби, должны **умножить и дробь-числитель** на ту же разрядную единицу.

Иными словами, **надо в делимом и делителе перенести запятую вправо** на столько десятичных знаков, **сколько десятичных знаков в делителе** (сделать делитель натуральным числом). — Это и есть правило деления на десятичную дробь.

Примеры.

$$\frac{3,78}{0,4} = \left(\frac{3,78 \cdot 10}{0,4 \cdot 10} \right) = \frac{37,8}{4};$$

$$\frac{25,125}{0,005} = \left(\frac{25,125 \cdot 1000}{0,005 \cdot 1000} \right) = \frac{25125}{5};$$

$$\frac{7,5}{0,25} = \left(\frac{7,5 \cdot 100}{0,25 \cdot 100} \right) = \frac{750}{25};$$

$$\frac{0,004}{0,08} = \left(\frac{0,004 \cdot 100}{0,08 \cdot 100} \right) = \frac{0,4}{8}.$$



Тренажёр устного счёта: деление

Деление десятичной дроби на натуральное число.

Таблица 30				
44,4 : 4	0,36 : 9	0,032 : 4	0,45 : 15	20,35 : 5
24,6 : 3	0,48 : 4	6,018 : 3	0,48 : 16	3,15 : 3
6,8 : 2	0,12 : 2	8,024 : 8	50,75 : 25	42,14 : 7

Таблица 30 — разминочная. Мы быстро отрабатываем деление **отдельно целой и отдельно дробной** частей. Тем не менее, будьте внимательны со столбцами 2, 3 и 4.

Во втором и четвёртом столбцах нужно задать **вопрос-пояснение**: «Какие доли делим?.. Сотые ($0,36 = 36$ сотых; $0,45 = 45$ сотых). Значит, и результат (частное) будет в сотых долях:

$$36 \text{ сотых} : 9 = 4 \text{ сотых} = 0,04 \quad (0,36 : 9 = 0,04);$$

$$45 \text{ сотых} : 15 = 3 \text{ сотых} = 0,03 \quad (0,45 : 15 = 0,03).$$

Аналогично, в третьем столбце — **тысячные** доли, и результат также в **тысячных** долях:

$$32 \text{ тысячных} : 4 = 8 \text{ тысячных} = 0,008 \quad (0,032 : 4 = 0,008).$$

Кроме того, в четвёртом столбце используется знание базовых чисел (п. «Базовые числа», тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II).

Ответы — таблица 31.

Таблица 31				
11,1	0,04	0,008	0,03	4,07
8,2	0,12	2,006	0,03	1,05
3,4	0,06	1,003	2,03	6,02

Таблица 32 целиком основана на **идее раздробления** единицы старшего разряда в десять единиц младшего.

Несмотря на простоту примеров, **ребёнок сделает крупный шаг** в расширении своей вычислительной (к тому же, устной) техники.

Таблица 32					
I		II		III	
0,2 : 4	6,1 : 2	0,3 : 15	0,8 : 80	7,2 : 6	1,68 : 4
0,4 : 8	36,3 : 6	75,5 : 25	40,4 : 20	8,4 : 7	1,89 : 3
0,1 : 5	16,2 : 4	24,6 : 12	60,6 : 30	5,1 : 3	5,67 : 7
0,03 : 6	25,4 : 5	45,9 : 45	700,7 : 70	9,5 : 5	7,28 : 8

Как видите, читатель, таблица 32 разбита на три группы, по два столбца в каждой группе.

Вся техника устного деления путём раздробления, фактически, даётся в первом столбце первой группы. Поэтому я его опишу подробно.

Необходимые пояснения.

I группа

Две десятых мы не можем поделить на 4 ($0,2 : 4$), но мы можем **раздробить 2 десятых** в 20 **сотых** ($0,2 = 0,20$). А вот 20 сотых на 4 делится, получим 5 сотых — $20 \text{ сотых} : 4 = 5 \text{ сотых} = 0,05$ ($0,2 : 4 = 0,20 : 4 = 0,05$ — см. примеры таблицы 30).

Аналогично — остальные примеры первого столбца:

$$4 \text{ десятых} : 8 = 40 \text{ сотых} : 8 = 5 \text{ сотых} = 0,05 \quad (0,4 : 8 = 0,40 : 8 = 0,05);$$

$$1 \text{ десятая} : 5 = 10 \text{ сотых} : 5 = 2 \text{ сотых} = 0,02 \quad (0,1 : 5 = 0,10 : 5 = 0,02);$$

$$3 \text{ сотых} : 6 = 30 \text{ тысячных} : 6 = 5 \text{ тысячных} = 0,005 \quad (0,03 : 6 = 0,030 : 6 = 0,005).$$

Для ребёнка — только один **вопрос-пояснение**: «Сколько **сотых** в 0,4 (в 4 **десятих**)? — или — **Раздробь** 3 **сотых** в **тысячные**. Сколько **тысячных**?».

При необходимости, тотчас выписываете среднюю часть равенств, записанных в скобках (0,40 : 8; 0,10 : 5; 0,030 : 6).

Но в любом случае, первый пример показывает ребёнку подробно.

Второй столбец — закрепляющий. По ответам **видим**, как отдельно делим целые части дробей и отдельно — дробные.

II группа

Отличие от I группы только в том, что делим на двузначные числа. Посмотрите на решение пары примеров с промежуточной пояснительной записью в скобках:

$$75,5 : 25 = (75,50 : 25) = 3,02;$$

$$0,8 : 80 = (0,80 : 80) = 0,01.$$

Внимание.

Во всех примерах II группы, как и I группы, следите за тем, чтобы ребёнок чётко **видел и понимал**, что после раздробления **десятих** долей **в сотые**, он в частном получает **тоже со-тые** доли.

Замечание.

В третьем столбце мы опять имеем дело с базовыми числами (кроме последнего примера).

III группа

Примеры III группы, на первый взгляд, вроде бы сложнее. Однако, если мы поработали с главой II, никаких проблем у нас не возникнет.

Примеры 5 и 6 столбцов — это примеры таблицы 5, п. «Деление двузначного числа на однозначное» и таблицы 21, п. «Расширенный вариант поразрядного деления», тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II.

Разумеется, и здесь раздробляем **1 целую** единицу в **10 десятих** долей, а тогда $7 \text{ целых} = 70 \text{ десятих}$ и $7,2 = 72 \text{ десятих}$.

72 десятих — это уже **натуральное** число, которое без труда делим на 6, как натуральные числа в таблице 5, главы II ($72 : 6 = (60 + 12) : 6 = 12$).

Самое главное — всё время помнить наименование долей результата: что делим?.. **десятые** доли. Значит, и в результате **получаем десятые** доли: $72 \text{ десятих} : 6 = 12 \text{ десятих}$, т.е. $7,2 : 6 = 1,2$.

Примеры 5 столбца — это просто расширение техники деления натуральных чисел на десятичные дроби: умеем быстро и грамотно делить двузначное число на однозначное в натуральных числах — никаких проблем с аналогами в десятичных дробях.

А вот примеры 6 столбца **технически легче** делать поразрядно.

Примеры.

$$1,05 : 5.$$

1 целая **не делится** на 5 — значит, в **разряде целых** в частном пишем «**ноль**». Раздробляем: $1 \text{ целая} = 10 \text{ десятих}$. **10 десятих** делится на 5 — **2 десятих** в частном. Да ещё **5 сотых** делим на 5 — **1 сотая** в частном:

$$1,05 : 5 = 0,21.$$

Аналогично пример:

$$4,26 : 6.$$

4 целых **не** делится на 6 — в разряде целых 0. 42 *десятых* : 6 = 7 *десятых*. Да ещё 6 *сотых* : 6 = 1 *сотая* :

$$4,2\dot{.}6 : 6 = 0,71.$$

Замечание.

Вы видите, читатель, что если поставить **точку**, как у меня, то сразу **видны нужные доли**, которые делим (**не путать точку**, как «счёт ручкой» **с запятой**, отделяющей целую часть от дробной!).

Внимание.

Тот же поразрядный принцип деления можем теперь применить и к первым примерам таблицы 32, — но только теперь, когда чётко практически освоили идею раздробления! Просто говорим: **если единиц какого-либо разряда в делимом не хватает, то в частном в этом разряде пишем «ноль»:**

$$0,2 : 4 — 0 \text{ целых} : 4 = 0 \text{ целых};$$

$$2 \text{ десятых} : 4 = 0 \text{ десятых}.$$

А вот теперь, раздробляя 2 десятых в 20 сотых:

$$20 \text{ сотых} : 4 = 5 \text{ сотых}, \text{ т.е. } 0,2 : 4 = 0,05.$$

Аналогично с тысячными:

$$0,03 : 6 — 0 \text{ целых} : 6 = 0 \text{ целых};$$

$$0 \text{ десятых} : 6 = 0 \text{ десятых};$$

$$3 \text{ сотых} : 6 = 0 \text{ сотых}.$$

Раздробляя 3 сотых в 30 тысячных:

$$30 \text{ тысячных} : 6 = 5 \text{ тысячных}, \text{ т.е. } 0,03 : 6 = 0,005.$$

Ответы к таблице 32 — таблица 33.

Таблица 33					
I		II		III	
0,05	3,05	0,02	0,01	1,2	0,42
0,05	6,05	3,02	2,02	1,2	0,63
0,02	4,05	2,05	2,02	1,7	0,81
0,005	5,08	1,02	100,01	1,9	0,91

Деление десятичной дроби на десятичную дробь

Поскольку деление на десятичную дробь сводится к делению на натуральное число (примеры выше, в разделе «Деление десятичных дробей»), то я ограничусь разбором нескольких примеров и практикой таблицы 34.

Замечание.

Напомните ребёнку, что, **переноса запятую** в делителе и делимом на 1, 2, 3, ... разряда, мы, тем самым, — **по основному свойству дроби** — **увеличиваем** одновременно и делимое и делитель в 10, 100, 1000, ... раз.

Примеры.

$$0,9 : 0,3 = (9 : 3) = 3;$$

$$0,09 : 0,3 = (0,9 : 3) = 0,3;$$

$$0,45 : 0,5 = (4,5 : 5) = 0,9;$$

$$2,1 : 0,7 = (21 : 7) = 3;$$

$$2 : 0,2 = (20 : 2) = 10;$$

$$28 : 0,14 = (2800 : 14) = 200;$$

$$4,2 : 0,21 = (420 : 21) = 20;$$

$$0,36 : 0,12 = (36 : 12) = 3.$$

Или, записывая основное свойство дроби «в лоб»:

$$0,9 : 0,3 = \frac{0,9}{0,3} = \frac{0,9 \cdot 10}{0,3 \cdot 10} = \frac{9}{3} = 9 : 3 = 3.$$

Замечание!

Если бы мы сначала познакомились с обыкновенными дробями, с **основным свойством дроби**, то понимание «переноса запятой» при делении на десятичную дробь не представляло никаких проблем в 5-ом классе!

Внимание.

В примерах в скобках даны числа **после переноса запятой**. Ребёнок должен **проговаривать их вслух** при делении. При затруднениях, пусть **выписывает** этот «перенос запятой» (т.е. деление чисел в скобках), чтобы научиться **видеть** его при устном счёте.

Практика — таблица 34.

Таблица 34				
0,8 : 0,4	4 : 0,4	3,2 : 0,8	7 : 0,07	0,056 : 0,08
0,06 : 0,3	5 : 0,1	2,4 : 1,2	2,5 : 0,05	0,036 : 0,09
0,49 : 0,7	8 : 0,4	5,6 : 0,8	0,8 : 0,02	0,063 : 0,07

Внимание!

В пятом столбце, читатель, затруднительно удержать в уме перенос запятой и последующее раздробление. Поэтому сначала **пишем** «перенос запятой»: $5,6 : 8$, а уже затем **устно** говорим ответ: $0,7$ ($0,056 : 0,08 = 5,6 : 8 = 0,7$).

Обязательно скажите ребёнку об этом!

Да, можно и устно, но велик риск ошибиться, особенно на первых порах.

Ответы — таблица 35.

Таблица 35				
2	10	4	100	0,7
0,2	50	2	50	0,4
0,7	20	7	40	0,9

Деление десятичных дробей на разрядную единицу

10^n (10; 100; 1000; ...) и 10^{-n} (0,1; 0,01; 0,001; ...)

Деление десятичных дробей на 0,1; 0,01; 0,001; ... (10^{-n})

При делении просто на единицу число (делимое) не меняется.

При делении на 0,1; 0,01; 0,001; ... **делимое** просто **увеличивается** в 10, 100, 1000, ... раз — «перенос запятой» (т.е. это деление эквивалентно умножению на 10, 100, 1000, ...).

Примеры.

$$0,5 : 0,1 = (5 : 1) = 5;$$

$$0,15 : 0,1 = (1,5 : 1) = 1,5;$$

$$1,487 : 0,01 = (148,7 : 1) = 148,7;$$

$$0,0026 : 0,001 = (2,6 : 1) = 2,6.$$

Правило деления десятичной дроби на разрядную единицу 0,1; 0,01; 0,001; ... подчиняется, конечно же, **общему правилу деления** десятичной дроби на десятичную дробь.

Практика — таблица 36.

Таблица 36			
19,2 : 0,1	3,9 : 0,01	0,025 : 0,001	0,0017 : 0,001
0,2 : 0,1	0,19 : 0,01	7,08 : 0,001	0,088 : 0,1
4,71 : 0,1	370 : 0,01	0,16 : 0,001	567 : 0,0001

Ответы — таблица 37.

Таблица 37			
192	390	25	1,7
2	19	7080	0,88
47,1	37000	160	5.670.000

Внимание!

Как видим, деление крайне лёгкое.

В этом-то и таится, как всегда, опасность «расслабиться»!

Считать — только ручкой (передвигаться по разрядам делимого)!

Там, где приходится приписывать большое число нулей (370 : 0,01; 567 : 0,0001) — сначала аккуратно **написать** результат, и лишь затем прочесть его.

Деление на 10, 100, 1000, ... (10^n)

Деление на 10, 100, 1000, ... **сводится** к уже рассмотренному выше **умножению** на 0,1; 0,01; 0,001; ...

Вы знаете, читатель, что, например, дробь $\frac{2}{3}$ записывается в виде $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$ (по правилу

умножения обыкновенных дробей, глава III: $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$).

Аналогично мы можем записать:

$$5 : 10 = \frac{5}{10} = 5 \cdot \frac{1}{10} = 5 \cdot 0,1;$$

$$9 : 100 = \frac{9}{100} = 9 \cdot \frac{1}{100} = 9 \cdot 0,01.$$

Точно так же для десятичных дробей пишем **деление в виде умножения**:

$$54 : 10 = 54 \cdot 0,1 = 5,4;$$

$$5,4 : 10 = 5,4 \cdot 0,1 = 0,54;$$

$$0,54 : 100 = 0,54 \cdot 0,01 = 0,0054.$$

Конечно, при делении на 10, 100, 1000, ... делимое **уменьшается** в 10, 100, 1000, ... раз, точно так же, как при умножении на 0,1; 0,01; 0,001; ... что выражается в **сдвиге запятой делимого влево** на 1, 2, 3, ... разряда

Но **при переводе единиц измерения** мы будем **не делить** на 10, 100, 1000, ... а **умножать** на 0,1; 0,01; 0,001; ...

Практика — таблица 38.

Таблица 38			
12,3 : 10	425,2 : 100	0,387 : 10	17 : 100
0,1 : 10	15,3 : 100	0,544 : 100	21 : 1000
5 : 10	587 : 1000	0,95 : 1000	720 : 10000

Ответы — таблица 39.

Таблица 39			
1,23	4,252	0,0387	0,17
0,01	0,153	0,00544	0,021
0,5	0,587	0,00095	0,0720 = 0,072

Важное замечание.

Правило деления десятичных дробей на 10, 100, 1000, ... (или, что то же, умножения на 0,1; 0,01; 0,001; ...) позволяет легко переходить **от мелких к более крупным** единицам метрической системы мер.

Примеры.

$$234 \text{ мм} = (234 : 10) \text{ см} = (234 \cdot 0,1) \text{ см} = 23,4 \text{ см} \quad (1 \text{ мм} = 0,1 \text{ см});$$

$$139 \text{ коп.} = (139 : 100) \text{ руб.} = (139 \cdot 0,01) \text{ руб.} = 1,39 \text{ руб.} \quad (1 \text{ коп.} = 0,01 \text{ руб.});$$

$$1084 \text{ кг} = (1084 : 1000) \text{ т} = (1084 \cdot 0,001) \text{ т} = 1,084 \text{ т} \quad (1 \text{ кг} = 0,001 \text{ т});$$

$$52300 = (52300 \cdot 0,001) \text{ тыс.} = 52,3 \text{ тыс.}$$

(Последний пример формулируется в виде задачи: выразить число 52300 в тысячах.)



Письменное деление десятичных дробей

Ещё раз повторю: если мы научились грамотно делить натуральные числа (п. «Письменное деление», глава II) и, выше, практически освоили идею раздробления, то в этом разделе мы просто, быстро и без усилий расширяем нашу технику письменного деления натуральных чисел на десятичные дроби.

Никаких особых пояснений не требуется — посмотрите ещё раз таблицу 29, п. «Деление десятичной дроби на натуральное число». Поэтому я просто привожу **необходимый минимум** примеров и ответы к ним.

Если вы, читатель, дадите часть примеров ребёнку для самостоятельного решения, то **напомните ему об обязательной проверке на калькуляторе** (для поиска и исправления возможных ошибок).

Примеры взяты из [11].

Деление десятичной дроби на натуральное число

Практика — таблица 40.

Таблица 40		
16,8 : 12	123,2 : 4	34,153 : 17
234,3 : 11	7,56 : 15	68,544 : 17
1,824 : 12	32,4 : 16	67,268 : 67
0,132 : 11	180 : 900	7,999 : 38

Ответы — таблица 41.

Таблица 41		
1,4	30,8	2,009
21,3	0,504	4,032
0,152	2,025	1,004
0,012	0,2	0,2105

В учебнике задание «Решить примеры таблицы 42» может формулироваться двояко: **выполнить деление** или **представить обыкновенную дробь в виде десятичной**, причём обыкновенная дробь даётся обычно в виде частного, т.е. нужно частное записать в виде

обыкновенной дроби, например, $9 : 4 = \frac{9}{4}$ и затем перевести её в десятичную.

Таблица 42			
выполнить деление		представить в виде десятичной дроби	
1 : 2	1 : 4	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{8}$
3 : 5	1 : 8	$\frac{17}{4}$	$\frac{2}{25}$
3 : 4	7 : 4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{125}$
4 : 5	1 : 5	$\frac{16}{5}$	$\frac{3}{250}$

Примеры таблицы 42, как вы видите, читатель, можно выполнять как письменно, так и устно. Письменный вариант используем при первоначальном знакомстве с десятичными дробями.

Необходимые замечания.

Деление **на 2 и 5** мы с лёгкостью выполняем устно, раздробляя целые единицы в десятые доли, как в тренажёре устного счёта.

Но это же деление можно записать в виде обыкновенной дроби и воспользоваться основным свойством дроби для приведения её к наименьшему **десятичному** знаменателю 10:

$$1 : 2 = \frac{\overset{5}{\underset{2}{1}}}{2} = \frac{5}{10} = 0,5;$$

$$3 : 5 = \frac{\overset{2}{\underset{5}{3}}}{5} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Обратите внимание, что при делении **на 4**, только записав деление в виде обыкновенной дроби и приводя её к знаменателю 100, мы можем **легко устно** выполнить это деление. То же относится к делению **на 8 и 25**.

$$1 : 4 = \frac{\overset{25}{\underset{4}{1}}}{4} = \frac{25}{100} = 0,25;$$

$$3 : 4 = \frac{\overset{25}{\underset{4}{3}}}{4} = \frac{75}{100} = 0,75;$$

$$2 : 25 = \frac{\overset{4}{\underset{25}{2}}}{25} = \frac{8}{100} = 0,08;$$

$$1 : 8 = \frac{\overset{125}{\underset{8}{1}}}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125;$$

$$3 : 250 = \frac{\overset{4}{\underset{250}{3}}}{250} = \frac{12}{1000} = 0,012.$$

Разумеется, если имеем неправильную дробь, то сначала выделяем целую часть, а уж только потом «дробный хвостик» превращаем в десятичную дробь:

$$7 : 4 = \frac{7}{4} = 1 \frac{\overset{25}{\underset{4}{3}}}{4} = 1 \frac{75}{100} = 1,75.$$

Внимание.

Стоит **запомнить** приведение следующих дробей к наименьшему десятичному знаменателю:

$$\frac{\overset{25}{\underset{4}{1}}}{4} = \frac{25}{100}; \quad \frac{\overset{125}{\underset{8}{1}}}{8} = \frac{125}{1000}; \quad \frac{\overset{4}{\underset{25}{1}}}{25} = \frac{4}{100}; \quad \frac{\overset{8}{\underset{125}{1}}}{125} = \frac{8}{1000}; \quad \frac{\overset{4}{\underset{250}{1}}}{250} = \frac{4}{1000}.$$

(Последний пример — вариация дроби $\frac{1}{25}$.)

Ответы к таблице 42 — таблица 43.

Таблица 43			
0,5	0,25	2,25	0,625
0,6	0,125	4,25	0,08
0,75	1,75	0,6	0,024
0,8	0,2	3,2	0,012

Деление десятичной дроби на десятичную дробь

Практика — таблица 44.

Таблица 44		
$3,76 : 0,4$	$7,2 : 0,036$	$86,1 : 2,46$
$3,5 : 0,04$	$41,58 : 5,4$	$130,248 : 6,48$
$1,75 : 1,4$	$49,44 : 4,8$	$20,3812 : 4,06$
$91 : 0,14$	$41,038 : 3,4$	$51,912 : 50,4$

Ответы — таблица 45.

Таблица 45		
9,4	200	35
87,5	7,7	20,1
1,25	10,3	5,02
650	12,07	1,03

Внимание!

Как таблица 40, так и таблица 44 **требуют** от ребёнка **отличного умения** делить **натуральные числа**.

Поэтому, читатель, совершенно очевидно, что прежде чем браться за десятичные дроби, вам обязательно нужно поработать с натуральными числами.

Конечно, в идеале нужно было бы хорошо проработать всю главу II. Однако, **если есть необходимость быстро освоить формальную технику деления**, то, в принципе, вы можете позволить себе проработать только письменное деление натуральных чисел **в нужной мере** (например, таблицы 17–25, п. «Письменное деление», глава II), а потом сразу взяться за деление десятичных дробей. Но, разумеется, вы должны отдавать себе отчёт в том, что это лишь полумера, так сказать, скорая помощь в нужный момент. А грамотная техника требует хорошей проработки главы II.

Замечание.

Второй и третий столбцы таблицы 44 — это наращивание техники деления на дву- и трёхзначные числа. При недостаточной технике деления в натуральных числах третий столбец временно можно пропустить.



Обучающая контрольная**(совместные действия с десятичными дробями)**

Обучающая контрольная — это самостоятельное решение ребёнком примеров, для которых даны **промежуточные результаты** (ответы к каждому действию).

Наличие промежуточных результатов позволяет ребёнку **мгновенно зафиксировать наличие ошибки** и тут же заняться её поиском и исправлением. При необходимости, он может обратиться к преподавателю за помощью (если речь идёт о школьном уроке). Преподаватель же получает возможность **индивидуальной помощи** ребёнку **именно в тот момент, когда она нужна**.

Подобные обучающие контрольные необходимо использовать на всех этапах арифметической подготовки детей, как только появляются примеры в несколько действий.

При наличии хорошей арифметической техники обучающая контрольная занимает немного времени на уроке и помогает **выявлять и ликвидировать** имеющиеся пробелы индивидуально у каждого ребёнка.

Пример 1.

$$\begin{array}{ccccccccc} \textcircled{1} & & \textcircled{3} & & \textcircled{2} & & \textcircled{4} & & \textcircled{5} \\ (4,44 : 3,7 - 0,56 : 2,8) : 0,25 - 0,8 = 3,2. \end{array}$$

1) 1,2; 2) 0,2; 3) 1; 4) 4; 5) 3,2.

Замечание.

Все действия, кроме первого, легко выполняются устно.

Пример 2.

$$\begin{array}{ccccccccc} \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \textcircled{5} & & \textcircled{3} & & \textcircled{4} \\ 10,79 : 8,3 \bullet 0,7 - 0,46 \bullet 3,15 : 6,9 = 0,7. \end{array}$$

1) 1,3; 2) 0,91; 3) 1,449; 4) 0,21; 5) 0,7.

Пример 3.

$$\begin{array}{ccccccccc} \textcircled{1} & & \textcircled{3} & & \textcircled{2} & & \textcircled{4} & & \textcircled{6} & & \textcircled{5} \\ (3,4 : 1,7 + 0,57 : 1,9) \bullet 4,9 + 0,0825 : 2,75 = 11,3. \end{array}$$

1) 2; 2) 0,3; 3) 2,3; 4) 11,27; 5) 0,03; 6) 11,3.

Замечание.

Первые три действия легко выполняются устно.



Представление обыкновенной дроби в виде конечной десятичной дроби

Так как обыкновенная дробь арифметически выражает действие деления, то мы можем попытаться поделить числитель на знаменатель, чтобы записать обыкновенную дробь в виде десятичной.

Примеры.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4; & 4) \frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333... = 0,(3); \\ 2) \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75; & 5) \frac{2}{9} = 2 : 9 = 0,222... = 0,(2); \\ 3) \frac{3}{20} = 3 : 20 = 0,15; & 6) \frac{2}{15} = 2 : 15 = 0,1333... = 0,1(3). \end{array}$$

Все дроби — **несократимые**. Но первые три мы смогли превратить в **конечные** десятичные дроби, а последние три — в **бесконечные** десятичные дроби (иначе говорят: в периодические, с периодом соответственно 3, 2, 3).

Разберёмся, почему первые три дроби мы смогли преобразовать в конечные десятичные.

Посмотрите **на знаменатели** этих дробей, читатель:

$$5 = 5 \cdot 1; \quad 4 = 2 \cdot 2; \quad 20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Видим, что знаменатели состоят только из **простых множителей 2 и 5**.

В последних трёх дробях либо вообще нет множителей 2 и 5, либо, помимо, например, множителя 5, имеется другой простой множитель ($15 = 3 \cdot 5$).

Десятичные дроби, как мы помним, это дроби со знаменателем 10, 100, 1000, ... и эти знаменатели **тоже состоят только из множителей 2 и 5**.

Значит, в виде конечной десятичной дроби можно представить только такую обыкновенную несократимую дробь, знаменатель которой содержит только простые множители 2 и 5.

Внимание!

Это правило ребёнок должен твёрдо **запомнить**.

Итак, мы можем представить обыкновенную дробь в виде конечной десятичной двумя способами:

1. Делим числитель на знаменатель как натуральные числа «уголком».
2. Приводим дробь к наименьшему десятичному знаменателю 10, 100, 1000, ... (как это сделано при разборе примеров таблицы 42).



Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями

Поскольку мы умеем переводить обыкновенные дроби в десятичные и наоборот, то можем теперь выполнять и арифметические действия с теми и другими дробями.

Дать какие-либо общие рекомендации наиболее эффективных способов решения подобных примеров вряд ли представляется возможным. Всё обусловлено уровнем арифметической техники ребёнка и его практическим опытом. Можно, пожалуй, посоветовать только одно: не бросаться сразу «глупо и тупо» писать первое увиденное решение, а сначала проанализировать арифметическое действие и выбрать тот вид дробей, который, как кажется, будет наиболее прост для счёта (в смысле — менее утомителен). В таких случаях напомним ребёнку, что **голова должна опережать руки**: сначала хоть пару секунд подумать, как легче и лучше, а уж только потом делать (что, кстати говоря, необходимо не только в арифметике).

Пример.

$$\textcircled{3} \quad \frac{(152 \overset{\textcircled{1}}{\frac{3}{4}} - 148 \overset{\textcircled{2}}{\frac{3}{8}}) \cdot 0,3}{0,2} = 6 \frac{3}{20} \quad (6,5625)$$

$$1) \quad 152 \frac{\overset{3^2}{}}{4} - 148 \frac{3}{8} = 4 \frac{6-3}{8} = 4 \frac{3}{8};$$

$$2) \quad 4 \frac{3}{8} \cdot 0,3 = \frac{7 \cdot 35 \cdot 3}{8 \cdot 10_2} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 2};$$

или

$$2') \quad 4 \frac{\overset{3^{125}}{}}{8} \cdot 0,3 = 4,375 \cdot 0,3 = 1,3125;$$

11

$$3) \quad \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 2} : 0,2 = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 2} : \frac{2}{10} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 2} : \frac{1}{5} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{105}{16} = 6 \frac{9}{16} \quad (6,5625);$$

или

$$3') \quad 1,3125 : 0,2 = 6,5625;$$

Видим, во втором действии (2') мы могли бы превратить $4 \frac{3}{8}$ в 4,375. Оба варианта действий — в обыкновенных дробях и в десятичных — в данном случае равноправны, но это только потому, что в третьем действии идёт деление всего лишь на 0,2. А будь у нас дву-трёхзначное число, — деление в десятичных дробях стало бы технически сложнее (тем более, что совершенно не обязательно мы получаем при делении конечную десятичную дробь. В таком случае, зачастую, предпочтительнее работать с обыкновенными дробями).

Повторюсь, умение наиболее комфортным образом работать совместно с обыкновенными и десятичными дробями возникает на основе всей предыдущей арифметической техники и долговременной вычислительной практики.



Проценты

Со словом «процент» приходится встречаться очень часто: слышать по радио встречать в учебниках, газетах и т.п.

Например, относительная влажность воздуха 75%; уровень инфляции за год составил 13, 2%; бригада за неделю выполнила 35% месячного плана; 25% учащихся получили неудовлетворительные оценки.

И вообще, в процентах выражают очень многие величины, **за изменением** которых, их повышением или понижением, хотят проследить.

Что же такое «процент»?

Это всего лишь **особое название** сотой **части** какой-либо величины.

Определение.

Процентом называется одна сотая часть.

Обозначают процент знаком %.

Итак, по определению

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Величину, проценты от которой хотят найти, принимают за нечто целое, **за одну целую единицу**. Поскольку это целое разбито на сто долей, каждая из которых называется «1 процент», то **содержимым целого** считают **100%** (посмотрите ещё раз п. «Две стороны дроби», несколько слов вначале, глава III).

С процентами **удобно** работать при сравнении, при анализе процесса изменения величины: ведь сразу ясно, что, например, 37% меньше 50%, а 75% больше тех же 50%.

Однако при вычислениях мы **«не знаем»**, что делать с процентами, **пока не переведём их в числа** — обыкновенные или десятичные дроби.

Посмотрите на примеры соответствия между процентами и дробями — таблица 46 (слева направо — **перевод процентов** в дроби, а справа налево — **перевод дробей** в проценты).

Таблица 46		
$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$	$10\% = \frac{10}{100} = 0,1$	$100\% = \frac{100}{100} = 1$
$2\% = \frac{2}{100} = 0,02$	$37\% = \frac{37}{100} = 0,37$	$105\% = \frac{105}{100} = 1,05$
$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$	$50\% = \frac{50}{100} = 0,5$	$200\% = \frac{200}{100} = 2$

Практика перевода — примеры следующих упражнений:

1) **Назвать десятичные дроби**, соответствующие процентам (**перевести проценты в дроби**): 1%; 4%; 39%; 90%; 104%; 120%; 140%; 195%; 221%; 350%.

2) **Назвать число процентов**, соответствующих десятичной дроби (**перевести десятичную дробь в проценты**): 0,01; 0,06; 0,42; 0,5; 1; 1,05; 1,3; 2; 2,5; 3,02.

Ответы — таблице 47.

Таблица 47										
1)	0,01	0,04	0,39	0,9	1,04	1,2	1,4	1,95	2,21	3,5
2)	1%	6%	42%	50%	100%	105%	130%	200%	250%	302%

В таблице 48 приведены наиболее часто употребляемые дроби и соответствующие каждой из них проценты [11, с. 85].

Таблица 48									
Дробь числа	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$
	0,5	0,25	0,75	0,2	0,4	0,6	0,1	0,05	0,02
Число процентов	50%	25%	75%	20%	40%	60%	10%	5%	2%

Соответствие дробей и процентов таблицы 48 стоит **запомнить**.

Кроме того, имеет смысл показать ребёнку соответствие между уже знакомыми ему названиями некоторых дробей и соответствующих им процентов:

$$\text{Целое} = 1 \quad 100\%$$

$$\text{Половина} = \frac{1}{2} \quad 50\%$$

$$\text{Четверть} = \frac{1}{4} \quad 25\%$$

$$\text{Три четверти} = \frac{3}{4} \quad 75\%$$

Итак, если мы называем число процентов, то переходим от дробей к **всё тем же натуральным числам**, называемых «проценты».

До сих пор мы рассматривали проценты как дроби, как части целого, как «безразмерные» величины. Теперь же займёмся **содержимым** этих дробей (напоминаю, что по определению

1% — это дробь $\frac{1}{100}$).

Сначала вспомогательная задача (№1165, [12]):

«На пастбище было 100 животных: 39 телят, 52 овцы, а остальные козы. Сколько процентов от общего количества животных составляли телята, овцы и козы?».

Все животные — это «целое», равное единице. А **содержимым** этого целого, с одной стороны, являются **100 процентов**, с другой стороны, — **100 животных**.

Из этого соответствия мы можем сказать, что **содержимым одного процента** является **одно животное** (или в дроби $\frac{1}{100} = 1\%$ содержится 1 животное).

Тогда ясно, что 39 телят — это содержимое 39 процентов, а 52 овцы — содержимое 52 процентов.

Что касается коз, то задачу можно окончательно решать двумя способами:

$$1) 100 \text{ ж.} - (39 \text{ ж.} + 52 \text{ ж.}) = 100 \text{ ж.} - 91 \text{ ж.} = 9 \text{ ж.}$$

$$2) 100\% - (39\% + 52\%) = 100\% - 91\% = 9\%.$$

В первом случае мы находим количество коз — 9 животных, а это 9%, поскольку в 1% «содержится» 1 животное.

Во втором случае сразу находим число процентов, ведь **все** животные (содержимое целого) — это 100%.

Только что рассмотренная задача просто слегка «материализует» понятие «процент».

Чтобы глубже прочувствовать это понятие, нам нужно научиться находить **«содержимое одного процента»** от любой заданной величины, что позволяет устно решать две основные задачи на проценты: **прямую** — нахождение процентов от числа и **обратную** — нахождение числа по его процентам.

Нахождение процентов от числа**Задача.**

В школе 1500 учащихся. 50% из них изучают английский язык, 35% — французский и остальные (15%) — испанский. Сколько **учащихся** изучают каждый язык?

На этой задаче ребёнок должен отчётливо понять **смысл вопроса** задачи.

1500 учащихся — это **содержимое** целого в 100%.

Чтобы узнать **число учащихся**, соответствующее 50, 35 и 15 **процентам** от общего количества, надо сначала узнать, **сколько учащихся** соответствует **одному проценту**. Иными словами, надо узнать **содержимое одного процента**.

1500 учащихся **содержится** в 100 процентах. Тогда в **1 проценте содержится 15 учащихся** ($1500 \text{ уч.} : 100 (\%) = 15 \text{ уч.} / \text{в } 1 - \text{ом проценте}$).

Ну а чтобы узнать **содержимое нескольких** процентов, нужно, очевидно, **умножить содержимое 1% на число процентов**:

$$15 \text{ уч.} \cdot 50 (\%) = 750 \text{ уч.} / \text{в } 50 - \text{ти процентах};$$

$$15 \text{ уч.} \cdot 35 (\%) = 525 \text{ уч.} / \text{в } 35 - \text{ти процентах};$$

$$15 \text{ уч.} \cdot 15 (\%) = 225 \text{ уч.} / \text{в } 15 - \text{ти процентах}.$$

Обратите внимание ребёнка на то, что сумма всех процентов равна 100% ($50\% + 35\% + 15\% = 100\%$), а сумма всех учеников, содержащихся в этих процентах, равна 1500 — **содержимому 100%**.

Видим, чтобы найти **содержимое нескольких процентов N** величины **В(сего)**, нужно **разделить** величину **В** на 100 (найти **содержимое 1%**) и **умножить** на число процентов **N**, т.е. считать по формуле:

$$\frac{B}{100} \cdot N \text{ (как это делается в 5-ом классе),}$$

которую можно переписать так:

$$\frac{N}{100} \cdot B$$

Но если вспомнить формулу $D \cdot B = CD$ (**п. «Ещё немного о дробях», глава III**), то мы видим, что решаем **прямую** задачу «найти дробь от числа» (**содержимое дроби**).

Действительно:

В(сего) = 1500 уч.

Д(роби), соответствующие процентам:

$$D_{50} = \frac{50}{100} = \left(\frac{1}{2}\right) = 0,5 \text{ (50\%);}$$

$$D_{35} = \frac{35}{100} = \left(\frac{7}{20}\right) = 0,35 \text{ (35\%);}$$

$$D_{15} = \frac{15}{100} = \left(\frac{3}{20}\right) = 0,15 \text{ (15\%).}$$

(D_{50} , D_{35} , D_{15} — обозначение дробей, соответствующих 50, 35 и 15 процентам.)

Резюмируем.

Найти **несколько процентов** от величины **В(сего)**, значит, найти **содержимое дроби**, соответствующей числу процентов.

Для нашей задачи её решение будет выглядеть так:

$$CD_{50} = \frac{50}{100} \cdot 1500 \text{ уч.} = 50 \cdot 15 = 750 \text{ уч.} (0,5 \cdot 1500 \text{ уч.});$$

$$CD_{35} = \frac{35}{100} \cdot 1500 \text{ уч.} = 35 \cdot 15 = 525 \text{ уч.} (0,35 \cdot 1500 \text{ уч.});$$

$$CD_{15} = \frac{15}{100} \cdot 1500 \text{ уч.} = 15 \cdot 15 = 225 \text{ уч.} (0,15 \cdot 1500 \text{ уч.}).$$

Итак, чтобы решить прямую (или обратную) задачу «на проценты» — **мгновенно переводим проценты в десятичную или обыкновенную дробь** (как удобнее, например, в нашей задаче удобнее пользоваться обыкновенными дробями, поскольку легко сокращаются 1500 и 100 и нам вообще не приходится думать «о запятой», о десятичных дробях) и используем формулу $D \cdot B = CD$ (п. Ещё немного о дробях, глава III, Обыкновенные дроби).

Важное замечание.

Если не пользоваться формулой $D \cdot B = CD$, то тогда, как я уже сказал, задачу нахождения процентов от числа придётся решать по формуле $\frac{A}{100} \cdot N$, где, напомним, $B(\text{сего}) = 1500$ учащихся, — значение величины, а $N = 50 (\%)$ — число процентов.

Для 50% наша задача запишется так:

$$\frac{1500}{100} \cdot 50, \text{ или, что то же, } (1500 : 100) \cdot 50 = 750.$$

Как видите, читатель, чисто арифметическая запись решения (без формулы $D \cdot B = CD$), особенно, её второй вариант, настолько безлики, что неудивительно, что дети очень плохо овладевают задачами «на проценты».

Однако, если по тем или иным причинам вы вынуждены учить ребёнка именно арифметической форме решения, то **постоянно проговаривайте** для ребёнка **смысл** формулы $\frac{B}{100} \cdot N$: «Делим на 100, значит, находим **содержимое 1%**, а потом умножаем на число процентов».

Правда, с обратной задачей — найти число по его процентам — неизбежно будут возникать сложности.

Но это общий подход.

Для вас, читатель, очень важно научить ребёнка глубокому пониманию «процента», умению в простых случаях устно находить проценты от числа, т.е. именно пользуясь формулой

$$\frac{B}{100} \cdot N.$$

Приведу несколько примеров.

Примеры.

- 1) Найти 5% (17%, 120%) от 400 кг.
- 2) Найти 3% (12%, 70%) от 600 руб.
- 3) Найти 8% (15%, 300%) от числа 200.

В каждом случае сначала находим **содержимое 1%**, т.е. делим данную величину на 100:

$$1) \frac{400 \text{ кг}}{100} = 4 \text{ кг (содержится в 1\%).}$$

$$2) \frac{600 \text{ руб.}}{100} = 6 \text{ руб. (содержится в 1\%).}$$

$$3) \frac{200}{100} = 2 \text{ (содержится в 1\%).}$$

Далее находим **содержимое нескольких процентов**:

$$1) 4 \text{ кг} \cdot 5(\%) [17(\%); 120(\%)] = 20 \text{ кг} [68 \text{ кг}; 480 \text{ кг}].$$

$$2) 6 \text{ руб.} \cdot 3(\%) [12(\%); 70(\%)] = 18 \text{ руб.} [72 \text{ руб.}; 420 \text{ руб.}].$$

$$3) 2 \cdot 8(\%) [15(\%); 300(\%)] = 16 [30; 600].$$

Решение может озвучиваться так:

5% от 400 кг — 20 кг.

70% от 600 руб. — 420 руб.

300% от (числа) 200 — 600.

Замечание.

В примере 3), как правило, нужно «**материализовать**» число, т.е. **сказать ребёнку**: «Представь, что число 200 — это 200 рублей (метров, килограммов). Можешь найти содержимое одного процента?.. Разумеется, 2 рубля (метра, килограмма) в 1%. И 1% от 200 (просто число) — это 2 (просто число).

300% от 200 рублей (метров, килограммов) — это 600 рублей (метров, килограммов). А 300% от числа 200 — это число 600.

Теперь, читатель, когда вы можете предельно ясно показать ребёнку на примерах решение задачи на нахождение процентов от числа, дайте ему для практики несколько заданий, которые я взял из учебника [11, с. 89].

№ 434. (Устно.)

Найдите 1%; 2%; 30%; 80%; 102%; 125% от **200 кг**. Сравните полученные результаты с 200 кг.

Ответы к № 434 — таблица 49.

Таблица 49					
1% = 2 кг	2% = 4 кг	30% = 60 кг	80% = 160 кг	102% = 204 кг	125% = 250 кг

Как видите в очередной раз, читатель, главное — узнать содержимое 1 процента, $\frac{1}{100}$ от 200 кг, т.е. разделить 200 кг на 100, а дальше — обычное умножение в натуральных числах (умножаем 2 кг, содержимое 1%, на число процентов).

Сравнение.

Заданная величина (200 кг) по определению принимается за 100%. Поэтому ясно, что число процентов большее 100%, даёт число большее 200 кг и наоборот, что мы и видим в таблице 49.

№ 435. (Устно.)

1) Найдите **1%** от **чисел**: 300; 500; 3; 7; 32; 48; 0,5; 0,9; 1,2; 0,04; 0,36; 0,64.

Ответы к № 435 (1) — таблица 50.

Таблица 50					
3	5	0,03	0,07	0,32	0,48
0,005	0,009	0,012	0,0004	0,0036	0,0064

Пояснение к таблице 50.

Найти **1% от числа**, значит найти $\frac{1}{100}$ числа, **значит разделить число на 100**.

Выше, в п. «Деление на 10, 100, 1000, ... мы видели, что такое деление сводится (технически) **к переносу запятой влево** соответственно на 1, 2, 3, ... знака (к уменьшению числа в 10, 100, 1000, ... раз).

Если ребёнок **хорошо справляется** с примерами **таблицы 38** (п. Деление на 10, 100, 1000, ... (10^n), то **№435 (1)** он с лёгкостью проделает устно, т.к. разделить число на 100 — это всего лишь уменьшить его в 100 раз, сдвинуть запятую влево на два разряда.

Например, $\frac{300}{100} = 3$; $\frac{7}{100} = 0,07$; $\frac{0,5}{100} = 0,005$; $\frac{0,04}{100} = 0,0004$ (везде деление на 100 записано для большей наглядности с помощью дробной черты).

№ 435. (Устно.)

2) Найдите **3% от чисел**: 300; 800; 4; 8; 41; 56; 0,6; 0,8; 0,05; 0,83; 1,3.

Ответы к № 435 (2) — таблица 51.

Таблица 51	
1% от 300 — 3	3% — $3 \cdot 3(\%) = 9$
1% от 800 — 8	3% — $8 \cdot 3(\%) = 24$
1% от 4 — $0,04 = 4$ сотых	3% — 4 сотых $\cdot 3(\%) = 12$ сотых = 0,12
1% от 8 — $0,08 = 8$ сотых	3% — 8 сотых $\cdot 3(\%) = 24$ сотых = 0,24
1% от 41 — $0,41 = 41$ сотая	3% — 41 сотая $\cdot 3(\%) = 123$ сотых = 1,23
1% от 56 — $0,56 = 56$ сотых	3% — 56 сотых $\cdot 3(\%) = 168$ сотых = 1,68
1% от 0,6 — $0,6 = 0,006$ тысячных	3% — 6 тысячных $\cdot 3(\%) = 18$ тысячных = 0,018
1% от 0,8 — $0,8 = 0,008$ тысячных	3% — 8 тысячных $\cdot 3(\%) = 24$ тысячных = 0,024
1% от 1,3 — $0,013 = 0,013$ тысячных	3% — 13 тысячных $\cdot 3(\%) = 39$ тысячных = 0,039
1% от 0,05 — $0,0005 = 0,0005$ десятимыс.	3% — 5 десятимыс $\cdot 3(\%) = 15$ десятимыс = 0,0015
1% от 0,83 — $0,0083 = 0,0083$ десятимыс.	3% — 83 десятимыс $\cdot 3(\%) = 249$ десятимыс = 0,0249

В первом столбце таблицы 51 мы находим содержимое 1% от числа, а во втором — 3% от числа.

Во второй, третьей и четвёртой строках таблицы 51 вы, читатель, видите, что стоит нам, скажем, дробь 0,04 или 0,06 (1% от чисел 4 и 6) **произнести** как 4 сотых или 6 тысячных, как дальнейшее нахождение 3% сводится к умножению на 3. Опять и опять мы переходим в область натуральных чисел, **в арифметическую технику начальной школы** (глава II)! Вот и ещё одна причина, почему так важно было приучать ребёнка видеть дробь в соответствующих долях.

Внимание.

Вряд ли стоит настаивать на устном решении примеров № 432 (2) при первоначальном знакомстве с десятичными дробями в 5 классе. Но детям постарше, конечно же, надо показать устные решения таблицы 51.

Впрочем, читатель, всё зависит от ребёнка, от его арифметической техники к данному моменту. Вы сами работаете с ребёнком, вы знаете его возможности — вам решать.

Но, как всегда, будьте осторожны!

№ 437. Что больше и насколько:

- 1) 24% от 46 или 42% от 25;
- 2) 76% от 120 или 112% от 84;
- 3) 65% от 52 или 52% от 65?

Таблица 52		
I	II	III
$СД_{24} = 0,24 \cdot 46 = 11,04$	$СД_{76} = 0,76 \cdot 120 = 91,2$	$СД_{65} = 0,65 \cdot 52 = 33,8$
$СД_{42} = 0,42 \cdot 25 = 10,5$	$СД_{112} = 1,12 \cdot 84 = 94,08$	$СД_{52} = 0,52 \cdot 65 = 33,8$

Ответы к № 437 — таблица 52.

Это упражнение выполняется с использованием формулы $Д \cdot В = СД$.

Проценты переводятся в десятичные дроби. Например, $24\% = 0,24$ или $112\% = 1,12$.

Результаты сравнения — очевидны, поэтому ответы я не привожу.

Замечание.

То, что результаты в столбце III совпали, можно было предвидеть заранее. Ведь мы умножаем десятичные дроби и лишь потом отделяем в умножении столько десятичных знаков, сколько их в обоих множителях. Но $65 \cdot 52 = 52 \cdot 65$, а отделять приходится в обоих случаях два знака.



Представление дроби в процентах

Зная, что содержимое целого в процентах составляет **100%**, и пользуясь формулой $Д \cdot В = СД$, мы можем **выразить в процентах** любую дробь (перевести дробь в проценты), как представимую в виде десятичной, так и не представимую. Тем самым, мы находим содержимое дроби (СД) в виде процентов.

Пример 1.

$$Д(дробь) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}.$$

$$В(сего) = 100\%.$$

$$\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\% \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \text{ это } 25\%;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\% \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \text{ это } 50\%;$$

$$\frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\% \quad \text{или} \quad \frac{2}{5} \text{ это } 40\%.$$

Это, читатель, нам знакомо. Точно также работаем с дробями, не переводимыми в конечные десятичные.

Пример 2.

$$Д(дробь) = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{3}.$$

$$В(сего) = 100\%.$$

$$\frac{1}{3} \cdot 100\% = \frac{100\%}{3} = 33\frac{1}{3}\% \quad \text{или} \quad \frac{1}{3} \text{ это } 33\frac{1}{3}\%;$$

$$\frac{1}{6} \cdot 100\% = \frac{100\%}{6} = 16\frac{4}{6}\% = 16\frac{2}{3}\% \quad \text{или} \quad \frac{1}{6} \text{ это } 16\frac{2}{3}\%;$$

$$\frac{1}{7} \cdot 100\% = \frac{100\%}{7} = 14\frac{2}{7}\% \quad \text{или} \quad \frac{1}{7} \text{ это } 14\frac{2}{7}\%;$$

$$\frac{2}{3} \cdot 100\% = \frac{200\%}{3} = 66\frac{2}{3}\% \quad \text{или} \quad \frac{2}{3} \text{ это } 66\frac{2}{3}\%.$$

Внимание!

Вы видите, читатель, как важно уметь работать с обыкновенными дробями (в данном случае — уметь выделять целую часть из неправильной дроби).

Замечание.

Перевести дробь $\frac{2}{3}$ в проценты можно было бы пользуясь тем, что дробь $\frac{1}{3}$ — это $33\frac{1}{3}\%$,

т.е. просто умножить устно $33\frac{1}{3}\% \cdot 2 = 66\frac{2}{3}\%$.



Нахождение числа по его процентам

Прямая задача на нахождение процентов от числа, как мы видели, свелась к нахождению **содержимого дроби** в формуле $D \cdot B = CD$.

Обратная задача — найти число по его процентам — сводится к тому, чтобы найти $B(\text{сего})$ — **содержимое целого**.

Из нашей формулы следует, что $B = \frac{CD}{D}$. Но это — общий подход. В простых случаях мы можем эту задачу решить в уме, и более того, не пользуясь формулой $B = \frac{CD}{D}$, а опираясь на **смысл** процента как дроби $\frac{1}{100}$ и **содержимого** этой дроби.

Далее я привожу несколько заданий из учебника [11] (используя, как и прежде, нумерацию учебника).

Теперь, как и должно, от вас потребуются лишь относительно краткие пояснения ребёнку, **углубляющие его понимание «процента»**.

№ 457. (Устно.)

Найдите число, если:

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1) 1% его равен 8 | 5) 50% его равны 200 |
| 2) 4% его равны 12 | 6) 75% его равны 150 |
| 3) 15% его равны 45 | 7) 104% его равны 312 |
| 4) 40% его равны 80 | 8) 150% его равны 600 |

Что значит: 1% числа равен 8? — Это **содержимое одного процента!** То есть, в одном проценте содержится, например, 8 рублей (метров, килограммов).

А тогда **смысл** задачи: сколько рублей (метров, килограммов) **содержится в 100 процентах?** Иными словами: найти число, зная содержимое 1% этого числа, это найти **В(сего)**.

Раз **в 1%** содержится **8** (рублей, метров, килограммов), то **в 100%** содержится **800** (рублей, метров, килограммов) — $8 \cdot 100 (\%) = 800$.

Остаётся только пояснить ребёнку, что если известно содержимое **нескольких** процентов, то сначала нужно найти содержимое **одного** процента, а затем, **умножив на 100**, содержимое **ста** процентов.

4% числа равны 12.

Отсюда **1% числа равен 3** ($12 : 4 (\%) = 3$ — **содержимое 1%**). А само число (**100%**) равно **300** ($3 \cdot 100 (\%) = 300$).

И опять же, читатель, лучше брать не какое-то абстрактное число 12, а «размерное» (именованное), например, 12 кг.

Тогда объяснение для ребёнка максимально опредметится: **в 4% содержится 12 кг**, сколько **кг** содержится **в 1%?** — Ясно, что **3 кг**. А **в 100%?** — Разумеется, **300 кг**.

Ко всем примерам вы **задаёте один и тот же вопрос** в разных формах: «Сколько (содержится) в 1% (содержимое 1%)?... А в 100%?»

Ответы — таблица 53.

Таблица 53					
	1%	100%		1%	100%
1)	8	800	5)	4	400
2)	3	300	6)	2	200
3)	3	300	7)	3	300
4)	2	200	8)	4	300

Замечание.

В примерах 6)–7) при необходимости **подсказываете** ребёнку: «На что надо умножить 75 (104), чтобы получить 150 (312)?» — Знакомое нам по главе II деление путём умножения.

№ 458. (Устно.)

1) Найдите число, 1% которого равен: 3; 5; 21; 0,76; 1,3.

Ответы очевидны: нужно данное содержимое 1% умножить на 100, получим: 300; 500; 2100; 76; 130.

2) Найдите число, 3% которого равны: 3; 9; 12; 0,63; 2,7; 3,21.

Ответы — таблица 54 (сначала находим **содержимое 1%** — делим на 3, ($3 : 3 = 1$; $9 : 3 = 3$; $12 : 3 = 4$ и т.д.) а затем — **содержимое 100%** — умножаем на 100).

Таблица 54						
1%	1	3	4	0,21	0,9	1,07
100%	100	300	400	21	90	107

Внимание.

В последних трёх примерах мы активно пользуемся ранее приобретёнными умениями устного деления десятичных дробей и записи их в соответствующих долях:

0,63 – 63 *сотых*;

2,7 – 27 *десятых*;

3,21 – делим на 3 отдельно 3 *целых* и 21 *сотую*.

3) Найдите число, 25% которого равны: 50; 2,5; 0,75; 1,5 ($50 : 25 = 2$; $2,5 : 25 = 0,1$ и т.д.).

Ответы — таблица 55.

Таблица 55				
1%	2	0,1	0,03	0,06
100%	200	10	3	6

2,5 – 25 *десятых*;

0,75 – 75 *сотых*;

1,5 – 150 *сотых*.

№ 460. (Устно.)

Найдите число, 125% которого равны: 125; 375; 62,5; 12,5 ($125 : 125 = 1$; $375 : 125 = 3$ и т.д.).

Ответы — таблица 56.

Таблица 56				
1%	1	3	0,5	0,1
100%	100	300	50	10

Наконец, в № 461, мы используем формулы $D \cdot B = CD$ и $B = \frac{CD}{D}$.

№ 461. Какое число больше и на сколько?

- 1) 5% которого составляют 15 или 8% которого составляют 16?
- 2) 18% которого составляют 72 или 15% которого составляют 60?
- 3) 28% которого составляют 140 или 25% которого составляют 150?

Разумеется, все три задания № 461, как и прежде, можно решить устно (поскольку хорошо подобраны числа). Но давайте, для практики, воспользуемся формулой $D \cdot B = CD$.

1) 5% числа составляют 15.

Видим, $D_1 = 0,05$ (5%), $CD_1 = 15$.

Подставим в формулу $0,05 \cdot B_1 = 15 \Rightarrow B_1 = \frac{15}{0,05} = \frac{1500}{5} = 300$.

8% числа составляют 16.

Видим, $D_2 = 0,08$ (8%), $CD_2 = 16$.

Подставим в формулу $0,08 \cdot B_2 = 16 \Rightarrow B_2 = \frac{16}{0,08} = \frac{1600}{8} = 200$.

Ответы — таблица 43., $B_1 = 300$ больше, чем $B_2 = 200$, т.е. первое число больше второго.

Ответы — таблица 57.

Таблица 57		
1)	2)	3)
$D_1 = 0,05$ (5%) $CD_1 = 15$ $B_1 = 300$	$D_1 = 0,18$ (18%) $CD_1 = 72$ $B_1 = 400$	$D_1 = 0,28$ (28%) $CD_1 = 140$ $B_1 = 500$
$D_2 = 0,08$ (8%) $CD_2 = 16$ $B_2 = 200$	$D_2 = 0,15$ (15%) $CD_2 = 60$ $B_2 = 400$	$D_2 = 0,25$ (25%) $CD_2 = 150$ $B_2 = 600$
$B_1 > B_2$	$B_1 = B_2$	$B_1 < B_2$

Простейшие задачи «на проценты»

Прямая и обратная задачи были даны в п. «Ещё немного о дробях», глава III. Только там мы работали с обыкновенными дробями. Вы можете, читатель, взять эти же задачи, но использовать проценты, переводя их в десятичные дроби.

Разные формулировки прямой задачи (найти проценты от числа)

Ниже я привожу небольшой список задач, использующих понятия «**больше/меньше на сколько-то**» в предельно краткой схемной формулировке из разных учебников.

Задача 1 разбирается подробно.

К остальным даются небольшие пояснения (как правило, только обозначения и значения величин), помогающие ребёнку увидеть одну и ту же прямую задачу в разных формулировках, в разных сюжетных воплощениях.

«Больше на»

- По плану надо засеять 125 га. **Перевыполнили** план на 14%. Сколько засеяли?
- Вещь стоила 120 руб. Цена **повысилась** на 35%. Сколько стала стоить вещь?
- Оптовая цена товара 5500 руб. Торговая **наценка** в магазине 12%. Сколько стоит товар в магазине?
- На счету было 5000 руб. Банк **начисляет** ежегодно 9% **годовых**. Сколько будет на счету через год?
- Взял ссуду 140000 руб. **под** 8% **годовых**. Сколько должен вернуть через год?
- Штраф 200 руб. За **каждый день** просрочки взимается **пеня** 2%. Сколько придётся заплатить за **5 дней** просрочки?

7. Купили товар по 1100 руб. Планируют получить **прибыль** при продаже 15%. По какой цене должны продавать товар?

«Меньше на»

8. 1 кг вещества стоил 1 руб. 50 коп. Цена **снижена на** 20%. Сколько стал стоить 1 кг?
9. Путёвка стоит 120 руб. Приобретена **со скидкой** 70%. Сколько заплатили за путёвку?
10. Товар стоит 1200 руб. Можно купить при распродаже **на** 33% **дешевле**. Сколько сэкономили?

Задача 1.

1. Главное, чего надо добиваться в этой (и закрепить в остальных) задаче — чтобы ребёнок понял: **надо было** засеять 125 га **по плану**; иначе, выполнить **весь** план — это **содержимое целого**, содержимое **всего** плана. А **весь** план, **всё** целое, как мы знаем, принимается за **100%**.
2. **Перевыполнили** план на **14%** — значит выполнили **весь план** (все 100%), да ещё сделали сверх того на **14% больше**.
3. Следовательно, **на сколько всего процентов** было сделано работы? Ясно, что на 114% (**100%** по плану и **14%** сверх плана).
4. А вот теперь знакомая прямая задача: «Найти 114% от числа 125»:
 $B(\text{сего}) = 125 \text{ га};$

$$D_{114} = 1,14;$$

$$CD_{114} = 1,14 \cdot 125 \text{ (га)} = 142,5 \text{ (га)}.$$

Дальнейшие задачи вы кратко поясняете ребёнку.

Задача 2: Стоила $B(\text{сего}) = 120 \text{ руб.}$ — это 100%. Повысили цену на 35% — стала стоить 135% (100% + 35%).

$$B = 120 \text{ руб.}; D_{135} = 1,35; CD_{135} = 1,35 \cdot 120 \text{ (руб.)} = 162 \text{ (руб.)}.$$

Задача 3: $B(\text{сего}) = 5500 \text{ руб.}$ — это 100%. **Наценка** 12% — в магазине **повысили** цену на 12%. Следовательно, цена в магазине 112% (100% + 12%) от исходной цены 5500 руб.

$$B = 5500 \text{ руб.}; D_{112} = 1,12; CD_{112} = 1,12 \cdot 5500 \text{ (руб.)} = 6160 \text{ (руб.)}.$$

Задача 4: $B(\text{сего}) = 5000 \text{ руб.}$ — это 100%. **Начисляет** 9% в год — на счету становится **на 9% больше**. Следовательно, через год на счету будет 109% (100% + 9%) от 5000 руб.

$$B = 5000 \text{ руб.}; D_{109} = 1,09; CD_{109} = 1,09 \cdot 5000 \text{ (руб.)} = 5450 \text{ (руб.)}.$$

Задача 5: Аналогична задаче 4. Взял ссуду **под 8% годовых** — значит, через год должен будет вернуть банку **108%** от 140000 руб.

$$B = 140000 \text{ руб.}; D_{108} = 1,08; CD_{108} = 1,08 \cdot 140000 \text{ (руб.)} = 151200 \text{ (руб.)}.$$

Задача 6: $B(\text{сего}) = 200 \text{ руб.}$ — это 100%. **За 1 день** просрочки надо дополнительно заплатить **2%** от 200 руб., а **за 5 дней** просрочки — **10%**. Следовательно, всего надо заплатить 110% от 200 руб.

$$B = 200 \text{ руб.}; D_{110} = 1,1; CD_{110} = 1,1 \cdot 200 \text{ (руб.)} = 220 \text{ (руб.)}.$$

Задача 7: $B(\text{сего}) = 1100 \text{ руб.}$ — это 100%. Планируют получить **прибыль в 15%** от 1100 — значит должны **увеличить цену на 15%**. Следовательно, надо продавать по цене в 115% от 1100 руб.

$$B = 1100 \text{ руб.}; D_{115} = 1,15; CD_{115} = 1,15 \cdot 1100 \text{ (руб.)} = 1265 \text{ (руб.)}.$$

Задача 8: $B(\text{сего}) = 1 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} = 150 \text{ коп.}$ — это 100%. Цена **снижена на 20%** — значит **уменьшена на 20%**. Следовательно, стало стоить **80%** ($100\% - 20\%$) от 150 коп. (**Обратите внимание** на необходимость **перевода мер**: рубли в копейки!)

$$B = 150 \text{ коп.}; D_{80} = 0,8; CD_{80} = 0,8 \cdot 150 \text{ (коп.)} = 120 \text{ (коп.)} = 1 \text{ руб. } 20 \text{ коп.}$$

Задача 9: $B(\text{сего}) = 120 \text{ руб.}$ — это 100%. **Скидка 70%** — значит цена **уменьшена на 70%**. Следовательно, стала стоить **30%** ($100\% - 70\%$) от 120 руб.

$$B = 120 \text{ руб.}; D_{30} = 0,3; CD_{30} = 0,3 \cdot 120 \text{ (руб.)} = 36 \text{ (руб.)}.$$

Задача 10: $B(\text{сего}) = 1200 \text{ руб.}$ — это 100%. Покупаем **дешевле на 33%** — значит цена **уменьшена на 33%**. Следовательно, стал стоить **67%** ($100\% - 33\%$) от 1200 руб. Но нас-то интересует **не за сколько мы купили (67%)**, а **на сколько меньше заплатили, сэкономили (на 33%)**?

$$B = 1200 \text{ руб.}; D_{33} = 0,33; CD_{33} = 0,33 \cdot 1200 \text{ (руб.)} = 396 \text{ (руб.)}.$$

Разные формулировки обратной задачи (найти число по процентам)

Простейшие обратные задачи приведены в главе III (п. Ещё немного о дробях).

Добавлю несколько задач из «Дидактические материалы для 5 класса» А.С.Чесноков, К.И.Нешков.

№350 (Вариант 4).

Когда турист **проехал 75%** намеченного пути, ему **осталось** проехать **850 км**. Сколько **всего** километров проехал турист?

Видим: Найти надо **В(сего)**. 850 км — **содержимое дроби**. Какой дроби? Единственная тонкость — надо чётко понимать, что **75% НЕ** соответствуют 850 км.

- 1) Надо узнать, сколько **процентов** пути **осталось** проехать. **Весь** путь — это 100%. 75% пути — **проехал**. Значит, **осталось** проехать: $100\% - 75\% = 25\%$.
- 2) Далее, простейшая обратная задача: $D = 0,25$, $CD = 850 \text{ км}$. $B = ?$ $B = 3400 \text{ км}$.

№352 (Вариант 1) — аналог.

На киносеанс **продано 627** билетов, а **25% остались** непроданными. Сколько **всего** билетов следовало продать, чтобы **все** места в зрительном зале были заняты?

Видим: Найти надо **В(сего)** (**все** места в зале). 627 билетов — **содержимое дроби**. Какой дроби? Единственная тонкость — надо чётко понимать, что **25% НЕ** соответствуют 627 билетам.

- 1) Надо узнать, сколько **процентов** билетов **продали**. **Все** билеты — это 100%. 25% билетов — **не проданы**. Значит, **продали**: $100\% - 25\% = 75\%$.
- 2) Далее, простейшая обратная задача: $D = 0,75$, $CD = 627 \text{ билетов}$. $B = ?$ $B = 836 \text{ билетов}$.

Отношение

Прежде чем я покажу последние четыре задачи, давайте познакомимся с важным понятием — **Отношение**.

Напомню, что действием деления можно узнать, **во сколько раз** одно число **больше** другого или **какую часть** одно число составляет от другого (или **во сколько раз** одно число **меньше** другого) (подробно рассмотрено в книге «Задача? — это очень просто!», глава V «Деление», цикл II «Во сколько раз больше/меньше?» — кратное сравнение).

В таких случаях частное обычно называют отношением.

Пример.

За книгу заплатили 20 руб., а за тетрадь — 5 руб.

- 1) Во сколько раз **больше** заплатили за книгу?
- 2) Во сколько раз **меньше** заплатили за тетрадь?

Обе задачи решаются действием деления. Надо найти отношение чисел:

$$1) \quad 20 : 5 = \frac{20}{5} = 4 \text{ (или в виде дроби } \frac{4}{1} \text{)}.$$

$$2) \quad 5 : 20 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Видим, ответ на первый вопрос: за книгу заплатили **в 4 раза больше**, чем за тетрадь.

Ответ на второй вопрос: за тетрадь заплатили **в 4 раза меньше**, чем за книгу (или стоимость тетради составляет $\frac{1}{4}$ стоимости книги).

Так как отношение это частное, то есть дробь, то его можно выразить в процентах, тогда его называют **процентным отношением**. Оно показывает, сколько процентов одно число составляет от другого. Проценты удобны для сравнения величин. Поэтому мы предпочитаем говорить — ответ на второй вопрос — не тетрадь стоит в четыре раз меньше книги, а: $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$, то есть стоимость тетради составляет 25% от стоимости книги.

(или для 5-го класса можно записывать: $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$)

№351 (Вариант 1).

В старших классах 120 учащихся. Из них 102 ученика работали летом на ферме. Сколько **процентов** учащихся старших классов работали летом на ферме?

Видим, надо найти процентное отношение, то есть посчитать: **какую часть** ученики на **Ф(ерме)** — 102 уч. составляют от **В(сего)** старшеклассников — 120 уч. **и перевести в проценты**.

$$\frac{Ф(ерма)}{В(сего)} \cdot 100\% = \frac{102(уч)}{120(уч)} \cdot 100\% = 0,85 \cdot 100\% = 85\%.$$

В данном случае это прямая задача — найти содержимое дроби 0,85.

№351 (Вариант 2).

В первую смену засеяли 270 га, а во вторую — остальные 180 га. Сколько **процентов всей** площади засеяли в первую смену?

Видим, надо найти процентное отношение, то есть посчитать: **какую часть В(сей)** площади составляет площадь, засеянная в первую смену (**С(мена 1)**) — 180 га **и перевести в проценты**.

Видим, что **вся** площадь нам неизвестна. Значит надо узнать:

- 1) Какова **вся** площадь?

$$270 + 180 = 450 \text{ (га)}.$$

- 2) Теперь прямая задача:

$$\frac{С(мена1)}{В(сего)} \cdot 100\% = \frac{270(га)}{450(уч)} \cdot 100\% = 0,6 \cdot 100\% = 60\%.$$

Наконец, на сколько процентов больше/меньше сделали (выполнили, засеяли, прочитали и т.п.).

№353 (Вариант 2).

По плану в цехе **должны были сделать 780 столов**, а **сделали 897**. **На сколько** процентов перевыполнили план?

Возможны два варианта решения. Приведу оба.

Вариант 1.

Должны были сделать **по плану — это 100%**. Сделали **процентов —** неизвестно.

1) **Сколько процентов** плана сделали?

$$\frac{\text{Сделали}}{\text{План}} \cdot 100\% = \frac{897(\text{ст})}{780(\text{ст})} \cdot 100\% = 1,15 \cdot 100\% = 115\%.$$

2) **На сколько процентов** перевыполнили план?

$$\text{Сделали} - \text{План} = 115\% - 100\% = 15\% \text{ (процентов!)}$$

Вариант 2.

Сначала узнаем:

1) **На сколько столов** больше сделали?

$$\text{Сделали} - \text{План} = 897 - 780 = 117 \text{ (столов!)}$$

Какую часть это «больше на» — 117 столов составляют от плана?

2) **На сколько процентов** больше сделали?

$$\frac{\text{Сделали больше на}}{\text{План}} \cdot 100\% = \frac{117(\text{ст})}{780(\text{ст})} \cdot 100\% = 0,15 \cdot 100\% = 15\%.$$

№353 (Вариант 1).

В январе завод выпустил 350 холодильников, а в феврале на 14 холодильников больше. **На сколько** процентов больше выпущено холодильников в феврале?

Вариант 1.

1) **Сколько холодильников** выпустили в феврале?

$$\text{Январь} + 14 = 350 + 14 = 364 \text{ (холодильников!)}$$

Раз речь идёт о процентах, о сравнении, то нужно сравнить февраль с январём, то есть найти процентное отношение. При этом чётко понимать, что **100% — это январские холодильники**.

2) **Сколько процентов** Февраль составляет от Января?

$$\frac{\text{Февраль}}{\text{Январь}} \cdot 100\% = \frac{364(\text{хол})}{350(\text{хол})} \cdot 100\% = 1,04 \cdot 100\% = 104\%.$$

Наконец

3) **На сколько процентов** больше выпустили в феврале, чем в январе?

$$\text{Февраль} - \text{Январь} = 104 - 100 = 4 \text{ (процента!)}$$

Вариант 2.

Но можно решить задачу и в одно действие.

Сделали на **14 холодильников** больше, найти надо **на сколько процентов** сделали больше. Остаётся сравнить «**на сколько больше в феврале?**» с январём.

На сколько процентов больше выпустили в феврале?

$$\frac{\text{Февраль: Выпустили больше на}}{\text{Январь}} \cdot 100\% = \frac{14(\text{хол})}{350(\text{хол})} \cdot 100\% = 0,04 \cdot 100\% = 4\% .$$

Замечание.

Разумеется, приведёнными выше задачами совершенно не исчерпываются задачи на проценты. Но три базовые задачи, рассмотренные здесь, являются основой работы с процентами.

Пожалуй, стоит добавить ещё одну очень распространённую задачу (но это уже не базовая задача).

Задача.

Товар стоил тысячу рублей. Продавец поднял цену на 10%, а через месяц снизил её на 10%. Сколько стал стоить товар?

- 1) **В(сего)** = 1000 руб. (**первоначальные** 100%) $D(\text{робь}) = 1,1$ ($100\% + 10\% = 110\%$). Найти СД (сколько стал стоить товар после повышения цены) — прямая задача.
 $1,1 \cdot 1000 \text{ руб} = 1100 \text{ руб}$
- 2) **Новое В(сего)** = 1100 руб. (**новые** 100%) $D(\text{робь}) = 0,9$ ($100\% - 10\% = 90\%$). Найти по-прежнему СД (сколько стал стоить товар после понижения цены) — прямая задача.
 $0,9 \cdot 1100 \text{ руб} = 990 \text{ руб}$

Видим, что оба действия можно объединить в одно, а именно:

$$0,9 \cdot (1,1 \cdot 1000 \text{ руб}) = 0,99 \cdot 1000 \text{ руб} = 990 \text{ руб}$$

Можно заметить, что цена товара в результате понизилась.

Это общий вывод для задачи о повышении и понижении цены товара на одно и то же число процентов. Смотрите сами. Повысим и понизим на 20%. Будет произведение дробей $0,8 \cdot 1,2 = 0,96$. Повысим и понизим на 30%. Будет произведение дробей $0,7 \cdot 1,3 = 0,91$. И т.д.

И последнее.

Если мы переставим дроби

$$1,1 \cdot (0,9 \cdot 1000 \text{ руб}) = 1,1 \cdot 900 \text{ руб} = 990 \text{ руб} .$$

Результат тот же самый. Оно и понятно, от перестановки мест множителей произведение не меняется.

Но переведём теперь **в содержательную плоскость** то, что стоит за этой перестановкой. А это значит, что сначала мы понизили цену на 10%, а потом повысили на те же самые 10%.



Глава IV	161
ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ	161
Несколько слов вначале	161
Немного о десятичных дробях	161
Проблемы чтения десятичных дробей	162
Сравнение десятичных дробей	165
Сложение и вычитание десятичных дробей	167
Тренажёр устного счёта: сложение/вычитание	168
Сложение	168
Вычитание	170
Письменное сложение и вычитание	173
Сложение	173
Вычитание	173
Совместные действия сложения и вычитания десятичных дробей	175
Умножение десятичных дробей	176
Тренажёр устного счёта: умножение	178
Умножение десятичных дробей на разрядную единицу	178
10^n (10; 100; 1000; ...) и 10^{-n} (0,1; 0,01; 0,001; ...)	178
Письменное умножение десятичных дробей	181
Деление десятичных дробей	183
Тренажёр устного счёта: деление	185
Деление десятичной дроби на натуральное число	185
Деление десятичной дроби на десятичную дробь	187
Деление десятичных дробей на разрядную единицу	188
10^n (10; 100; 1000; ...) и 10^{-n} (0,1; 0,01; 0,001; ...)	188
Письменное деление десятичных дробей	191
Деление десятичной дроби на натуральное число	191
Деление десятичной дроби на десятичную дробь	193
Обучающая контрольная	194
(совместные действия с десятичными дробями)	194
Представление обыкновенной дроби в виде конечной десятичной дроби	195
Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями	196
Проценты	197
Нахождение процентов от числа	199
Представление дроби в процентах	204
Нахождение числа по его процентам	205
Простейшие задачи «на проценты»	207
Разные формулировки прямой задачи (найти проценты от числа)	207
Разные формулировки обратной задачи (найти число по процентам)	209