Послесловие

Вот и окончилось наше путешествие по «единому полю арифметики», читатель.

Если у вас хватило терпения, то, надеюсь, это путешествие прошло не без пользы и для вас, и для вашего ребенка.

Когда ГрафАнализ был уже разработан и опробован (в 1997 году), когда я уже принялся за эту книгу и дошел до главы II «Сложение» (в 2001 году), то мне стало интересно: а кто еще разделяет мои взгляды на преподавание математики?

Вот тогда-то я и познакомился в первый раз с великолепными учебниками Алгебры-7–11 А. Г. Мордковича.

Буквально на первой странице Алгебры-7 он пишет: «Математика — гуманитарный предмет, который позволяет субъекту ориентироваться в окружающей действительности, «ум в порядок приводит» и оказывает существенное влияние на развитие речи обучаемых (не только внутри данной предметной области). Математика описывает реальные процессы на математическом языке в виде математических моделей. Поэтому *математический язык и математическая модель* — ключевые слова в постепенном развитии курса, его идейный стержень» [63, с. 3–4].

А когда я увидел, что А. Г. Мордкович **активнейшим образом использует алгоритмы** (например, первый из них — «Алгоритм сложения (вычитания) одночленов» [63, с. 44]), то мне подумалось, что этому мы учились у одного и того же человека, известного математика и первоклассного педагога Н. Н. Лузина (см., например, [21]). Именно **дидактическая выстроенность** лузинских курсов дифференциального и интегрального исчислений оказала решающее влияние на мой подход к преподаванию математики. Вот только жаль, что изданы его учебники полвека тому назад (а их переизданий я не встречал).

Я считаю, что сейчас учебникам алгебры А. Г. Мордковича нет равных. Одна только Алгебра-7 чего стоит! Не говоря уж о курсе тригонометрии в Алгебре-10.

Есть, однако, существенное препятствие для полной реализации потенциала, заключенного в этих учебниках. И это препятствие носит **принципиальный характер**, хотя никоим образом не связано с самими учебниками.

Имя этому препятствию — математическая безграмотность: неумение считать, неумение работать не то, что с дробными — с натуральными числами. И это явление математической (прежде всего — арифметической) безграмотности приобрело массовый характер.

Когда я это осознал по отношению к курсу алгебры А. Г. Мордковича, то понял, что не зря взялся за эту книгу.

Теперь еще об одной книге — «Методика преподавания арифметики» Н. С. Поповой (см. [14]). Поскольку моей задачей являлось **создание инструментария — конструктора решений текстовых задач**, то меня не слишком интересовала история вопроса. Хотя, наверняка, попытки сделать арифметику не только графически наглядной, но и **графически реализуемой** предпринимались не раз. Вряд ли они оказались удачными, ибо, в противном случае, нашли бы отражение в учебниках математики. Однако, вернусь к книге Н. С. Поповой, изданной давно — в 1955 году. Не будем вдаваться в детали методики (многие элементы которой, на мой взгляд, не утратили ценности и по сей день), суть не в этом. Меня заинтересовала попытка автора продвинуть графический метод решения задач. И право же, стоит с этим ознакомиться. Я приведу довольно большую выдержку из этой книги.

«…записи числовых данных не всегда удается придать удобообозримый вид. В этом случае помогают рамки.

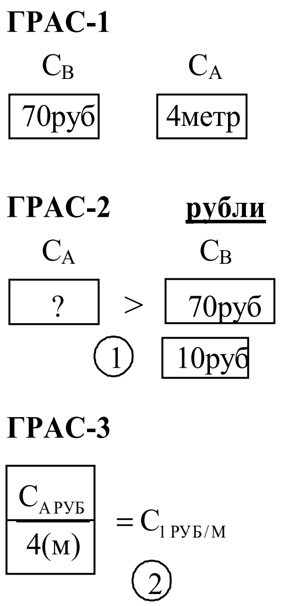
Дана задача. Купили свитер за 70 руб. и 4 м сатина. Весь сатин стоит на 10 руб дороже, чем свитер. Сколько стоит 1 м сатина?

Записать условие этой задачи можно следующим образом:

Свитер	4 м сатина
70 руб.	на 10 руб. дороже.

Благодаря удобной записи легче повторить и проанализировать задачу» [14, с. 86].

Взгляните, читатель, чем-то это уже напоминает ГрафАнализ. Недостаток в том, что картинка остается **только картинкой**, иллюстрацией. Рамки не являются слагаемыми, различающимися именами и содержимым. Сравните с решением ГРАН (рис. 1).



Вспомогательная ГРАС-1 с текста.
Видим **разные** «размерности»: [руб], [метр]. Поэтому **сравнивать нельзя**, т. к. отчетливо видно, что «Больше НА» **относится к «рублям»**. Отсюда — ГРАС-2 **с «размерностями»**.
C_B — свитер, C_A — сатин, имена **слагаемых**.

1). $C_A = C_B + 10 = 70 + 10 = 80$ (руб)

2). $C_1 = C_A : 4 = 80 : 4 = 20$ (руб)

Рис. 1

Да, на первый взгляд — целых три графсхемы по сравнению с одним маленьким иллюстративным рисунком. Однако ГРАС-2 и ГРАС-3 — **уже готовые арифметические действия**, порожденные «Графикой»!

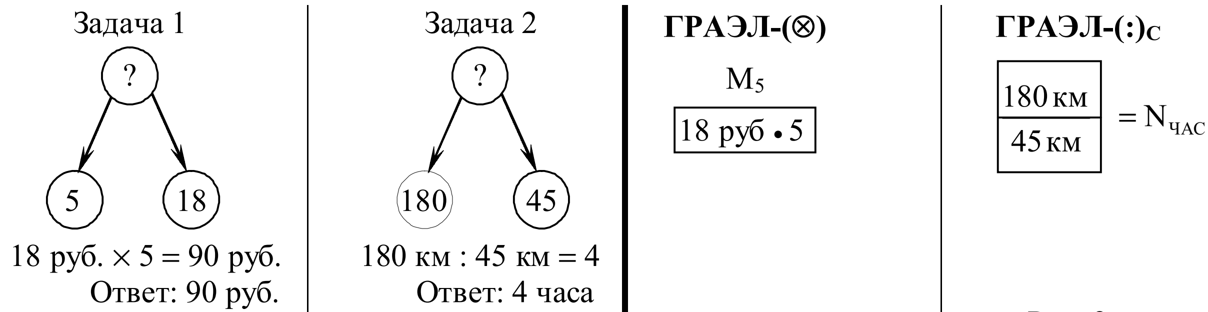


Рис. 2а Рис. 2б Рис. 2в Рис. 2г

Далее из книги Н. С. Поповой.

«Прежде чем переходить к составным задачам, надо проделать «полный анализ» нескольких простых задач с данными и вопросами. Например:

1). Купили 5 м материи по 18 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?

2). Поезд прошел 180 км, делая по 45 км в час. Сколько часов шел поезд?

В это время мы начинаем применять прием, который в дальнейшем будет широко использоваться при разборе составных задач. Сущность его в следующем.

Вопрос задачи мы обозначаем кружком с вопросительным знаком. Затем, установив, что для решения этого вопроса надо иметь два числа, мы отводим от кружка две стрелки и против каждой из них рисуем по кружку. После этого остается выснить, для каких чисел предназначаются кружки и записать числа в кружках. Чертежи к обеим задачам и запись решения их на доске будут иметь следующий вид» [14, с. 97], — рис. 2а, б.

Как видим и здесь графическая иллюстрация — **всего лишь иллюстрация**. Ведь задачи 1, 2 — **абсолютно разные ГРАЭЛы** — рис. 2в, г.

Чуть далее Н. С. Попова пишет: «…следует вообще отказаться от применения в схеме знаков действий.

Не следует так же ставить у чисел в кружках наименований, чтобы чертеж занимал как можно меньше места. Компактная схема нагляднее, чем громоздкий чертеж» [14, с. 98].

Но сравнивая **решение** ГРАН (рис. 2в, г) **с рисунками** задач 1, 2 (рис. 2а, б), мы видим, что без указания наименований («размерностей») картинки перестают быть содержательными.

И наконец, приведу еще одну задачу Н. С. Поповой.

«Купили меховой воротник за 360 руб. и 3 м материи по 120 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?» [14, с. 99], рис. 3

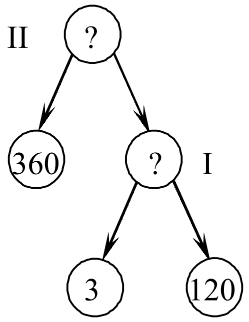
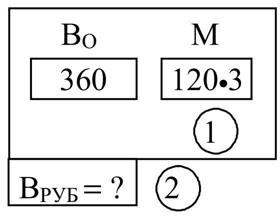


Рис. 3

Задача.

Воротник — 360 руб.
Материя — 3 м по 120 руб.
1). Сколько стоила вся материя?
120 руб. × 3 = 360 руб.
2). Сколько израсходовали денег?
360 руб. + 360 руб. = 720 руб.
Ответ: 720 руб.

Графика



1). М = 120•3 = 360 (руб)
2). В = Во + М
В = 360 + 360 = 720 (руб)

Рис. 4

«Графика» на рис. 4 не только нагляднее, но и гораздо содержательнее.

Почему я столько внимания уделил схемам Н. С. Поповой? Да просто потому, что, в отличие от графического способа решения задач (см. глава I, рис. 5–6), схемы Н. С. Поповой позволяют иллюстрировать задачи в несколько действий (до 4–5 действий, см. [14, с. 101–105]). Беда в том, что с ростом числа действий разрастается и древовидная структура задачи, и схема, вместо того, чтобы упростить понимание задачи, — резко осложняет его.

Все вышеописанное я привел для того, чтобы вы, читатель, еще и еще раз увидели, что **главным в ГрафАнализе является не то, что мы рисуем задачу, а то, что наш рисунок графически отражает логические элементы арифметики**.

В завершение, мне хотелось бы обратить внимание еще на одну возможность ГрафАнализа, которая, пожалуй, может быть полезна моим коллегам — учителям и методистам.

Привожу задачу и описание ее решения на уроке из «Методики обучения математике в начальной школе» Н. Б. Истоминой (см. [7, с. 224–225]).

«В кинотеатре 300 мест. Сколько мест осталось свободными, если продано 90 билетов для взрослых, а для детей в 2 раза больше?

После чтения вслух учащиеся приступают к ее самостоятельному решению, на которое отводится **по меньшей мере 8–10 минут** (выделено мной. — В. Х.).

Учитель наблюдает за работой, выписывая на доске те способы решений, которые он обнаружил в тетрадях. Хотя в некоторых случаях целесообразно записать и те способы (или способ), которых в тетрадях не оказалось, но при этом сказать учащимся: «Давайте обсудим решения, которые я увидел в ваших тетрадях». Например, на доске запись:

а) 1) $90 \cdot 2 = 180$ (б.)
2) $300 - 180 = 120$ (б.)

Обсуждая этот способ решения, дети комментируют каждое действие и большинство из них обнаруживает, что в решении не нашел отражения тот факт, что продали еще 90 билетов для взрослых.

Учащиеся заканчивают решение задачи, выполняя третье действие.

а) 1) $90 \cdot 2 = 180$ (б.)
2) $300 - 180 = 120$ (б.)
3) $120 - 90 = 30$ (б.)

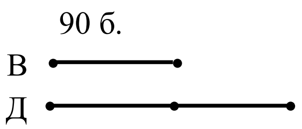
Затем обсуждаются еще три способа решения. При этом учитель старается привлекать тех детей, которые испытывали затруднение при самостоятельном решении задачи.

б) 1) $90 \cdot 2 = 180$ (б.)
2) $180 + 90 = 270$ (б.)
3) $300 - 270 = 30$ (б.)

в) 1) $300 - 90 = 210$ (б.)
2) $90 \cdot 2 = 180$ (б.)
3) $210 - 180 = 30$ (б.)

г) 1) $90 \cdot 3 = 270$ (б.)
2) $300 - 270 = 30$ (б.)

Для обоснования последнего способа необходимо начертить схему:



Используя ее, можно узнать, сколько продали взрослых и детских билетов:

$90 \cdot 3 = 270$ (б.)

Давайте реализуем способы а), б), в) в «Графике» (рис. 5).

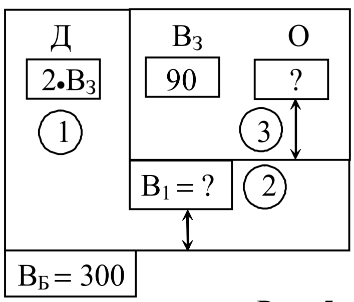


Рис. 5а

а) 1) $Д = 2 \cdot В_3$
2) $В_1 = В - Д$
3) $О = В_1 - В_3$

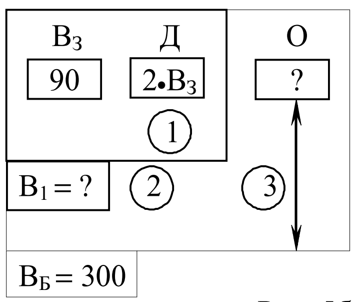


Рис. 5б

б) 1) $Д = 2 \cdot В_3$
2) $В_1 = В_3 + Д$
3) $О = В - В_1$

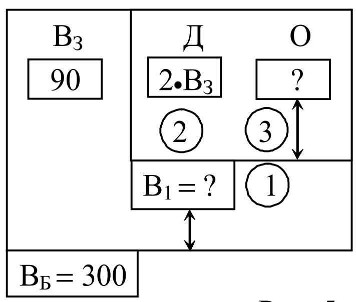


Рис. 5в

в) 1) $В_1 = В - В_3$
2) $Д = 2 \cdot В_3$
3) $О = В_1 - Д$

Если бы мы решали задачу средствами ГрафАнализа, то **автоматически** у нас возник бы вариант б) — рис. 5б, который мы реализовали б в «Графике» за 1 минуту (ребенок затратил бы немного больше времени ~ 2 минут).

Однако более интересно другое.

Если решать задачи **арифметическим** способом, то все три варианта **совершенно равноценны** (только а) и в) — сложнее_из-за двух действий вычитания).

Но стоит взглянуть **на «Графику»**, как сразу видно, что способы решения а) и в) — рис. 5а, 5в — графически неуклюжи, **явно носят искусственный характер**, хотя, повторюсь, арифметически они совершенно равноправны со способом б).

На мой взгляд, эта возможность — **увидеть задачу** (увидеть в прямом смысле слова), **увидеть различие** в равноправных арифметических способах решений может оказаться весьма полезной не только для учителей, но и для учителей учителей — авторов учебников, методических концепций и т. п. «Графика» явно показывает — стоит ли включать в учебное пособие ту или иную задачу, стоит ли осуществлять тот или иной способ решения.

С другой стороны, ГрафАнализ может стать **инструментом <u>объективной</u> оценки** учебников и методических разработок.

В завершение мне хотелось бы предложить следующую гипотезу.

ГрафАнализ может быть не только конструктором решений текстовых задач, но и, мне кажется, дает основу для принципиальной методической перестройки целей курса математики начальной школы, а также — математики-5–6 (в том, что касается текстовых задач), а именно: не столько решать задачи, сколько конструировать, создавать их (см. конец главы II). Тем самым при работе с текстовыми задачами целью преподавания арифметики (математика 1–6) с точки зрения ГрафАнализа станет не умение решать сотни **неведомо откуда взявшихся задач**, а построение, конструирование самих задач. То есть, нынешняя цель — научить ребенка решать задачи практически вообще не будет ставиться, поскольку она будет **достигаться сама собой**, попутно при конструировании задач ребенком.

Еще раз повторюсь, что это только гипотеза, <u>подлежащая серьезной экспериментальной проверке</u>.

Но одно, отнюдь не гипотетическое, предложение можно выдвинуть уже сейчас, и, по-моему, оно достаточно интересно.

Все помнят, как два десятка лет назад по всему миру распространилась игрушка с названием «Кубик Рубика». Она увлекла тысячи и тысячи людей самых разных возрастов до такой степени, что начали проводиться соревнования на скорость по сборке кубика. Так вот, нечто подобное, но с большей пользой, можно осуществить с помощью ГрафАнализа. Можно не только устраивать классные КВН (об этом я уже говорил), но и проводить серьезные соревнования между учащимися разных школ, городов по конструированию задач. При этом результаты могут оцениваться не только по сложности логической структуры созданной задачи, но и по ее изящности, по литературной отработанности сюжета и его соответствию логической структуре задачи и т. п. и т. п. Такие соревнования наверняка привлекут многих учащихся, а созданные ими задачи, собранные и изданные, могут быть использованы в преподавании.

Пришла пора прощаться, читатель.

В прекрасной книге Я. Э. Голосовкера «Сказания о титанах» так сказано о мире:

«За пурпурным островом Заката — за страной забвения — глубины Аида. Под Аидом — тартар. Под тартаром — великая Бездна, где корни земли, и морской пучины, и звездного неба — все концы и начала Вселенной. Там бушуют и мечутся Вихри в вечной свалке друг с другом. Там жилища сумрачной ночи в черном тумане. Там ужасом веет. Даже боги трепещут перед великой Бездной Вихрей» [64, с. 70].

Эта картина мироздания гомеровской эпохи не слишком-то далека от современного образа Вселенной. Но лишь тот сумеет разглядеть красоту облика природы, кто владеет ее языком.

И этот язык — математика.

На пути овладения языком природы в школьной математике стоят три преграды принципиального характера.

Первая — быстрый и **грамотный счет** — в начальной школе.

Вторая — работа **с дробями** — шестой класс.

Третья — **алгебраическая техника Алгебры-7** — седьмой класс.

А все это — **90% всей математики**, включая и высшую (в объеме первых двух курсов)!

Замечание.

Сущность только что изложенных языковых преград является содержательной основой первого, второго и четвертого знаниевых ядер математики (ЗЯМов).

Опираясь на теорию функциональных систем П. К. Анохина (см. сноску 2, главы I), удалось выявить иерархическую структуру основных понятий и умений входящих в подсистемы школьной математики и, в первом приближении, выявить и построить структуру знаниевых ядер (однако, как я уже упоминал, концепция знаниевых ядер математики выходит далеко за пределы этой книги и поэтому здесь не обсуждается).

О значимости первых знаниевых ядер (**особенно первых двух!**) говорят следующие эмпирические данные.

На каждой из преград «**отсеивается**» примерно 50% детей. То есть к шестому классу приходит 50% детей, умеющих грамотно считать, к седьмому — 50% от 50% , т. е. 25% (0,5•50%) от числа первоклассников. А завершают седьмой класс на достаточно грамотном уровне еще 50% от оставшихся 25%, т. е. 12,5%.

В числах это означает, что если в первый класс пришли, например, 33 ребенка, **то всего лишь <u>четверо</u> из них** к концу седьмого класса не будут испытывать проблем **принципиального характера** с дальнейшим овладением языком математики.

Я полагаю, читатель, что первое принципиальное ограничение ваш ребенок почти одолел (ведь вы не только работали с ГрафАнализом, но все больше и больше внимания уделяли при выполнении школьных домашних заданий грамотному счету, верно?). Почти — потому что овладение счетной техникой требует гораздо больше времени и сил, нежели те, что вы уже потратили.

И все-таки — ведь почти одолел!

Помните об оставшихся преградах, но пусть уже проделанная работа станет для вашего ребенка источником уверенности в своих силах.

Я искренне желаю вам этого.

Автор

2001–2005 гг.