Глава I

ВСЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Немного о сложении

Понятие о том, что такое сложение возникает из таких простых фактов, что оно не нуждается в определении и не может быть определено формально[1].

М. Я. Выгодский

Числа в простейшем смысле слова, т. е. так называемые натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5,..., отвечают на вопрос «сколько?». Сколько учеников в классе? Сколько книг на столе? Сколько гусей в пруду?

П. С. Александров

Первый эпиграф главы утверждает, что действие сложения является неопределимым понятием, т. е. оно — первично. Первичными и неопределимыми, подобно геометрическим понятиям точки, прямой, плоскости являются также понятия суммы и слагаемых — двух основных понятий арифметики[2].

Во втором эпиграфе отражены существеннейшие идеи, заложенные в натуральных числах, из которых и выросло понятие натурального числа: идея счёта и идея суммы —«сколько всего?». (Кстати, «понятие о натуральном числе является одним из простейших понятий. Его можно пояснить лишь предметным показом» [2, с. 55]).

Вот эта-то аксиоматическая первичность сложения — «возникающего из таких простых фактов!» — и неразрывно связанных с ним (включенных в него) понятий о целом (сумме) и его частях (слагаемых) и является, на мой взгляд, основой глубокой недооценки роли действия сложения для всего дальнейшего изучения математики.

Попробуем все же разобраться в том, что такое «счёт» и «сложение».

Задача 1.

Пусть на тарелке (Т) лежит **несколько** яблок**. Сосчитайте** их (рис. 1).

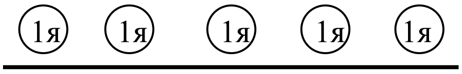
Что же означает фраза: «Сосчитаем яблоки на тарелке Т»?

Считать мы «умеем». Показываем пальчиком на **каждое** яблоко: раз, два, три, четыре, пять. И говорим: «На тарелке 5 яблок».

---

[1] «Часто даются определения» вроде таких: "сложение есть действие, посредством которого несколько чисел соединится в одно", или "действие, посредством которого находится, сколько единиц содержится в нескольких числах вместе". Но тот, кто не знал бы, что значит "сложить", не знал бы и что такое "соединить числа", так что все подобные "определения" сводятся лишь к замене одних слов другими» [2, с. 67].

[2] Арифметика, да и вся трудная теория чисел опирается на теорию множеств, разработанную в конце XIX века Дедекиндом и особенно Кантором. Но не будем забывать, что теория множеств — итог сотен и сотен лет развития математики. Достаточно сказать, что в одной из работ группы Бурбаки понятию «1» (единице) отводится… 200 страниц (см. http:/ega-math/narod.ru/Bbaki/Bourb1.htm «Николай Бурбаки — математический феномен XX века»).

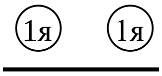


Т Рис. 1

Но что же мы делали на самом деле, называя числа: 1, 2, 3, 4, 5?

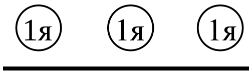
Мы **«**знаем**»**, что такое **одно** (1) яблоко, **один** (1) трактор, **один** (1) предмет (любой). А вот что такое **два** (2) яблока, **два** (2) трактора, **два** (2) предмета? Да и просто число: **два** (2)?

Каждое яблоко на тарелке Т — это **одно** (1) яблоко. Берём **одно** (1) яблоко («первое») ДА ЕЩЁ **одно** (1) яблоко, кладём их на блюдце Б, и говорим: «Теперь у нас ВСЕГО **два** (2) яблока» (рис. 2).



Б Рис. 2

Кладём на блюдце с тарелки ЕЩЁ **одно** (1) яблоко, и говорим: «Теперь у нас ВСЕГО три (3) яблока» (рис. 3).



Б Рис. 3

Видим: **два** яблока получается, если к **одному** яблоку ПРИБАВИМ ещё **одно** яблоко.

Три яблока получится, если к **двум** яблокам ПРИБАВИМ ещё **одно** яблоко.

Число «2» получится, если к числу «1» ПРИБАВИМ ещё одно число «1».

Число «3» получится, если к числу «2» ПРИБАВИМ ещё одно число «1».

И уже ясно, что число «4» мы получим, прибавив к «3» ещё «1».

То есть числа 2, 3, 4,… получаем, ПРИБАВЛЯЯ к предыдущему числу **единицу** (1)[3].

Это с одной стороны.

А с другой стороны, когда **считаем**, то мы не просто говорим: на блюдце 2 яблока, или на тарелке 5 яблок. На самом деле мы просто **не произносим** (но подразумеваем!) одно очень важное слово — ВСЕГО, т. е. на самом деле, считая, мы имеем в виду следующее:

ВСЕГО на блюдце — 2я,

ВСЕГО на тарелке — 5я.

И вот, наконец, мы «смело» говорим: «Теперь, похоже, мы знаем, что такое счёт. Сосчитать яблоки на тарелке — это значит сказать: сколько ВСЕГО яблок на тарелке. А так как **каждое** яблоко — это **одно** яблоко (единица), то посчитать — означает сказать: сколько ВСЕГО «единиц».

Но не обольщайтесь! На самом деле мы **не знаем**, что такое «счёт». Разве нам известно, что такое «ВСЕГО»? Разве нам известно, что такое «ПРИБАВИТЬ единицу»?!

Ну а «научившись» считать, мы, тем не менее, смело усложняем нашу задачу.

Задача 2.

На одной тарелке ($Т_1$) 5 яблок (5я), а на другой тарелке ($Т_2$) — 3 яблока (3я). Сколько яблок на двух тарелках? (рис. 4).

---

[3] Замечу, что я ни словом не обмолвился о значении слова «прибавить». Но так же вынуждены поступать и авторы учебника для учителей: «Каково бы ни было множество **М** численности **а**, к нему всегда можно **присоединить** ЕЩЕ **один** элемент; получаем новое множество **М** численности **а′**. Таким образом можно составить ряд (множество) чисел: 1, 2, 3, 4… **прибавляя** каждый раз число **один** (единицу) к предшествующему числу» (всё выделено мной. — В. Х. [3, с. 11]).

Первая тарелка	Вторая тарелка
(1я) (1я) (1я) (1я) (1я)	(1я) (1я) (1я)
T_1	T_2

Рис. 4

Поскольку считать мы умеем и знаем, что сосчитать яблоки — это сказать, сколько ВСЕГО яблок, то мы (по-прежнему тыкая пальчиком в каждое яблоко) приступаем к счёту, начиная с первого яблока, с **единицы**, и ПРИБАВЛЯЯ по **единице**. Сначала сосчитываем яблоки на T_1: 1, 2, 3, 4, 5. Всего 5 яблок на T_1. Затем переходим ко второй тарелке и, **не переставая прибавлять по «1»**, продолжаем счёт: 6, 7, 8.

Все яблоки сосчитаны. Всего мы насчитали 8 яблок. Значит на обеих тарелках — 8 яблок.

Замечательно!

Ну а если у нас будет на T_1 — 100 яблок, а на T_2 — 200 яблок — мы так и будем считать: один, два, три… десять… 100… 150…?

Долгонько же нам придется считать!

Что же делать?

Однако человек, как известно, существо сообразительное, думающее и «ленивое».

Поэтому он быстренько (этак лет тысяч за пятьдесят) додумался, как жизнь себе облегчить. Считать-то надо было уметь: сколько воинов в моем племени, а сколько во вражеском; сколько охотников надо, чтобы добыть пещерного медведя? Да мало ли что еще. А жизнь была трудная, суровая. Пока будешь прибавлять по единице — медведь всех охотников сожрет одного за другим.

Но вернемся к нашей задаче 2.

А кто нас, собственно говоря, заставляет начинать счёт с единицы (1)? Допустим, что мы уже посчитали яблоки на первой тарелке: всего на T_1 — 5 яблок. Ну и давайте-ка продолжим к 5 яблокам ПРИСЧИТЫВАТЬ (по одному) яблоки со второй тарелки, т. е. начинаем счёт в этом случае не с «1», а с «5».

Всего было 5я. Продолжаем счёт: 6, 7, 8.

Видим, уже гораздо лучше, гораздо быстрее. А все потому, что мы знали, сколько на первой тарелке яблок.

И все-таки нас и это не устраивает. Чего ради я, зная, что на первой тарелке 5 яблок, а на второй — 3 яблока, по-прежнему должен прибавлять по «1»? — Лень ведь. Да и некогда. Нельзя ли еще упростить себе жизнь?

Оказывается, да, можно.

Возьмем, и один раз, не поленившись, сосчитаем разные количества яблок на двух тарелках **путем пересчёта**. Например (рис. 5):

T_1	T_2	
4я	2я	ВСЕГО = 6я

T_1	T_2	
6я	7я	ВСЕГО = 13я

Рис. 5

И запомним результаты счёта. Лень, конечно, но, зато раз потрудившись, мы уже навсегда облегчим себе жизнь, т. к. будем знать, что 4 **И** 2 — Всего = 6, а 6 **И** 7 — Всего = 13 (уже каких угодно предметов и просто чисел).

Что же мы сделали?

Мы научились **сразу, не прибавляя по единице**, из 4 и 2 получать 6, а из 6 и 7 — 13.

Облегчим себе жизнь окончательно (уж слишком много слов приходится говорить) и скажем, что ДЕЙСТВИЕ: получить из 4 и 2 — число 6 будем называть **сложением** двух чисел — 4 и 2, а обозначать будем вместо буквы (союза) «**и**» — знаком «+» (плюс). Ну, а то, что из 4 и 2 получаем ВСЕГО 6, будем обозначать знаком «=» (равно).

Итак, **вместо фразы**: «из 4 и 2 получили ВСЕГО 6» будем писать символы (знаки):

4 + 2 = 6.

И запоминать!

Говорить: складываем 4 и 2, или 4 плюс 2 равняется 6.

Ну а что же все-таки мы делали, облегчая себе жизнь? — То есть что же такое сложение?

Ответ мы знаем (вроде бы!). Ответить на вопрос: **сколько** яблок на обеих тарелках, **значит сосчитать** яблоки. Сначала на одной тарелке: T_1 = 5я, потом на другой тарелке: T_2 = 3я. И, тем самым, узнать: сколько ВСЕГО яблок: 5я + 3я = 8я.

Великолепно!

Сложить числа, значит, **сосчитать**, «сколько единиц в одном числе» — 5 единиц, «в другом» — 3 единицы. А потом **сосчитать**, сколько всего — 8 единиц. И заявить: «сложить два числа — значит, составить новое число, содержащее столько единиц, сколько их находится в данных числах» [3, с. 31].

Вкратце: сложить — значит сосчитать.

Вернемся на минутку назад и вспомним, что такое **счёт**. А мы говорили, что **считать — это прибавлять** (т. е. складывать) по единице.

Вот те раз! Приехали.

Сложить — означает сосчитать, а сосчитать, как выясняется — это складывать.

Масло масляное.

Недаром я предупреждал: не обольщайтесь, что мы знаем что такое счёт. Но теперь выясняется, что на самом деле мы **не знаем** ни что такое счёт, ни что такое сложение (в этом и проявляется первичность, неопределимость действия сложения).

А ведь начал я с того, что предложил разобраться в том, что такое счёт и сложение.

Но, мне кажется, я отчасти сдержал слово.

Вы, читатель, увидели, что **счёт** — это, во-первых, <u>**сложение**</u>, путем прибавления по единице, а во-вторых, <u>**ответ на вопрос**</u> «сколько всего?».

Сложение же, во-первых, <u>**счёт**</u> числа единиц «в обоих числах», а во-вторых, **нахождение суммы** (всего), путем счёта «блоками» единиц (4 и 2 — Всего = 6).

Хотя, как мы выяснили, действие сложения неопределимо, первично, тем не менее, ради единообразия изложения дам более-менее приемлемое определение сложения. С этой целью приведу выдержку из книги Н.В.Метельского «Математика»: «Если к множеству единиц (или долей единиц) одного данного числа присчитать по одной единицы (или такие же доли единицы) другого числа, то полученное число называется ***суммой*** двух данных чисел. Данные числа называют ***слагаемыми***» (всё выделено мной. — В.Х., [4, с. 13]).

Определение.

Действие, заключающееся в нахождении суммы двух данных чисел называется <u>сложением</u>.

Лексика.

Числа, которые складываем, называются **слагаемыми**.

Результат сложения называется **суммой**.

Немного о вычитании

Вычитание как формальное действие схватывается относительно легко. Легко возникает привычка, порождающую иллюзию понимания действия вычитания, — не раздумывая отвечать: 8 – 5 = 3.

Но уже труднее услышать ответ на вопрос: «А почему 8 – 5 = 3?» В большинстве случаев вы услышите: «А потому, что надо уменьшить 8 на 5, отсчитать 5 единиц от восьми или нечто подобное.

И уж совсем трудно будет услышать что-то вразумительное, если спросить, почему уравнение $x + 5 = 8$ решается: $x = 8 – 5$.

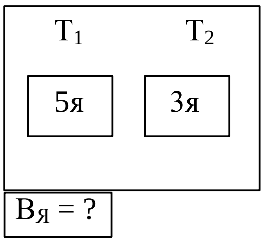
И это противоречие — противоречие между формально лёгким владением вычитанием и неумением объяснить решение уравнения — должно было бы заставить нас задуматься.

А на практике обследование показывает (вплоть до 11-го класса), что ребенок не только не может объяснить, почему $x = 8 – 5$, но и, зачастую, путается в чисто формальной записи решения простейших (и столь важных на уроках физики) уравнений (особенно, в уравнении типа 8 – x = 5, решение которого дважды опирается на определение действия вычитания).

Но мы с вами начнём, естественно, не с определения вычитания, а с действия сложения, тем самым подчеркнув**, что в арифметике в действительности** <u>**есть только одно действие — сложение**</u>. Все остальные арифметические действия сводятся к сложению (первичному действию).

Вернёмся к задаче 2 п. Немного о сложении: «На одной тарелке 5 яблок, на другой — 3 яблока. Сколько всего яблок на обеих тарелках?»

Нарисуем её средствами ГрафАнализа, как это сделано в моей книге «Задача? — Это очень просто!» (рис. 1)



$B = T_1 + T_2 = 5 + 3 = 8$ (я)

Рис. 1

Рисунок (графическая схема задачи) совершенно прозрачен: два слагаемых внутри прямоугольника-суммы ($B_я$ — означает: всего яблок, т.е. сумму слагаемых, обозначенных как T_1 и T_2).

Справа в указанных обозначениях записано решение задачи.

Видим: по известным слагаемым ищем неизвестную сумму.

Предметно-арифметически можно записать:

$$5я + 3я = B_я = \boxed{?_я} \qquad (1)$$

известные слагаемые   **неизвестная** сумма

Теперь же у нас будет другая задача (**обратная**): «На блюдо *с двух тарелок* положили 8 яблок. *С одной* тарелки — 5 яблок. Спрашивается: сколько яблок положили *с другой* тарелки?»

Видим: нам известно Всего = 8я (т. е. **сумма**), известно **одно слагаемое** T_1= 5я. Неизвестно **второе слагаемое** T_2 (сколько яблок положили с другой тарелки, рис. 2).

Можем ли мы **посчитать**: сколько яблок на другой тарелке (T_2)? — Разумеется.

Начнем **прибавлять** по одному яблоку на T_2 и складывать с 5я на T_1 (ведь складывать-то мы умеем!):

$T_1 + T_2 =$ Всего

5я + 1я = 6я

$5я + 2я = 7я$

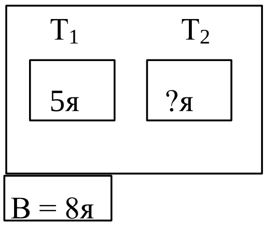
И когда положим 3 яблока на $Т_2$, то увидим, что задачу мы решили:

$5я + 3я = 8я$

$Т_1 + Т_2 = В$

Всего у нас было на блюде В = 8я. На $Т_1$ было 5я. Раз мы, положив 3я на $Т_2$, получили, как и должно, 8я, значит мы верно решили задачу. Решили чисто **экспериментальным** путем, и пользуясь именно **действием сложения**.

Блюдо



$$В = Т_1 + Т_2 = Т_1 + \boxed{?_я}$$
$$8я = 5я + \boxed{?_я} \qquad (2)$$

Рис. 2

Все это очевидно уже для первоклассника, как только он научился складывать в пределах первого десятка. Но не поленимся и выпишем (2) еще раз:

сумма		**слагаемые**			
В	=	$Т_1$	+	$\boxed{Т_2}$	
В	=	$Т_1$	+	$\boxed{?_я}$	
8я	=	5я	+	$?_я$	(3)
известная сумма		**известное** слагаемое		**неизвестное** слагаемое	

Что же мы делали?

Видим из (3): **по известной сумме** (В = 8я) **и известному слагаемому** ($Т_1$ = 5я) находили **неизвестное слагаемое** ($Т_2$ = 3я).

Определение.

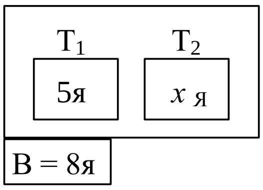
Вот это действие — поиск неизвестного слагаемого — и называется <u>вычитанием</u>.

Теперь позаботимся об обозначениях.

<u>Во-первых</u>, вместо знака «?», давайте в качестве **содержимого** неизвестного слагаемого, будем писать **букву** «*x*» — этой буквой математики давным-давно договорились обозначать неизвестную величину. Да и просто произносить удобнее. Ну как сказать вслух: 8 = 5 + ? (восемь равно пять плюс вопрос)? А вот: $8 = 5 + x$ (восемь равно пять плюс x) — произносится легко.

(Конечно, вместо буквы x можно было бы использовать и другие буквы, например, y, z или даже греческую букву Ψ (пси), но они нам пока не понадобятся.)

Таким образом наша задача целиком будет выглядеть так, как на рис. 3.



$$В = Т_1 + Т_2$$
$$8 = 5 + x$$

Рис. 3

<u>Во-вторых</u>, чтобы обозначить **само новое действие** — **вычитание** — мы будем вместо $8 = 5 + x$ писать $x = 8 – 5$ (произносится, мы знаем, восемь минус пять).

<u>В третьих</u>, — и самое главное! — мы всегда будем помнить, что:

$8 = 5 + x$ и $x = 8 – 5$

это **одно и то же**; просто две разные записи **одного и того же действия: по сумме и слагаемому найти «x» — неизвестное слагаемое** (так мы *определили* действие вычитания и *договорились так его обозначать*, — используя знак «–» минус).

Как следствие <u>определения вычитания</u>, у нас впервые появляется <u>равенство с неизвестной буквой</u>: $8 = 5 + x$.

Такое равенство называется **уравнением**.

Решить уравнение, значит, найти такое значение «икса», при подстановке которого уравнение становится **верным числовым равенством**.

В нашем примере мы нашли, что при $x = 3$, уравнение $8 = 5 + x$ превращается в верное числовое равенство $8 = 8$.

Итак, разбираясь с вычитанием, мы между делом выяснили: почему уравнение $8 = 5 + x$ имеет решение $x = 8 – 5$. — Да просто **<u>по определению</u>** вычитания.

Когда мы **складываем**, мы **присчитываем** единицы одного известного слагаемого к другому известному слагаемому.

Когда **вычитаем**, мы **отсчитываем** единицы известного слагаемого от известной суммы.

И все-таки самое важное, повторюсь, то, что **действие вычитания — это, прежде всего, действие сложения** известного слагаемого с неизвестным слагаемым (его можно найти подбором).

Можно спросить: а для чего нам два действия? И в самом деле: для чего?

Если посмотрим на наши две задачи, изображённые на рис. 1 и рис. 2, то увидим, что хоть мы и решаем их обе путем сложения, **но задачи-то разные**: получить и отдать, присчитать и отсчитать, увеличить и уменьшить. А разные задачи и решать удобнее бывает по-разному. Не будем же мы всякий раз писать $8 = 5 + x$ и присчитывать. Легче и удобнее сразу написать $x = 8 – 5$. И как мы запомнили таблицу сложения (ведь совсем не трудно было нам запомнить её, чтобы не присчитывать каждый раз по единице), точно так же — но уже **гораздо легче и быстрее!** — мы — для удобства счёта — запомним и таблицу вычитания. Её и запоминать-то нечего (**почти!**) — это та же таблица сложения. Но на первых порах: вычесть 5 из 8 (т. е. найти $x = 8 – 5$) — будем задавать себе вопрос: что надо прибавить к 5, чтобы получить 8 (ведь $x = 8 – 5$ и $8 = 5 + x$ — **это одно и то же по определению вычитания**) ?.. Ну конечно же 3, ибо таблицу сложения мы превосходно знаем (**должны знать!**).

А складывать всегда легче, чем вычитать!

Лексика.

Осталось условиться **о терминологии**.

слагаемые				**сумма**
5	+	3	=	8
8	–	3	=	5
8	–	5	=	3
уменьшаемое сумма		**вычитаемое** слагаемое		**разность** слагаемое

Число, из которого вычитаем, называется **уменьшаемым**.

Число, которое вычитаем, называется **вычитаемым**.

Результат вычитания называется **разностью**.

Видим: уменьшаемое — это сумма, вычитаемое и разность — это слагаемые.

Немного об умножении

Часто встречаются задачи, в которых надо сложить несколько **равных** чисел. И, разумеется, эти задачи не придуманы математиками, а пришли в арифметику из жизни. Ещё в глубокой древности множество прикладных задач приводило к необходимости складывать равные числа.

Например, основной боевой единицей древнеримского войска являлся легион. Легион состоял из 10 когорт. Каждая когорта — из 3 манипул, а манипул — из 2 центурий. В центурии было 60 воинов.

Если, скажем, для сражения выделялось 15 когорт, то, спрашивается, сколько всего человек участвовало в сражении?

Посчитаем: 60 + 60 = 120 (2 центурии = 1 манипул); 120 + 120 + 120 = 360 (3 манипула = 1 когорта). Хорошо, никаких проблем со сложением — подумаешь, сложить два или три небольших числа. Но вот теперь мы хотим узнать численность 15 когорт. Начинаем складывать: 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 + 360 = ?.. Да, числа небольшие, но попробуй-ка сложи их в количестве 15 штук! Ну, а если нужно знать численность 13 легионов? Или, скажем, еще более древние времена — эпоха древнеегипетского фараона IV династии Хуфу (Хеопса). Пусть в одном мешке умещалось 50 кг зерна (в наших единицах измерения), а в каждый хлебный склад фараона можно было уложить 1200 таких мешков. И самих складов было по всему Египту, например, 200. Что ж, так и будем складывать 1200 раз по 50 кг?!

$$\underbrace{50 + 50 + 50 + 50 + 50 + \ldots + 50 + 50 + 50 + 50 + 50}_{1200\ \text{раз}} = 60\ 000\ \text{кг}\ (60\ \text{т})$$

А потом еще 200 раз по 60 тонн:

$$\underbrace{60 + 60 + 60 + \ldots + 60 + 60 + 60}_{200\ \text{раз}} = 12\ 000\ \text{т}$$

Полагаю, читатель, что даже ваш ребёнок может предположить, что египетские писцы (а именно они занимались и самыми разнообразными математическими расчётами помимо прочего) наверное не занимались сложением огромного числа равных слагаемых «в столбик» (считали они, конечно, иначе, нежели мы).

Примеры, разумеется, примитивные, однако, совершенно реальные. Подобного рода счётные задачи, возникавшие во всех областях хозяйственной и военной жизни древнего мира, можно множить неограниченно.

Поэтому давайте уделим несколько минут задаче сложения равных чисел. Нам вполне хватит числового примера.

Вместо того, чтобы говорить: прибавим к числу 3 еще число 3, и еще число 3, и еще число 3 (т. е. здесь мы прибавляем 4 раза по 3), короче можно **сказать**, что трижды четыре равно двенадцати. Записывается это так:

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{4\ \text{раза}} = 3 \times 4 = 12 \quad (\textit{или}\ 3 \bullet 4 = 12)$$

То есть вместо **длинной записи сложения** слева, мы введем **короткую** запись справа **и назовем** такую запись **умножением** числа 3 на число 4.

Определение.

Умножением мы будем называть сложение нескольких равных чисел.

И если теперь сложить 4 слагаемых (**вручную**), каждое из которых равно 3, то получим сумму, равную 12. А значит, можем записать, что $3\times 4=12$ $(3\bullet 4=12)$. Знаки умножения и вам, читатель, и вашему ребёнку, разумеется, известны. Стоит только упомянуть о лексике.

Лексика.

3 — повторяющееся слагаемое — называется **множимым**.
4 — число слагаемых — **множителем**.
12 — вычисленная сумма (результат умножения) — называется **произведением**.
Множимое и множитель называются **сомножителями** или просто **множителями**.

Точно так же, как мы вычислили **вручную** $3\times 4=12$, точно так же мы (во 2-ом классе) вычисляем всевозможные произведения однозначных чисел и записываем их в виде таблицы умножения.

Очень важно!

А теперь, читатель, внимание.

Как таблицу сложения, так и таблицу умножения необходимо **запомнить** (**зазубрить**, если угодно, после того, как смысл умножения ясен)!

Вам это кажется само собой разумеющимся? Вы не сомневаетесь, что ваш ребёнок ее знает? А как насчёт листа обследования (приложение 1)? Вы проводили обследование? Когда проведёте, то, по опыту знаю, многие из вас будут удивлены результатом. Да, вроде бы ничего страшного: подумаешь, ребенок несколько раз ошибся… **Ни в коем случае не оставляйте без внимания «проколы» в таблице умножения!** Проводите тренажер таблицы умножения, описанный в главе II, до тех пор, пока ребенок не начнет выдавать таблицу умножения безукоризненно, на хорошей скорости (едва ли не буквально — полсекунды «на размышление»).

Вы не представляете, читатель, какую гигантскую роль играет безукоризненное владение таблицей умножения в 6-м классе (разложение на простые множители, кратные, сокращение, дроби) и далее, до первых курсов университета включительно!

Вот и все, пожалуй. Разве что добавлю в конце, опираясь на определение умножения, **почему** результат умножения (произведение) нуля на любое число равен нулю. Смотрите:

$$0\bullet 4=0+0+0+0=0$$

Видим, сколько бы раз мы ни складывали ноль с самим собой, сумма (произведение) равна нулю.

Если, опираясь на определение, мы захотим узнать чему равно произведение числа на ноль, например, $3\times 0=?$, то сделать этого не сможем, так как множитель (сколько раз берется слагаемым число 3) не может быть равен нулю.

Аналогично мы не можем сказать, чему равно произведение числа на единицу: $3\times 1=?$, так как по определению сложения в сумме должны участвовать, по крайней мере, два слагаемых.

Поэтому мы отдельно вводим следующее **определение**: «Если множитель равен единице, то произведение равно множимому… Если множитель равен нулю, то произведение тоже равно нулю» [3, с. 50].

То есть мы можем записать следующие равенства: $3\bullet 1=3;\quad 3\times 0=0$.

Немного о делении

Как умножение возникает из задачи сложения нескольких равных чисел, так и деление появляется из вполне конкретной задачи: «**распределить поровну**».

Пусть имеется 6 лошадей и 2 воина. Спрашивается: как **поровну распределить** (раздать, поделить) этих лошадей между воинами? Или иначе: сколько лошадей получит **каждый** воин? Очевидно (рис. 1), каждому достанется по 3 лошади.

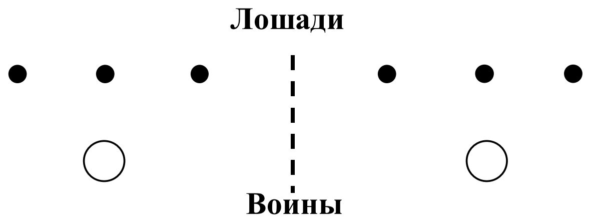


Рис. 1

Но так же, как при умножении мы задавались вопросом о том, что делать, если у нас не 2–3 одинаковых слагаемых, а 15, 200 или 1200 (уж слишком много надо складывать чисел), точно так же и задача «распределить поровну» становится затруднительной, если нужно, скажем, распределить 3759 лошади между 1253 воинами. И гораздо более сложной, нежели умножение, еще и потому, что мы не знаем заранее: по сколько лошадей нужно дать каждому воину — это-то как раз и составляет вопрос задачи.

Конечно, мы могли бы выстроить в шеренгу (нарисовать) 1253 воина; напротив, в другую шеренгу (тоже нарисовать), — 3759 лошадей, и спустя некоторое время (отнюдь не малое) **опытным путем** нашли бы, что каждому воину достанется по 3 лошади.

Ясно, что такой экспериментальный (практический) путь распределения поровну совершенно неприемлем при мало-мальски большом числе предметов.

Осознав задачу, попытаемся найти ее наиболее простую математическую форму (математическую модель). Нельзя ли это самое «распределить поровну» свести к более простому, уже известному действию?

Ну, конечно же, можно. При умножении мы как раз и работали с равными слагаемыми. Давайте-ка, запишем нашу задачу в виде умножения, а для этого сформулируем ее в конкретных числах.

Задача.

Пусть на 6-ти тарелках **поровну** разложены 30 яблок. Сколько яблок **на каждой** тарелке?

Видим, что у нас есть **6 слагаемых Т**(арелка). Известно **В**(сего) — 30 яблок. И известно, что **на каждой** тарелке — **одинаковое** число яблок. Вот только неизвестно, сколько именно. А раз неизвестное число, то и обозначим содержимое каждого слагаемого **Т** буквой x.

Нарисуем задачу (рис. 2).

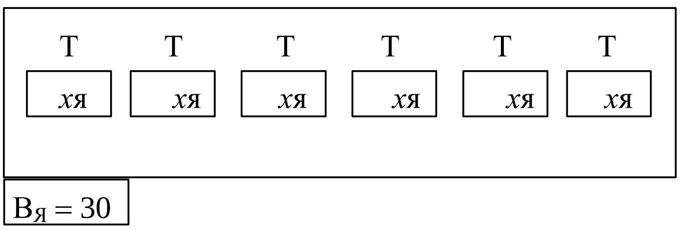


Рис. 2

Мы можем записать сложение равных слагаемых в виде умножения (рис. 3).

Сложение **Умножение**

$$T + T + T + T + T + T = T \cdot 6$$

$$\underbrace{x_я + x_я + x_я + x_я + x_я + x_я}_{6 \text{ раз}} = \boxed{x_я \cdot 6 = 30я}$$

Рис. 3

Рассмотрим равенство, которое я обвел рамкой и его члены (без наименований):

$x \bullet 6 = 30$ (1)

x — неизвестный множитель[4]

6 — известный множитель

30 — известное произведение.

Равенство с неизвестной величиной, как мы помним, называется уравнением. И так же, как при вычитании мы экспериментальным путем (подбором) нашли неизвестное слагаемое для уравнения $x + 5 = 8$ (см. п. Немного о вычитании), точно так же и сейчас мы можем найти неизвестную величину x в уравнении $x \bullet 6 = 30$, спросив себя: что;´ (какое число) нужно умножить на 6, чтобы получить 30? При **хорошем знании** таблицы умножения ответ получаем мгновенно: $x = 5$ (т. к. $5 \bullet 6 = 30$). Наша задача решена: **на каждой** тарелке **Т** лежит 5 яблок. Или иначе: 30 яблок мы **распределили поровну** по 6-ти тарелкам.

Таким образом, мы не только решили конкретную задачу о яблоках, но и нашли общий подход к исходной задаче «распределить поровну».

Видим: в уравнении (1) **по известному произведению** (30) и **известному множителю** (6) мы нашли **неизвестный множитель** ($x = 5$). Так же, как при вычитании, мы говорим:

Определение.

Вот это действие — поиск неизвестного множителя — и называется <u>делением</u>.

А обозначать **само новое действие** будем так: $x = 30 : 6$ (произносится, мы знаем, тридцать разделить на шесть).

И опять же — **самое главное!** — мы всегда будем помнить, что

$x \bullet 6 = 30$ и $x = 30 : 6$ (2)

это «**одно и то же**» (одна и та же математическая модель).

В записи (2) $x \bullet 6 = 30$ — это уравнение, а $x = 30 : 6$ — решение уравнения[5].

Лексика.

Осталось условиться **о терминологии** (сравните с терминологией вычитания — п. Немного о вычитании):

множители				**произведение**
5	•	6	=	30
30	:	6	=	5
30	:	5	=	6
делимое произведение		**делитель** множитель		**частное** множитель

Видим: делимое — это произведение, делитель и частное — это множители.

Все вроде бы хорошо, читатель. Зная таблицу умножения (однозначных чисел), мы, тем самым, знаем и таблицу деления (полный аналог с таблицами сложения и вычитания).

И действительно, на уровне решения **числовых <u>примеров</u>** — все просто. Ну, разве что научиться грамотно делить «уголком». Какие проблемы?

Проблемы возникают при решении задач, и связано это с тем, что множимое и множитель — принципиально неравноправны (скажем так, в приложениях деления).

---

[4] В равенстве (1) я рассматриваю **множимое** — x и **множитель** — 6 как равноправные сомножители (или просто множители).

[5] Это уравнение назовем **вторым** уравнением (в отличие от **первого** нам известного $8 = 5 + x$) или основным уравнением второй группы умножения-деления.

В простейшем случае множимое (содержимое, значение повторяющегося слагаемого) — «размерная» величина, а множитель (число равных слагаемых) — безразмерная величина (просто число). Смотрите: 5я(блок) • 6(раз) = 30я(блок).

Что же получается: 30 яблок разделить на 6 **раз** будет 5 яблок, так что ли? Что это еще за «разы»?!

На самом деле у нас не какие-то неведомые «разы», а вполне конкретные вещи — **тарелки** (6 тарелок). И решая нашу **конкретную** задачу, записанную в виде уравнения $x_я$ • 6 = 30я (рис. 3), мы, на самом деле, должны были бы написать не просто **число 6**, а **6** чего? — **тарелок**, т. е. что-то вроде **6(т)**.

При умножении нас интересует только **число** равных слагаемых («разы»), и, в общем-то, неважно, чего именно: 6 тарелок, 6 коробок и т. п. Но при делении ситуация в корне меняется. Смотрите, я запишу уравнение задачи так: xя(блок) • 6т(арелок) = 30я(блок). Как же теперь записать решение? По-прежнему: 30я(блок) **:** 6т(арелок) = 5я(блок)?

Нет, теперь у нас участвуют два **разных** объекта: **яблоки** и **тарелки**. Помните, выше о решении я сказал: **на каждой** тарелке лежит 5 яблок? То есть распределив (разделив) **поровну** 30 яблок, мы получили **не просто** 5 яблок, а 5 яблок **на каждой** (одной) тарелке. Будем обозначать аналогично тому, как это делается в физике, «размерность» такого решения так: 5я/т (или, несколько выходя за рамки физических обозначений, 5яблок/на 1-й тарелке. Косая черта напоминает о действии деления).

А вот теперь мы приходим еще к одному смыслу деления (помимо рассмотренных выше двух смыслов: **практического** и **математического**). Назовем его — «**физическим**».

Этот смысл предельно прост: 6т(арелок) — **делитель**; результат же деления — частное — 5 яблок **на одной** тарелке.

Значит, мы можем сказать, что 5яблок/на 1-й тарелке — результат деления — это **содержимое единицы делителя**.

Однако вышесказанным трудности, связанные с использованием деления в задачах, не исчерпываются. А что будет, если я в нашем уравнении (1) x • 6 = 30 сделаю множимое известным, **а неизвестным — множитель**, т. е. напишу 5 • x = 30? Решение, понятно, будет x = 30 **:** 5 (найти **неизвестный множитель** — значит, действие деления).

А теперь запишем с «размерностями». Уравнение: 5я(блок) • x = 30я(блок), решение уравнения x = 30я(блок) **:** 5я(блок). Но x чего;´? — Правильно, **тарелок**.

Видим, что **одно и то же** — **<u>формально</u>** — действие деления (поиск неизвестного множителя) распадается **на две совершенно разные** — **<u>содержательно</u>** — формы, которые носят названия: деление на равные части и деление по содержанию (подробно обе формы деления рассмотрены в моей книге «Задача? — Это очень просто!»).

Примечание.

Всем известное утверждение: **на ноль делить нельзя** обосновывается очень просто.

Возьмём числовой пример, — мы хотим узнать, чему равно частное от деления числа 30 на 0. Обозначим это частное через x. В виде деления можем записать 30 : 0 = x, а в виде умножения — 30 = x • 0.

Но мы знаем, что любое число, умноженное на ноль, даёт в результате ноль. В приведённом выше равенстве справа стоит x • 0, т. е. произведение должно быть равно нулю. Левая же часть равенства равна 30. Получается, что наше равенство должно выглядеть так: 30 = 0, что, естественно, невозможно.

А вот ноль, поделённый на любое число (кроме нуля!), даёт в результате ноль. Смотрите (опять на примере): $0 : 30 = x \Leftrightarrow 0 = x \bullet 30 \Rightarrow x = 0$.

Ноль же делённый на ноль — это полная неопределённость.

Степень, корень, логарифм

Обычно считают, что четырьмя арифметическими действиями арифметика и исчерпывается. На самом деле к арифметике относятся также операция возведения в степень (изучается в курсе алгебры 7-го класса) и две ей обратные: извлечение корня (алгебра 8–9-го классов) и логарифм (алгебра 10-го класса).

И как бы необычно, на первый взгляд, это ни казалось, тем не менее, это так.

Поэтому, довершая обзор арифметических действий, я не могу не остановиться вкратце на указанных понятиях.

<u>Сложение</u> одинаковых чисел (слагаемых) мы назвали **<u>умножением</u>**: $2+2+2=2\bullet 3$.

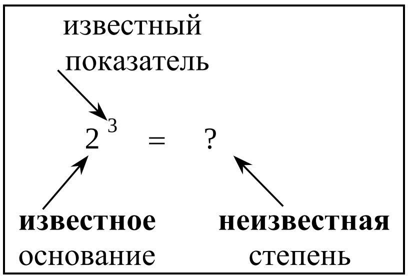
Степень.

<u>Умножение</u> одинаковых чисел (множителей) назовём **<u>возведением в степень</u>**: $2\bullet 2\bullet 2=2^3$.

Повторяющийся множитель (2) называется **<u>основанием</u> степени**.

Количество таких **множителей (3)** — **<u>показатель</u> степени**.

Видим: известны **основание** и **показатель** степени. Неизвестно, **чему равна** третья степень двух.

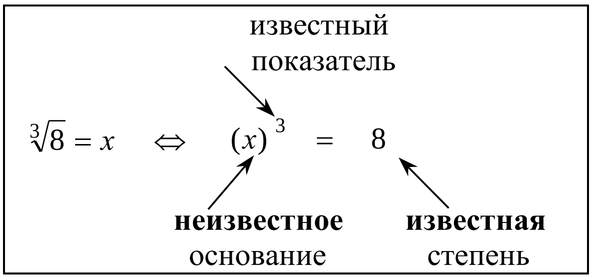


Если строго, то 2^3, как символ степени, это известная величина — третья степень двух. Однако, как под произведением (например, $2\bullet 3=6$) мы понимаем не только само действие умножения: два умножить на три — говорим: **произведение** двух и трёх, но и результат действия умножения — говорим: произведение равно шести, так и под степенью понимаем не только само действие умножения одинаковых множителей, но и результат этого умножения. Например, говорим: два в третьей степени равно восьми или восемь — третья степень двух.

Две обратные нахождению степени операции заключаются в том, что либо неизвестно основание степени, тогда это извлечение корня, либо неизвестен показатель степени, тогда это вычисление логарифма.

Корень.

Чтобы **<u>извлечь корень</u>** третьей степени из восьми, **задаём ключевой вопрос**: **<u>какое число</u>** (основание степени) нужно возвести в третью степень, чтобы получить восемь? — Ясно, что 2. Значит $\sqrt[3]{8}=2$, т.к. $2^3=8$.



Ещё несколько примеров.

Вычислить $\sqrt{36}$ (корень квадратный).

Задаём **ключевой вопрос**: **какое число** надо возвести в квадрат (во вторую степень), чтобы получить 36? — Поскольку $6^2 = 36$, то $\sqrt{36} = 6$.

Вычислить $\sqrt[4]{0{,}0081}$.

Спрашиваем: что нужно возвести в четвёртую степень, чтобы получить 0,0081? — Так как $0{,}3^4 = 0{,}0081$, то $\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$.

Замечание.

Как видите, читатель, объяснить ребёнку **суть извлечения корня любой степени** совсем не трудно. А вот научить его **простейшим** (и самым важным!) вычислениям — гораздо труднее.

Скажем, во втором примере, помимо понимания **смысла степени** как произведения одинаковых множителей $0{,}3 \bullet 0{,}3 \bullet 0{,}3 \bullet 0{,}3$, необходимо безукоризненное владение правилом умножения десятичных дробей (отделяем в результате столько десятичных знаков, сколько их имеется во всех множителях. В частности, этот вопрос я подробно рассматриваю в главе III, Десятичные дроби).

Логарифм.

После того, как мы ясно поняли как вычисляется корень через прямую операцию возведения в степень (**задаём ключевой вопрос**: что возводим в *n*-ю степень, чтобы получить число под корнем?), никаких трудностей не возникает с понятием логарифма. **Ключевой вопрос**: **в какую степень** возводим основание логарифма, чтобы получить число «под логарифмом»?

неизвестный показатель

$$\log_2 8 = x \quad \Leftrightarrow \quad (2)^x = 8$$

известное основание — **известная** степень

Несколько примеров.

Вычислить $\log_3 81$.

Задаём ключевой вопрос: **в какую степень** надо возвести число 3 (основание логарифма), чтобы получить 81? — Ясно, что в четвёртую, т.к. $3^4 = 81$. Число 4 — найденный показатель — и является логарифмом числа 81 по основанию 3. То есть поскольку $3^4 = 81$, то $\log_3 81 = 4$.

Вычислить $\log_{0{,}5} 0{,}125$.

Задаём ключевой вопрос: **в какую степень** надо возвести число 0,5 (основание логарифма), чтобы получить число «под логарифмом» 0,125? Так как $0{,}5^3 = 0{,}125$, то $\log_{0{,}5} 0{,}125 = 3$.

Наконец, два немного более сложных примера.

Вычислить $\log_{\frac{1}{5}} 125$.

Спрашиваем: в какую степень надо возвести число $1/5$, чтобы получить 125? Это уже требует знания формулы 9-го класса: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Избавимся от логарифма, перейдя к прямой операции возведения в степень, т.е. вместо логарифмического уравнения запишем показательное:

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$.

Поскольку $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$ то получим $5^{-x} = 125$. Или $5^{-x} = 5^3$. Теперь видим, приравнивая показатели при одинаковых основаниях, что $-x = 3$ и $x = -3$.

Значит, $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$.

Вычислить $\log_2 \sqrt[3]{16}$.

Используя формулу алгебры-9 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, превращаем корень в степень с дробным показателем и одновременно избавляемся от логарифма:

$\log_2 \sqrt[3]{16} = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{\frac{4}{3}}$ (т.к. $\log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 \sqrt[3]{2^4} = \log_2 2^{\frac{4}{3}}$).

Видим, приравнивая показатели, что $x = \dfrac{4}{3}$.

Значит, $\log_2 \sqrt[3]{16} = \dfrac{4}{3}$.

Замечание.

Как видите, читатель, **логарифм <u>столь же прост</u>, как и корень**. Важно только уметь грамотно считать, понимать смысл степени и владеть базовой алгеброй-7 с элементами алгебры-9, расширяющими алгебру-7 от натуральных показателей до отрицательных и дробных.

Вот поэтому я всегда и говорю: арифметика и алгебра-7 — 90% всей математики, включая высшую.

Чтение и запись натуральных чисел

Прежде чем заняться техникой счёта в главе II, я, читатель, хотел бы напомнить вам основные сведения о натуральных числах и используемой нами десятичной позиционной системе счисления.

Числа, которые получаются **при счёте**, называются **натуральными числами**.

Если натуральные числа расположить в порядке возрастания (от меньшего к большему), то получится **натуральный ряд чисел**.

Наименьшее натуральное число — **единица**.

Наибольшего натурального числа **нет**, потому что какое бы большое число мы ни взяли, к нему всегда можно прибавить ещё единицу, т.е. **счёт можно продолжать бесконечно**.

Запишу натуральный ряд чисел в том порядке, как они называются при счёте:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, …, 19, 20, 21, 22, …, 99, 100, 101, 102, … .

Видим, что **любое натуральное число** записывается с помощью знаков — **десяти цифр**:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Если мы считаем, то цифры от 1 до 9 являются и натуральными числами.

Наша система счисления называется **десятичной** потому что каждые **десять единиц низшего разряда** составляют **одну единицу** следующего **более крупного разряда**:

10 единиц = 1 десяток,

10 десятков = 1 сотня,

10 сотен = 1 тысяча,

10 тысяч = 1 десяток тысяч,

10 десятков тысяч = 1 сотня тысяч,

10 сотен тысяч = 1 миллион…

1 единица, 1 десяток, 1 сотня, 1 тысяча, … называются **разрядными единицами**.

Если в числе **нет единиц какого-либо разряда**, то в записи числа на его месте **пишут цифру 0**. Например, число сто два записывают: 102. Цифра 0 в разряде десятков означает, что единиц этого разряда нет.

Для нас очень важно понимать, что число, записанное цифрами, на самом деле представляет из себя **краткую запись суммы разрядных слагаемых**. Например, число 1 432:

1 432 = 1 тысяча + 4 сотни + 3 десятка + 2 единицы = 1000 + 400 + 30 + 2.

Значение каждой цифры зависит от места (позиции), которое цифра занимает в числе. Например, в числе 9 999 цифра 9 (справа налево) на первом месте показывает число (количество) единиц, на втором — число десятков, та третьем — число сотен, на четвёртом — число тысяч. Поэтому наша десятичная система является ещё и **позиционной**.

Для того, чтобы легче было записывать и читать числа их, справа налево, группируют в **классы**, по три разряда в каждом. Первые три разряда (единицы, десятки, сотни) образуют **класс единиц**, следующие три разряда (тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч образуют класс тысяч). В таблице 1 показаны места, занимаемые каждым разрядом и их объединение в классы от класса единиц до класса миллиардов.

Таблица 1											
IV класс класс миллиардов			III класс класс миллионов			II класс класс тысяч			I класс класс единиц		
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
сотни миллиар-дов	десятки миллиар-дов	единицы миллиар-дов	сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	единицы

При записи чисел один класс **отделяют от другого промежутками**. Например, 1 432, 20 287, 3 200 111, 12 307 000 102.

При обучении делать это надо **обязательно**, в противном случае чтение чисел будет сопровождаться ошибками. Прочитаем числа, которые я написал:

одна тысяча четыреста тридцать два,

двадцать тысяч двести восемьдесят семь,

три миллиона двести тысяч сто одиннадцать,

двенадцать миллиардов триста семь миллионов сто два.

Обратите внимание, что в последнем числе отсутствуют единицы класса тысяч. Если единицы какого-либо класса отсутствуют, то этот класс **при чтении не называется** (но, разумеется, **записывается нулями** на месте отсутствующих разрядов).

Названия классов, следующих за классом миллиардов: триллион, квадриллион, квинтиллион, секстиллион, септиллион, октиллион, нониллион, дециллион, ундециллион, додециллион (названия взяты из книги Я.И.Перельмана «Занимательная арифметика», [5, с. 172]).

Конечно, даже класс триллионов используется крайне редко. И вообще, разрядные единицы записываются даже не в виде единицы с нулями: 10, 100, 1 000, …, 1 000 000, …, 1 000 000 000, … , а в виде степени: 10, 10^2, 10^3, …, 10^6, …, 10^9, … .

Например, класс триллионов — это 10^{12}, единица с двенадцатью нулями, а класс секстиллионов — это 10^{21}, единица с двадцатью одним нулём.