

Глава III

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Несколько слов вначале

«Знаем дроби, — знаем всё!» — это утверждение не полемическое преувеличение, а всего лишь констатация факта.

Действительно, незнание математики начинается, по-настоящему, именно с 6-го класса, именно с дробей (десятичные дроби в 5-м классе где-то как-то формально схватываются, но только «где-то как-то», только, в большинстве случаев, формально).

С одной стороны, это связано с тем, что несколько неясны шестиклассникам понятия простого и составного чисел, кратного и наименьшего общего кратного, **и, главное, смысл дроби**. А с другой стороны, копни чуть поглубже, сразу выясняется принципиальная техническая преграда: безграмотный счёт, **и, прежде всего, плохое владение таблицей умножения**. Обе эти причины, но особенно вторая, приводят к тому, что многие шестиклассники к началу 7-го класса становятся безнадежно слабыми.

Однако мы с вами, читатель, поработав с главой II, с натуральными числами, **технически должны быть абсолютно подготовлены к преодолению дробей** (если что-то было пропущено, то это нетрудно наверстать, заглянув в нужный раздел главы II). В этой главе я познакомлю вас с основополагающими понятиями, необходимыми для понимания дробей, но напоминаю, что книга всё же называется «Минимум грамотного счёта», а не «Знаем дроби, — знаем всё!» Поэтому, в этой главе почти не будет подборок дидактического материала — только самая необходимая основа, чтобы вы могли помочь ребёнку справиться с любой смысловой и со многими техническими счётными проблемами.

Часть п. Немного о дробях и п. Ещё немного о дробях я взял из своей книги «Задача? — Это очень просто!»

Немного о дробях

Дробь или дробное число возникает совершенно естественным образом из необходимости разделить (распределить) нечто **целое** (математически — **единицу**) **на равные части**: 1 пирог — поровну между 5 гостями, 1 бидон молока — поровну на 3 покупателей и т. п.

Равные части целого (единицы) называются **долями**, а **дробью** соответственно является **одна или несколько долей** целого.

Кроме деления целого на равные части, дробь возникает еще из необходимости измерения. Например, за основные единицы измерения длины и массы приняты 1 метр и 1 килограмм. Если нам нужно измерить длину стола или купить кусок мяса, то ясно, что мало найдется столов длиной ровно в один метр. Стол, как правило, будет либо длиннее, либо короче. Точно также и кусок мяса, покупаемый на рынке, вряд ли будет весить ровно один килограмм. Чтобы уметь измерять более точно, мы вводим более мелкие (дольные) единицы: 1 метр делим на 100 равных частей (долей) и каждую такую часть называем 1 сантиметр; 1 килограмм делим на 1000 равных частей (долей) и одну такую часть называем 1 грамм.

Хотя речь идет об измерении, но сами более мелкие единицы (1 см, 1 г) получаются опять-таки в результате деления **целого** (1 м, 1 кг) **на равные части** (доли).

Для нас, однако, самым существенным должно являться то, что счёт дробных чисел — это **тот же самый счёт натуральных чисел** только с другой, более мелкой единицей измерения, с другой «размерностью».

(Понятие «размерность», в кавычках, оказывается, с точки зрения методики, бесценным при решении текстовых задач. Оно удобнее понятия «именованные числа»). Этим понятием я пользуюсь для постоянного подчёркивания основной идеи в приложениях математики: **«Бойтесь просто чисел!»**, а также для постоянного напоминания одного из основных свойств физической размерности: **складывать и вычитать можно только величины одной размерности**. Для нас это выражается словами: яблоки + яблоки, десятки + десятки, сотые доли + сотые доли...)

Приведу в связи с этим довольно большую выдержку из книги известного венгерского математика Розы Петер: «... и ребёнок может быть поставлен перед делением, которое не может быть выполнено в пределах натурального ряда чисел. Двое детей должны разделить между собой яблоко; они уверены, что ни один из них не получит **целого** яблока. **Не задумываясь**, они его разрезают пополам.

До сих пор мы считали число **1 неделимой единицей**. Теперь же вводим его **половину** в качестве **меньшей единицы**, и раз сделан первый смелый шаг, то ничто нам не мешает разделить 1 на 3, 4, 5,... и любое число частей и **вести счёт** в дальнейшем **этими новыми малыми единицами**, полученными таким способом. Это значит, что мы **можем считать так**: две половины, три половины, четыре половины... или, выражая в знаках: $2/2$; $3/2$; $4/2$...

Число **под** дробной линией **именует доли, то есть новые единицы**, о которых идет речь; это знаменатель. Число **над** дробной чертой сосчитывает **сколько таких единиц** взято; это числитель» (все выделено мной. — В. Х. [8, с. 95–96]).

Вы видите, читатель, что стоит только использовать понятие «размерности», т. е. сказать **какими долями** единицы считаем: половинками (вторыми долями), третьими долями... десятими долями... — и счёт в области дробных чисел становится счётом в области привычных натуральных чисел, но... с указанием «размерности». И как только ребёнок воспринял эту идею счёта долей одной «размерности», для него становится **совершенно прозрачной** необходимость приведения дробей к общему знаменателю при сложении и вычитании дробей — ведь он уже превосходно усвоил, что складывать можно величины **только одной «размерности**»: яблоки + яблоки, тракторы + тракторы,... а теперь — третьи доли + третьи доли, десятые доли + десятые доли и т. п.

Название новых единиц — «размерность» — указана в знаменателе, и как только дроби приведены к общему знаменателю, мы можем о нем, знаменателе, «забыть» и вести счёт натуральными числами, например: $2/5 + 1/5$ — два + один = три, **но чего?** «3»? — Правильно, **3 пятых доли**.

А вот две пятых и одну третью мы сложить не сможем поскольку это величины разной «размерности».

Мы видим, что сама сущность понятия «Дробь» предельно ясна — это разбиение единицы на равные части и счёт долями единицы. Другое дело, что поначалу очень трудны для восприятия шестиклассника понятия кратного, приведение дроби к новому знаменателю, кратному прежнему. По необходимости вкратце расскажу о разнице между, скажем так, **двумя сторонами понятия «Дробь»**, что потребуется нам в дальнейшем.

Две стороны дроби

Дробь возникает в процессе деления нечто целого на равные части. Примеры целого: 1 пирог, 1 километр, 1 бак молока.

Мы видим: математически **целое** выражается **единицей**.

Однако каждое целое — это «что-то», каждое целое — «из чего-то состоит», у каждого целого — есть «свое содержимое». Это «содержимое» отнюдь не всегда должно быть равным единице и это «содержимое» — уже «размерная» величина.

Например, 1 пирог весит 20 кг.

1 пирог — целое, а **20 кг/в одном пироге** — «содержимое» целого.
Чисто визуально:

Целое		«Содержимое» целого
1 пирог		
	Н О	20 кг/в 1-м пироге
1 километр		
	Н О	1000 м/в 1-м километре
1 бак молока		
	Н О	35 л/в 1-м баке

Рис. 1, а

Рис. 1, б

Целое — величина безразмерная: нам все равно пирог ли, километр ли, лишь бы это был **один** пирог, **один** километр (рис. 1, а). И если мы разобьём ящик под названием 1 пирог или 1 километр на две равные части, то и в первом и во втором случае у нас будут **одни и те же**

1 ящик (пирог)	1 ящик (километр)	1 ящик (бак)	
1/2 1/2	1/2 1/2	1/2 1/2	Рис. 2

вторые доли (рис. 2):

Но как только мы вспомним о «содержимом» целого (рис. 1, б): **в одном пироге — 20 килограммов** (рис. 3), то сразу увидим, что у дроби **как безразмерной части целого — 1/2** (часть целого) — есть и «размерная» составляющая — 10 кг (рис. 4):

Целое	«Содержимое» целого	
1 ящик (пирог)		
	20 кг/в 1-м пироге	Рис. 3

Дробь — «безразмерная» величина «Содержимое» дроби — «размерная» величина

1 ящик (пирог)		1 ящик (пирог)		
1/2 1/2	Н О	10 кг 10 кг	в 1/2 части	в 1/2 части
часть ящика				
часть ящика				
				Рис. 4

Аналогично (рис. 5):

1 ящик (километр)		1 ящик (километр)		
1/2 1/2	Н О	500 м 500 м	в 1/2 части	в 1/2 части
часть ящика				
часть ящика				
1 ящик (бак)		1 ящик (бак)		
1/2 1/2	Н О	17,5 л 17,5 л	в 1/2 части	в 1/2 части
часть ящика				
часть ящика				Рис. 5

Видим: **целое** может быть совершенно разным по содержанию, но для нас это — одна и та же **единица** и доли единицы тоже одни и те же — **вторые**: $\frac{1}{2}$ пирога, $\frac{1}{2}$ километра, $\frac{1}{2}$ бака. А вот содержимое дроби $\frac{1}{2}$ — совершенно различное: 10 кг, 500 м, 17,5 л в каждой одной второй доле (рис. 4, рис. 5)!

Четкое осознание разницы между двумя сторонами понятия «Дробь» (кратко: дробь как **безразмерная часть** целого и дробь как «размерная» **величина содержимого части** целого) очень помогает безошибочно и предельно осознанно находить дробь от числа и число по дроби и основанных на этом действиях с процентами (например, найти число, если 3% его составляют 45).

Дробь как результат деления

В главе I, в п. Немного о делении, рассказано о «практическом» смысле деления (распределить лошадей между воинами) или, что то же, о делении на равные части.

Именно деление на равные части помогает нам **ввести дробь ещё и как арифметическую операцию**, как деление натуральных чисел, не делящихся нацело. Поскольку изложение этого пункта практически стандартно для всех учебников, я приведу выдержку из учебника Математика-4 И.В. Барановой и З.Г. Борчуговой [9, с. 144–145] с небольшими добавлениями (всё подчёркнутое будет выделено мной).

Задача 1. Шесть одинаковых плиток шоколада **разделили поровну** между **тремя** детьми. Сколько шоколада получит каждый ребёнок?

Это задача **на деление числа на равные части**. Решается она действием деления:

$$6 : 3 = 2 \text{ (пл.)}.$$

Задача 2. Две одинаковые плитки шоколада **разделили поровну** между **тремя** детьми. Сколько шоколада получит каждый ребёнок?

Задача 2 также на деление числа на равные части. Она должна решаться действием деления: $2 : 3$.

Мы знаем, что никакое натуральное число не может быть частным этих чисел (т.е. 2 **не делится нацело** на 3).

Найдём ответ на вопрос задачи, выполнив следующие практические действия. Разделим каждую плитку шоколада **на 3 равные части** (т.е. всего получим **6 равных частей**, каждая из которых называется $\frac{1}{3}$ плитки) и каждому ребёнку дадим **2 такие части**.

Каждый ребёнок получит $\frac{2}{3}$ плитки (так как **6 частей : 3 = 2 части** или $\frac{2}{3}$, рис. 6).

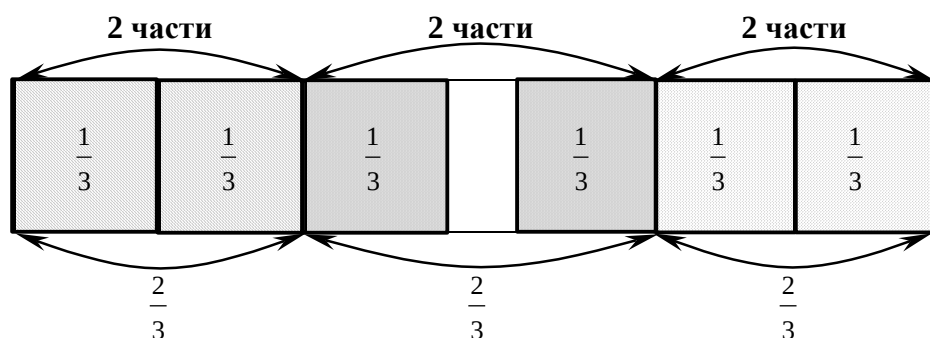


Рис. 6

Значит, частным от деления числа 2 на число 3 будет число $\frac{2}{3}$ и можно записать:

$$2 : 3 = \frac{2}{3} \text{ (пл.)}.$$

Частное от деления одного натурального числа на другое всегда можно записать в виде дроби, числитель которой равен делимому, знаменатель — делителю.

(А от себя добавлю, читатель: вы видите, как к действию деления натуральных чисел на цело мы пришли **практически**, от задачи **распределить поровну**, так и расширяем действие деления натуральных чисел **тоже практически** и тоже задачей **распределить поровну**, только на сей раз **в качестве натуральных чисел у нас выступают части**, доли целого — числитель дробей.)

Примеры.

$$3:4=\frac{3}{4}, 8:2=\frac{8}{2}=4, 7:5=\frac{7}{5}, 6:1=\frac{6}{1}=6, 0:a=\frac{0}{a}=0.$$

Итак, дроби могут получиться при делении единицы на равные части, при измерении, при делении натуральных чисел.



Элементы ЗЯМ₂ (знаниевое ядро математики «Дробь»)

Если взглянуть на учебники математики, то создаётся впечатление, что в математике «ну очень много всего!» и всё равноценно важно, всё надо знать и уметь: и дроби, и уравнения, и задачи... И совершенно вроде бы очевидный, веками проверенный вывод из этого: да разве ж можно всё это осилить обычному человеку? нет, сие доступно только особо избранным да одарённым (как с действием деления лет пятьсот назад: «Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна.» [5, с. 47]).

Однако с точки зрения технологии обучения выясняется удивительная вещь: весь огромный объём школьной математики базируется **всего лишь на восьми** концентрированных образованиях, называемых мною «Знаниевые ядра математики», сокращённо — ЗЯМ (подробнее об этом — приложение 3). Знаниевые ядра формируются предельно технологичным образом, т.е. ничего «сверх» ни от учителя, ни от ученика не требуется — нужно лишь соблюдать технологию, и результат — «в пределах допусков» — гарантирован.

В сущности, глава II — это описание формирования ЗЯМ₁ (первого знаниевого ядра математики).

ЗЯМ₁ — счётная техника в натуральных числах — предоснова и необходимое условие формирования остальных семи знаниевых ядер.

Однако важнейшим из всех знаниевых ядер является ЗЯМ₂ «Дробь».

На схеме в приложении 3, рис. 2 первым пунктом идёт формирование элементов ЗЯМ₂ или формирование А-зоны. «Ни одно понятие А-зоны, ни один технологический приём **не могут быть не то что пропущены, а даже просто плохо усвоены!**» Поэтому, в основном, читатель, я сосредоточу ваше внимание на элементах знаниевого ядра. Хотя, «**сами по себе**», эти элементы нам «не нужны», но отличное владение ими играет огромную роль в формировании «клетки» и «оболочки» знаниевого ядра.

Как я уже сказал выше, дидактические материалы, в силу их объёмности, я в этой книге почти не привожу. Но, разобравшись со смыслом необходимых понятий и приёмов, разобрав примеры, вы будете достаточно подготовлены в деле помощи ребёнку.

Центральное понятие ядра (доли, дробь, числитель, знаменатель)

В п. Немного о дробях мы разобрались с тем, как возникает дробь и что это такое, а также с двумя сторонами дроби. Пока нас будет интересовать дробь как безразмерная часть целого.

Определение.

Доли — равные части целого (единицы).

Дробь (дробное число) — одна или несколько долей.

Названия долей зависят от того, на сколько **равных** частей разделено целое (единица). Одно и то же целое мы можем разделить на сколько угодно равных частей (таблица 1).

Таблица 1					
Доли единицы				Названия долей	
1/2		1/2		вторые доли (половина)	
1/3	1/3	1/3	1/3	третьи доли (треть)	
1/4	1/4	1/4	1/4	четвёртые доли (четверть)	
1/5	1/5	1/5	1/5	пятые доли	

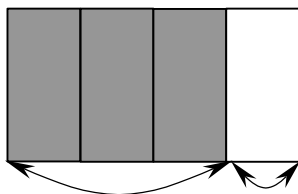
Дробные числа записывают с помощью натуральных чисел и черты (дробной черты). Такие числа называют обыкновенными дробями. Например, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ (рис. 7).

На рис. 7 разделили целое на 4 части и взяли 3 части из четырёх: дробь $\frac{3}{4}$.

Знаменатель показывает, на сколько частей **разделили целое** (единицу).

Числитель показывает, сколько таких частей **взяли**.

Важнейшим для нас является знаменатель, поскольку он именуется доли, определяет, с какими дробными числами мы работаем! Поэтому, рассказывая о приведении к общему знаменателю, я всегда говорю о том, что сначала пишем знаменатель, а уж потом ведём весь остальной счёт.



Число, стоящее **над** чертой, называют **числителем** дроби.

Число, стоящее **под** чертой, называют **знаменателем** дроби.

$$\begin{array}{r} 3 \leftarrow \text{числитель} \\ \hline 4 \leftarrow \text{знаменатель} \end{array}$$

Рис. 7

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{1}{4}$$

Примеры.

1. Какую **часть часа** составляют: 1 мин, 11 мин, 59 мин?

Для решения, нужно знать **содержимое целого**, называемого 1 час.

Итак, раз речь **о частях** целого, то, тем самым, и **о дробях**, то есть главное — определить-ся со **знаменателем**: на сколько частей, долей разбито целое — 1 час?

Целое	«Содержимое» целого
1 ящик (час)	1 ящик (час)
	60 минут/в 1-ом часе

Рис. 8

Видим (рис. 8), что в 1-ом часе содержится 60 минут (долей, частей). Значит, целое разделено на 60 частей — это **знаменатель**, а взяты, соответственно, 1, 11 и 59 частей (минут).

В виде дробей пишем:

$$\frac{1}{60}, \frac{11}{60}, \frac{59}{60}.$$

Эта идея — дроби как части целого — воспринимается довольно легко, нужно лишь ещё несколько примеров такого же рода.

2. Какую **часть километра** составляют: 1 м, 27 м, 605 м?

Так как 1 км = 1000 м (1 километр разбит на 1000 равных частей — метров), то имеем дроби:

$$\frac{1}{1000}, \frac{27}{1000}, \frac{605}{1000}.$$

Внимание!

Я сказал, что сама идея «выразить части целого в виде дроби» воспринимается довольно легко. Всё верно. Но спросите ребёнка: какую часть метра составляют 5 дм, или какую часть сантиметра (метра) составляют 5 мм. В восьми случаях из десяти ответа вы не услышите, поскольку меры нынче дети знают исключительно плохо. Да что там миллиметры и дециметры, если в половине случаев дети — до старшеклассников включительно! — не знают, что 1 т = 1000 кг, 1 кг = 1000 г. Я уж не говорю о переводе единиц измерения, что требует знания десятичных дробей и самих мер, разумеется (с переводом мер мы познакомимся в конце этой

книги). **Обязательно проследите за тем, чтобы ребёнок выучил меры** (хотя бы те, что на обложке тонкой тетради в клетку)!

Итак, с идеей: выразить часть целого новыми для нас — дробными числами мы освоились. Однако, в прикладном значении, гораздо важнее уяснить: то, что мы делали выше — на самом деле является **переводом мер**. Это возникновение дроби в результате измерения, перевод **мелких мер** (минут, метров) **как натуральных чисел** — в **крупные меры** (часы, километры), **выражаемые дробными числами, частями** крупных мер. Не просто $\frac{1}{60}$, а $\frac{1}{60}$

чего? Правильно, $\frac{1}{60}$ **часа**. То есть возникает **равенство**, выражающее связь мелких мер с крупными, **выражающее перевод** мелких мер в крупные!

$$1 \text{ минута} = \frac{1}{60} \text{ часть часа,}$$

$$11 \text{ минут} = \frac{11}{60} \text{ частей часа,}$$

$$59 \text{ минут} = \frac{59}{60} \text{ частей часа.}$$

Или:

$$1 \text{ м} = \frac{1}{1000} \text{ км,}$$

$$27 \text{ м} = \frac{27}{1000} \text{ км,}$$

$$605 \text{ м} = \frac{605}{1000} \text{ км.}$$

Такой перевод мер (с **наименованием единиц измерения**) очень важен для углубления понимания смысла дроби как части целого. Посмотрите, читатель, слева у нас стоят натуральные числа: 1, 27, 605 (перевод метров в километры) — **большие (или равные) единицы**, а справа — **части целого (единицы)**: $\frac{1}{1000}$, $\frac{27}{1000}$, $\frac{605}{1000}$ — **меньшие единицы**.

Стандартная ошибка при написании:

$$11 \text{ мин} = \frac{11}{60},$$

$$605 = \frac{605}{1000}.$$

Внимание.

Обязательно обратите на эту ошибку внимание ребёнка (даже если он её не делает!), сказав ему что-нибудь вроде: «Что же получается, если мы не напишем единиц измерения:

11 — число **большее единицы** — равно $\frac{11}{60}$ — части единицы, числу, **меньшему единицы**,

так что ли?.. Вот поэтому, без указания единиц измерения, такая запись не просто ошибочна, но и бессмысленна. Ведь у нас в примерах спрашивается: **минуты** — какую часть **чего?** — **часа** составляют?.. метры — какую часть **чего?** — **километра** составляют?»

Правильные и неправильные дроби

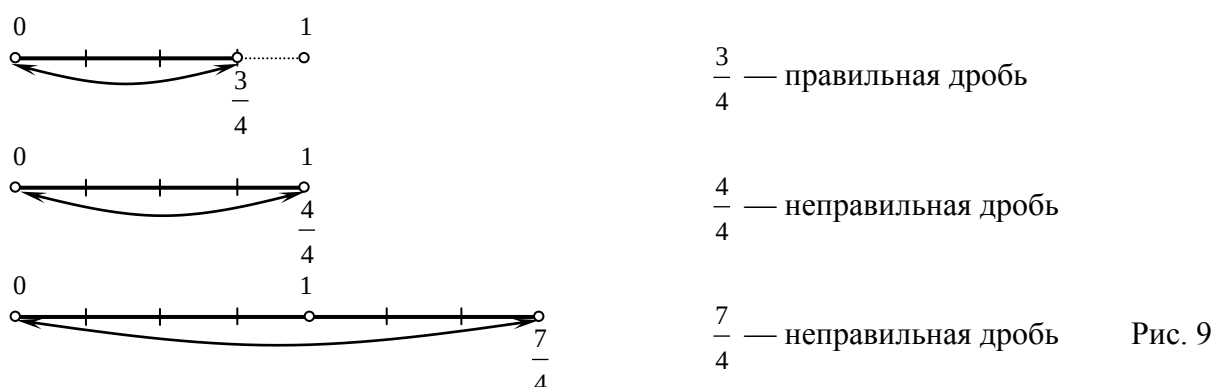
Хотя понятия правильных и неправильных дробей и не входят в число ключевых, но они важны для умения **сравнивать дроби** **«по отношению к единице»** (не приводя их к общему знаменателю).

Посмотрите, читатель, на рис. 9.

Видим, дробь $\frac{3}{4}$ **меньше** единицы (по смыслу дроби: разделили единицу на 4 части, а взяли только 3 части из четырёх).

Видим, дробь $\frac{4}{4}$ **равна** единицы (по смыслу дроби: разделили единицу на 4 части и взяли все 4 части из четырёх, т.е. единицу).

Видим, дробь $\frac{7}{4}$ **больше** единицы (по смыслу дроби: разделили единицу на 4 части, а взяли 7 частей, т.е. один целый пирог — единицу — разделили на 4 части, да ещё 3 таких же части взяли из другого пирога — единицы).



Определение.

Правильной дробью называют дробь, у которой числитель **меньше** знаменателя.

Неправильной дробью называют дробь, у которой числитель **больше или равен** знаменателю.

А теперь мы можем сравнивать дроби **«по отношению к единице»** поскольку **правильная дробь меньше единицы, а неправильная — больше или равна единице.**

Примеры.

$\frac{3}{5} < \frac{5}{3}$, т.к. $\frac{3}{5} < 1$ — правильная дробь, а $\frac{5}{3} > 1$ — неправильная дробь.

$\frac{9}{2} > \frac{100}{101}$, $\frac{17}{17} > \frac{5}{12}$, $\frac{1382}{1385} < \frac{2445}{2298}$.

В таблице 2 дроби распределены на правильные и неправильные.

Таблица 2				
Правильная дробь < 1	$\frac{3}{5}$	$\frac{100}{101}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1382}{1385}$
Неправильная дробь ≥ 1	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{17}{17}$	$\frac{2445}{2298}$

Дроби с одинаковыми знаменателями или числителями

Как и предыдущие, эти дроби также не входят в число ключевых понятий, но, как и предыдущие, эти дроби важны для углубления понимания смысла дроби и для умения сравнивать такие дроби.

Дроби с одинаковыми знаменателями

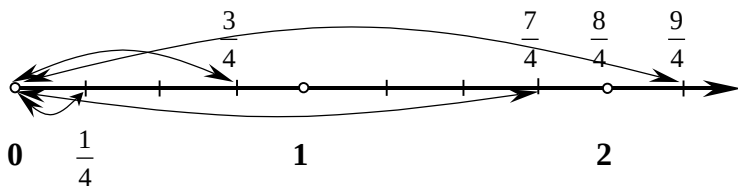


Рис. 10

Из рис. 10 видим, что:

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} < \frac{9}{4}.$$

Это очевидно, поскольку доли — четвёртые (то есть дроби с одинаковым знаменателем — четыре, а числители — сколько таких долей взяли — разные).

Чем больше долей (одинаковых частей, кусков целого) возьмём, тем больше будет дробь.

Вывод: если знаменатели одинаковы, то та дробь больше, у которой числитель больше.

Примеры.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} < \frac{4}{5}, \quad \frac{12}{17} > \frac{7}{17}, \quad \frac{121}{150} < \frac{122}{150}, \\ \frac{6}{7} > \frac{3}{7}, \quad \frac{2}{3} < \frac{4}{3}, \quad \frac{999}{1000} > \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

Дроби с одинаковыми числителями

Таблица 3				
Доли единицы				
1/2		1/2		
1/3	1/3	1/3		
1/4	1/4	1/4	1/4	
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Из таблицы 3 видим, что:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}.$$

Это очевидно, поскольку чем больше знаменатель, тем на большее число долей (частей, кусков) разделили одно и то же целое, одну и ту же единицу. Но чем больше кусочков, тем меньше каждый кусочек, каждая доля. Одно дело разрезать пирог пополам, на две части — дробь $\frac{1}{2}$, совсем другое — на пять кусочков — дробь $\frac{1}{5}$. Ясно, что $\frac{1}{2}$ будет больше,

чем $\frac{1}{5}$.

Вывод: та доля больше, у которой знаменатель меньше (крупных одинаковых кусков пирога меньше, чем мелких одинаковых кусков).

А теперь распространим наш вывод о крупных и мелких долях на дроби с одинаковыми числителями. Очевидно, что если взять какое-то количество крупных долей и такое же количество мелких долей, то дробь, выражаемая крупными долями, будет больше дроби, выражаемой мелкими долями.

Пример.

Так как $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$, то $\frac{2}{2} > \frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5}$.

Вывод: если числители одинаковы, то та дробь больше, у которой знаменатель меньше.

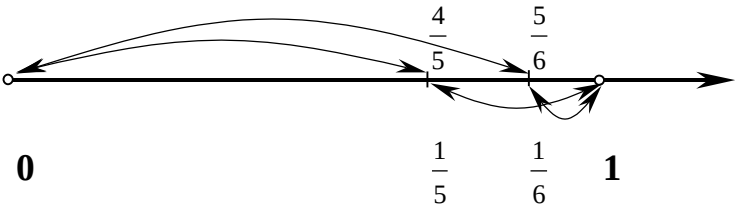
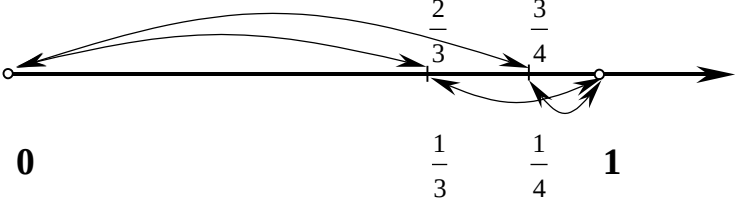
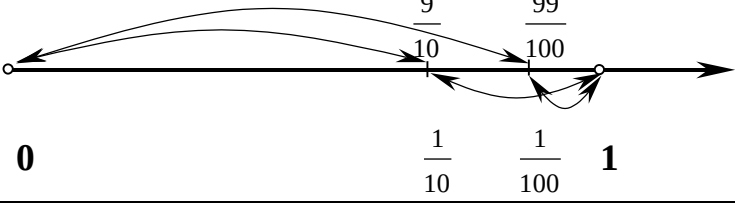
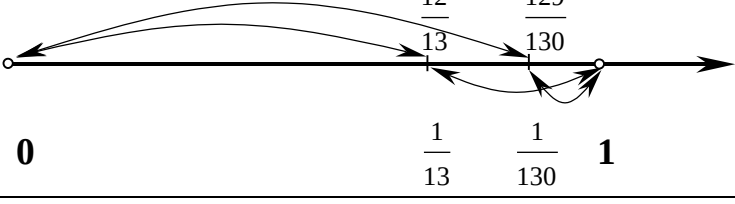
Сравнение дробей: «ближе к единице» и «по отношению к $\frac{1}{2}$ »

Поскольку вам, читатель, может встретиться учебник Математика-5 под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина, то я уделю пару страниц ещё двум способам сравнения дробей без приведения их к общему знаменателю, с тем, чтобы вы, при случае, могли помочь своему ребёнку.

«Ближе к единице».

Если правильные и неправильные дроби мы можем сравнить «**по отношению к единице**» (меньше или больше дробь единицы), то способом «**ближе к единице**» мы можем сравнить некоторые правильные дроби с разными знаменателями. Ограничусь разбором примеров задания № 822 из учебника Г.В. Дорофеева [10, с. 177].

Способ сравнения «ближе к единице» **основывается** на сравнении дробей с разными знаменателями и одинаковыми числителями.

Таблица 4			
Сравн. дроби	Рисунок в произвольном масштабе	Дополнение дробей до 1	Сравнение дробей
$\frac{4}{5} \text{ и } \frac{5}{6}$		$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$	$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} \Rightarrow$ $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$
$\frac{3}{4} \text{ и } \frac{2}{3}$		$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$	$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$
$\frac{9}{10} \text{ и } \frac{99}{100}$		$\frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$ $\frac{99}{100} + \frac{1}{100} = 1$	$\frac{1}{100} < \frac{1}{10} \Rightarrow$ $\frac{99}{100} > \frac{9}{10}$
$\frac{129}{130} \text{ и } \frac{12}{13}$		$\frac{129}{130} + \frac{1}{130} = 1$ $\frac{12}{13} + \frac{1}{13} = 1$	$\frac{1}{130} < \frac{1}{13} \Rightarrow$ $\frac{129}{130} > \frac{12}{13}$

В таблице 4, в третьем столбце, мы **дополняем** сравниваемые дроби **до единицы** соответствующими долями ($\frac{1}{5}, \frac{1}{6}; \frac{1}{4}, \frac{1}{3}; \frac{1}{10}, \frac{1}{100}; \frac{1}{130}, \frac{1}{13}$) и **сравниваем** эти дополняющие доли, отсчитывая их от 1 (единицы) к 0 (нулю).

Во втором столбце таблицы 4 **видим**: чем меньше **дополняющая доля** (стрелки вниз) отличается от 1, тем **ближе сама дробь к 1**, а значит, тем самым, она и больше (стрелки вверх).

Чтобы сделать идею дополняющих дробей совершенно очевидной, я привожу рис. 11.

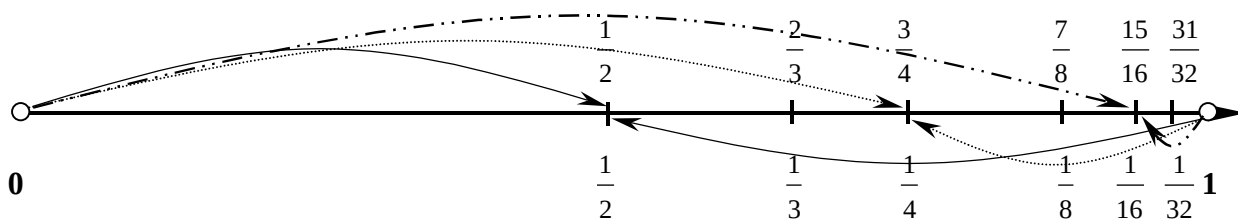


Рис. 11

Видим, что если доли, дополняющие исходные дроби до 1 **уменьшаются**, то **сами дроби** при этом **увеличиваются**.

Чем меньше дополняющая дробь отличается от единицы, тем **ближе** сама дробь к 1, т.е. **тем больше** исходная дробь.

Из неравенств: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{16} > \frac{1}{32}$ следуют неравенства: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{15}{16} < \frac{31}{32}$.

«По отношению к $\frac{1}{2}$ ».

Знаменатель — чётное число.

Если знаменатель — чётное число, то всё совсем просто.

Пример.

Сравнить дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{11}{16}$.

Мы знаем, что знаменатель показывает **на сколько равных частей разделили единицу** (целое). Если мы поделим знаменатель на 2, то узнаем, **сколько частей содержится в одной второй целой единицы**.

12 частей : 2 = **6 частей** в $\frac{1}{2}$ (в одной второй).

А взяли всего **5 частей** (числитель дроби $\frac{5}{12}$). Значит, $\frac{5}{12} < \frac{1}{2}$.

16 частей : 2 = **8 частей** в $\frac{1}{2}$.

А взяли всего **11 частей** (числитель дроби $\frac{11}{16}$). Значит, $\frac{11}{16} > \frac{1}{2}$.

В виде двойного неравенства (не забывайте, читатель, это пояснение для вас):

$$\frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{11}{16}, \Rightarrow \frac{5}{12} < \frac{11}{16}.$$

На рис. 12 в произвольном масштабе — пояснение для ребёнка.

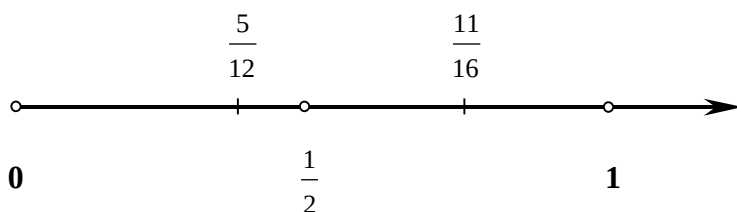


Рис. 12

Пара, уже очевидных, неравенств в таблице 5.

Таблица 5	
$\frac{3}{10} < \frac{9}{14}$	$10 : 2 = 5$ частей в $1/2$, а взяли <u>3</u> части. $14 : 2 = 7$ частей в $1/2$, а взяли <u>9</u> частей.
$\frac{13}{30} < \frac{51}{100}$	$30 : 2 = 15$ частей в $1/2$, а взяли <u>13</u> частей. $100 : 2 = 50$ частей в $1/2$, а взяли <u>51</u> часть.

Знаменатель — нечётное число.

В этом случае — немного сложнее с пояснениями для ребёнка, если мы ещё не знакомы с десятичными дробями.

Тем не менее, «на пальцах», относительно нетрудно всё показать.

Пример 1.

Сравнить дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

На рис. 13 **видим** (это очевидно — дроби с одинаковым знаменателем), что $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$.

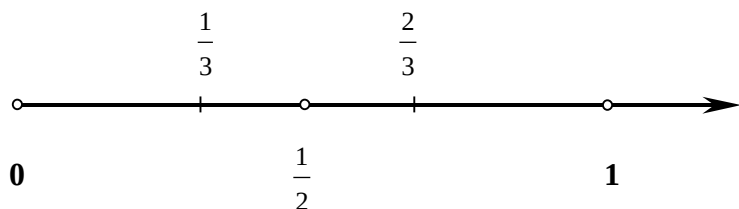


Рис. 13

Также **видим**, что $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

Ребёнку достаточно сказать, что если **3** части (знаменатель дроби) **разделим на 2**, то получим число, **большее 1** части, но **меньшее 2** частей. Это значит, что половина единицы (дробь $\frac{1}{2}$) **лежит между** дробями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. То есть $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, что и видно на рис. 13.

Что же мы делали, деля 3 части на 2?

Мы находили **содержимое дроби** $\frac{1}{2}$ (в $\frac{1}{2}$ содержится: 3 части : 2 = 1,5 части знаменателя 3).

Сравнить дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{4}{7}$.

В знаменателе 7 у нас содержится 7 частей (долей) единицы.

7 частей : 2 = 3,5 части знаменателя 7, содержащихся в половине единицы, в дроби $\frac{1}{2}$.

Или иначе:

3 части < 7 : 2 < 4 части, т.е. дробь $\frac{1}{2}$ лежит между дробями $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$. «На глаз» нужно научиться сразу видеть, что $\frac{3}{7}$ **немного меньше** половины, $\frac{1}{2}$ -ой (взято 3 части из 7-ми), а $\frac{4}{7}$ — **немного больше** половины, $\frac{1}{2}$ -ой (взято 4 части из 7-ми). Так как $\frac{3}{7}$ меньше $\frac{1}{2}$, то $\frac{2}{7}$ и подавно меньше $\frac{1}{2}$.

Примеры.

$$\frac{2}{3} > \frac{3}{7}, \text{ т.к. } \frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \text{ а } \frac{3}{7} < \frac{1}{2}.$$

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{8}, \text{ т.к. } \frac{4}{5} > \frac{1}{2}, \text{ а } \frac{3}{8} < \frac{1}{2}.$$

$$\frac{15}{28} > \frac{10}{27}, \text{ т.к. } \frac{15}{28} > \frac{1}{2}, \text{ а } \frac{10}{27} < \frac{1}{2}.$$

В последнем примере: 28 частей : 2 = **14 частей** в $\frac{1}{2}$ -ой, а взято **15 частей**; 27 частей : 2

больше 13 частей (27 : 2 = 13,5), а взято **только 10 частей**.

Приведу несколько примеров, помогающих сформировать умение с одного взгляда, «на глаз», определять: больше или меньше дробь, чем $\frac{1}{2}$ (таблица 6).

Таблица 6	
Знаменатель — чётный	
$\frac{1}{2}$ — половина	
меньше половины	больше половины
$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$
$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}$
$\frac{1}{12}, \dots, \frac{3}{12}, \dots, \frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}, \dots, \frac{9}{12}, \dots, \frac{11}{12}$
Знаменатель — нечётный	
$\frac{1}{2}$ — половина	
меньше половины	больше половины
$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$
$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$
$\frac{1}{13}, \dots, \frac{4}{13}, \dots, \frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}, \dots, \frac{10}{13}, \dots, \frac{12}{13}$



Содержательное окружение ядра (простые числа, кратное, НОК, основное свойство дроби)

В этом разделе, читатель, я кратко познакомлю вас с **наиболее важными и наиболее трудными для ребёнка** понятиями знаниевого ядра математики «Дробь».

Определения будут даваться не строго математически (**поскольку именно математическая строгость определений в учебниках порождает на первых же шагах всё дальнейшее непонимание ребёнка**), а предельно содержательно.

Простые и составные числа

Число 5 делится (нацело) только на единицу и на себя.

Число 13 тоже делится (нацело) только на 1 и на 13.

Определение.

Простые числа — это числа, которые делятся **только на единицу и на себя** (имеют только два делителя).

Простые числа крайне важны для умения находить наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел и, тем самым, для приведения дробей к наименьшему общему знаменателю, так как НОК знаменателей дробей это и есть наименьший общий знаменатель.

Первые несколько простых чисел мы находим очень просто: перебираем натуральные числа и смотрим — делятся ли они только на себя и на единицу **или делятся ещё на что-то?** Если делятся ещё на что-то (входят в таблицу умножения), то такие числа называются **составными**. Например, число 4 делится, кроме 1 и 4, ещё и на 2; число 15, кроме 1 и 15, делится ещё на 3 и 5. Это составные числа.

Первые десять простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Эти десять чисел нет никакой нужды запоминать. Достаточно мысленно быстро просмотреть таблицу умножения — и сразу увидим, что их **нет в таблице умножения** (умножение на 1 мы во внимание не принимаем).

Замечание.

1 — не простое число, так как по строгому определению простое число должно иметь два делителя, а 1 имеет только один, и **не составное**.

Разложение на простые множители

Хотя этот пункт относится к разделу «Технологические приёмы и инструментарий» ЗЯМ₂, он нам понадобится для освоения понятия НОК.

Каждое составное число может быть **разложено на произведение только простых множителей (разложено — значит записано в виде произведения)**.

Примеры.

$$15 = 3 \cdot 5,$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2,$$

$$150 = 15 \cdot 10 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2,$$

$$1100 = 11 \cdot 100 = 11 \cdot 10 \cdot 10 = 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11,$$

$$1200 = 12 \cdot 100 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Вы видите, читатель, что, в конечном счёте, **каждое из пяти составных** чисел записано в виде **произведения только простых множителей** (в данном случае это множители: 2, 3, 5 и 11). Причём, в окончательном варианте, я выстраиваю их **по возрастанию** (от меньшего к большему) и записываю в виде **степеней** (напомню: **степень** — это произведение **одинаковых** множителей. Например, $2^2 = 2 \cdot 2$, $3^2 = 3 \cdot 3$, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$).

Кратное

Очень простое по своей сути и **крайне важное** не только для дробей понятие (например, на больничных рецептах пишут: кратность приёма — 2 таблетки).

Очень простое... **и очень трудное для шестиклассника** именно из-за строгости определения в учебнике.

Так что же такое: кратное какого-либо числа, например 3 (трёх)?

Спросите себя: **какие числа делятся на 3** (нацело), начиная с наименьшего?

Само число 3 делится на 3.

Далее — 6 делится на 3.

Далее — 9 делится на 3.

Вот эти-то числа, **которые делятся на 3 нацело** и называются **кратными числа 3**.

Говорят:

3 кратно 3 (три кратно трём).

6 кратно 3 (шесть кратно трём).

9 кратно 3 (девять кратно трём).

А ещё есть числа, кратные трём? Ну, конечно же. Например, 90 делится на 3, значит 90 кратно 3; или 270 делится на 3, значит и 270 кратно 3.

А как мы можем получить **все числа, кратные трём**, начиная с наименьшего и не пропуская ни одного?.. Да просто берём и **умножаем число 3 на числа натурального ряда**, то есть на 1, 2, 3, ..., 30, ..., 90, ... и получаем в результате числа, кратные трём: 3, 6, 9, ..., 90, ..., 270, ...

Видите, читатель, очень просто. Но чтобы ребёнок это понял, надо, чтобы вы не просто рассказали ему всё вышеизложенное, но и нашли с ним кратные нескольких других чисел, например, 5, 10, 15.

Просто **спросите его**: «Назови кратные пяти (кратные числа 5)».

И **при заминке** — мгновенно **вопрос-подсказка**: «А что такое кратное пяти?.. Верно, число, **которое** делится **на 5**... 10 делится на 5?.. Да, значит, 10 кратно 5 (десять кратно пяти)... 20 делится на 5?.. Да, значит, 20 кратно 5... Ну, а самое маленькое (**наименьшее**) кратное пяти?.. Да само число 5!.. А как найти **все** кратные пяти?.. **Умножаем 5 на 1, 2, 3, ...**».

А теперь попросите ребёнка назвать кратные 10 и 15 (**подсказывая при заминках**). Он должен сказать или написать:

10, 20, 30, 40, ..., 60, ...

15, 30, 45, 60, ...

А вы, параллельно, **произносите вслух** — и через одно число — просите ребёнка **проговаривать**: 20 кратно 10, ..., 40 кратно 10, ...; 15 кратно 15, ..., **60 кратно 15 и 10**...

Определение.

Кратное данного числа — это число, **которое** делится на данное число.

НОК — наименьшее общее кратное

В этом пункте мы не просто познакомимся с понятием **наименьшего общего кратного** — **НОК**, но и, экспериментально, получим очень простое правило (алгоритм) нахождения НОК, пользуясь умением **раскладывать составные числа на простые множители**.

Таблица 7	
Кратные 4 (четырёх)	4, 8, 12 , 16, 20, 24 , 28, 32, 36 , ...
Кратные 6 (шести)	6, 12 , 18, 24 , 30, 36 , ...

Посмотрим на кратные двух чисел — 4 и 6 (таблица 7).

Видим, что среди кратных 4-х и 6-и имеются **общие кратные** для обоих чисел. Это числа 12, 24, 36 (выделены).

Мгновенно напомните ребёнку, что кратное — это число, **которое** делится на данные числа. Числа на 12, 24, 36 делятся на 4, это кратные 4-х; но они же делятся и на 6, значит, это кратные и 6-и. Вот это и есть **общие кратные 4-х и 6-и**, т.е. числа, которые **одновременно делятся и на 4, и на 6**.

Ясно, что общих кратных будет сколь угодно много. Но, главное, **среди общих кратных есть наименьшее общее кратное** — число 12. Записывается: НОК (4, 6) = 12.

Вот его-то нам и надо уметь находить для любых чисел, поскольку НОК знаменателей дробей — это и есть наименьший общий знаменатель (в нашем примере НОК (4, 6) — это наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$).

Замечание.

Я не упоминаю о НОД — наибольшем общем делителе, поскольку важнейшим для нас является понимание НОК и, как следствие, умение грамотно и быстро приводить дроби к наименьшему общему знаменателю. Алгоритм НОД — приложение-3 (Глава III).

Алгоритм нахождения НОК

Ставим задачу: найти наименьшее общее кратное чисел 100 и 120 или НОК (100, 120) = ?

Разложим эти числа **на простые множители** (так, как я об этом рассказывал в п. Разложение на простые множители), расположив их по возрастанию и в виде степеней.

$$100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2,$$

$$120 = 12 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Мы ищем наименьшее общее кратное чисел 100 и 120, т.е. **самое маленькое** число, **которое делится и на 100, и на 120**. Но **эти же числа**, в виде **разложения** на простые множители:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2, \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Наше кратное — это число, которое должно делиться **на каждый из простых множителей**, входящих в числа 100 и 120 (это и будет деление кратного на 100 и 120).

1. Посмотрите, если мы для НОК'а **не возьмём**, например, множитель 3, который «**сидит внутри**» числа 120, то наш будущий НОК **не поделится** на число 120 (в НОК'е не будет тройки, не будет множителя 3).

Вывод: мы для НОК'а должны взять **ВСЕ простые множители**, входящие в числа 100 и 120, т.е. 2, 3 и 5.

2. А с какими показателями, в каких степенях надо взять эти множители? Посмотрите, предположим, что 5 мы возьмём в первой степени (как в числе 120). Но тогда наш бу-

дущий НОК **не поделится** на 100, т.к. в числе 100 «**сидят**» две пятёрки ($5^2 = 5 \cdot 5$), а следовательно **на одну из пятёрок** наш НОК **не поделится** — ведь в нём-то будет «**сидеть**» только одна пятёрка, один множитель 5. Точно так же и двойку надо взять **в максимальной степени** с показателем 3, т.к. наш НОК должен делиться **не только на две двойки числа 100, но и на три двойки, которые «сидят внутри»** числа 120.

Вывод: мы для НОК'а должны взять каждый простой множитель в **МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ** (с МАХ'ым показателем).

Формулируем алгоритм нахождения НОК:

1. **Разложить** числа **на простые множители**.
2. Взять **ВСЕ** множители чисел.
3. **Каждый** множитель взять **в МАХ'ой степени** (с максимальным показателем).

Примеры.

$$\text{НОК}(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72.$$

$$24 = 8 \cdot 3 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3,$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2.$$

$$\text{НОК}(90, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5^2) = 3 \cdot 150 = 450.$$

$$90 = 9 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$150 = 15 \cdot 10 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

$$\text{НОК}(120, 180, 200) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3^2 \cdot (2^3 \cdot 5^2) = 9 \cdot 200 = 1800.$$

$$120 = 12 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$180 = 18 \cdot 10 = 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^2.$$

Замечание.

Обратите внимание, что во втором и третьем примерах в НОК'е, я сначала группирую множители так, чтобы в скобках **получилось произведение множителей самого большого числа** (150 и 200), а затем уже вычисляю НОК. В самом деле, глупо же превращать степени в числа, а потом считать, перемножая их (например, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 8 \cdot 9 \cdot 25 = 200 \cdot 9 = 1800$), если у нас имеется готовый результат (разложение самого большого числа на множители). **Это как технологический приём.**

Основное свойство дроби (сокращение, приведение к новому знаменателю)

Основное свойство дроби должно быть, что называется, «впечатано» в память и в понимание ребёнка, поскольку сокращение и приведение дробей к новому знаменателю, к общему знаменателю — одна из основных технических операций как в арифметике дробей, так и в алгебраической технике! Поэтому периодически в дальнейшем спрашивайте его: «Ну-ка, суть основного свойства дроби?» — И он должен чётко знать и понимать, что **сократить** — это разделить и числитель, и знаменатель на одно и то же число, а **привести дробь к новому знаменателю** — это умножить и числитель, и знаменатель на одно и то же число.

Основное свойство дроби мы получим экспериментально — из смысла дроби, а потом этот материальный эксперимент превратим в математическое правило.

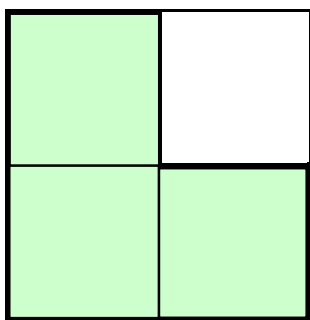


Рис. 14

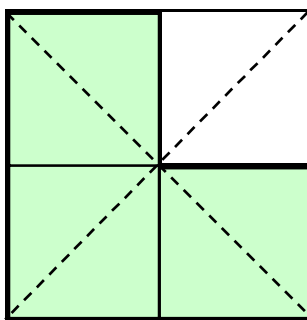


Рис. 15

Разделим квадрат (целое, единицу) на четыре равные части, — получим **четвёртые** доли. Возьмём три такие доли, — получим дробь $\frac{3}{4}$ (рис. 14).

Теперь **каждую четвёртую** долю (маленькие квадратики) **разделим пополам**, — получим **восьмые** доли (треугольники на рис. 15).

Видим, выделенная на рис. 14 часть квадрата — дробь $\frac{3}{4}$ — на рис. 15 превратилась в дробь $\frac{6}{8}$. Это **тот же самый** выделенный кусок квадрата (целого), но в более **мелких** — восьмых — долях. А значит, верно равенство: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Это равенство мы получили экспериментально, исходя из смысла дроби — деления единицы на **равные части**. Оно **очевидно и не вызывает сомнений**. Остаётся перевести материальный эксперимент на язык математики, в арифметическое правило.

Спросим себя: как из дроби $\frac{3}{4}$ арифметически получить дробь $\frac{6}{8}$? Да очень просто: нужно **умножить и** числитель, **и** знаменатель дроби $\frac{3}{4}$ **на 2** (каждую четвёртую долю мы делили на две части, вот и стало долей в два раза больше):

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}.$$

Если мы **умножаем** числитель и знаменатель дроби **на одно и то же** число, то это называется **приведением дроби к новому знаменателю**.

Спросим себя: как из дроби $\frac{6}{8}$ арифметически получить дробь $\frac{3}{4}$? Нужно просто **разделить и** числитель, **и** знаменатель дроби $\frac{6}{8}$ **на 2** (соединяя по две восьмые доли, из каждой пары получаем одну четвёртую, вот и стало долей в два раза меньше):

$$\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}.$$

Если мы **делим** числитель и знаменатель дроби **на одно и то же** число, то это называется **сокращением дроби**.

Вот так мы, экспериментально, и получили правило, которое носит название **основное свойство дроби** и звучит так:

Дробь не изменится, если и числитель, и знаменатель её умножить или разделить на одно и то же число.

В буквах записываем так:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \text{ — сокращение дроби,}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \text{ — приведение дроби к новому знаменателю.}$$

Повторю, что и сокращение дроби, и приведение к новому знаменателю для нас **очень важны** не только как понятия содержательного окружения знаниевого ядра, но и как постоянно используемый инструмент при работе как с арифметическими, так и с алгебраическими дробями.

Именно здесь требуется блестящее, безукоризненное владение таблицей умножения!

И, прежде всего, — «в виде деления», **в форме разложения на множители.**

Спросим себя: какие множители «сидят» в числе 6? — 2 и 3, поскольку $6 = 2 \cdot 3$. Какие множители «сидят внутри» числа 15? — 3 и 5, поскольку $15 = 3 \cdot 5$. Какие множители в числе 24? — 6 и 4; 3 и 8 (вообще-то ещё 2 и 24, но нас, прежде всего, как правило, интересуют множители таблицы умножения).

Если мы **видим** (едва ли не буквально!) «**внутри числа**» составляющие его множители, то нам очень легко грамотно сокращать и приводить к общему знаменателю. Вся беда в том, что для большинства школьников на смысловое непонимание **накладывается невладение таблицей умножения**. Всё время следите за её правильностью!

И, когда учите сокращать, **при заминках сразу спрашивайте**: «**Что, какие множители «сидят внутри» числа?!**»

Сокращение дроби

Примеры.

$$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{15}{35} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{3}{7},$$

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{2}{3}.$$

Средний столбец — это как раз разложение на множители числителя и знаменателя исходных дробей. **Сокращаем** — делим и числитель, и знаменатель **на общий множитель** (общий делитель: 2 в дроби $\frac{4}{6}$, 5 в дроби $\frac{15}{35}$, 12 в дроби $\frac{24}{36}$). Средний столбец дробей пишем ребёнку как пример, а реальное сокращение, разумеется, проводим сразу от исходной дроби к конечной.

Технологический совет.

Чтобы **сокращение стало технологичным** (т.е. не надо ни о чём гадать, изобретать, «думать»!), **нужно помогать** ребёнку примерно следующим образом (вопросы-подсказки):

«Что, какие множители «сидят внутри» четырёх?.. (для дроби $\frac{4}{6}$) — Двойки ($4 = 2 \cdot 2$). Есть в 6-ти двойки?.. 6 **произведение чего и чего?..**» — Этот вопрос должен быть **практически постоянным**. Как только заминка с пониманием термина «произведение» — **мгновенно** тот же вопрос в другой форме: «**Что на что надо умножить**, чтобы получить 6?.. — 2 на 3... Есть общий множитель в числителе и знаменателе?.. Да, двойка. — **Сокращаем на 2**».

Для дроби $\frac{15}{35}$: «**Произведение чего и чего 15?.. 3-х и 5-и. А в 35-и есть тройка или пятёрка?..** Есть, пятёрка (множитель 5). — **Сокращаем на 5**».

Для дроби $\frac{24}{36}$: «**Что «сидит» в 24-х, произведение чего и чего 36?..**» — Ребёнок может ответить по-разному, например, начать с $36 = 6 \cdot 6$.

Вы — мгновенно: «Есть шестёрки в 24-х?.. Есть $24 = 4 \cdot 6$... Значит, можем сократить на 6 ($\frac{24}{36} = \frac{4}{6}$). А ещё можем сократить?.. Да, на 2 ($\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$). На сколько всего сократили (**разделили**)?.. Сначала на 6, да ещё на 2 — всего на 12 (как в моём исходном примере). **Могли бы увидеть сразу сокращение по максимуму?..** Да, если знаем **базовые числа** (п. Базовые числа, тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II).

Чтобы **мягко подтолкнуть** ребёнка к знанию базовых чисел, откройте ему таблицу базовых чисел и **проведите пару сокращений сразу по максимуму**, что называется, «в одно действие», например: $\frac{45}{30} = \frac{3}{2}$, вместо $\frac{45}{30} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ (сократили **сразу на 15**, вместо двух сокращений: сначала на 5, потом на 3); $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$, вместо $\frac{32}{48} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (сократили **сразу на 16**, вместо двух сокращений: сначала на 8, потом на 2).

И при этом, мимоходом говоря что-то вроде: «Знаем базовые числа — мгновенно можем сократить «до конца» (**до несократимой дроби**). Не знаем — приходится сокращать два раза. **А чем больше ненужной писанины, тем больше вероятность ошибиться!**»

Приведение дроби к новому знаменателю

Пример.

$$\frac{2^2}{3} = \frac{4}{6}; \quad \frac{2^3}{3} = \frac{8}{9}; \quad \frac{2^4}{3} = \frac{16}{12}; \quad \frac{2^{30}}{3} = \frac{60}{90}; \quad \frac{2^{90}}{3} = \frac{180}{270},$$

или

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{60}{90} = \frac{180}{270}.$$

Видим, что дробь $\frac{2}{3}$ со знаменателем **3**, мы можем привести к любому знаменателю, **кратному трём** (вот и ещё раз нам **крайне** понадобился термин «кратное»!), то есть, в моём примере, к знаменателям 6, 9, 12, 90, 270, делящимся на 3 (исходный знаменатель).

Внимание.

Над дробями написаны числа: 2, 3, 4, 30, 90. Они называются **дополнительными множителями**. Это те самые числа, на которые, по основному свойству дроби, мы должны **умножить и числитель, и знаменатель**, чтобы привести дробь к новому знаменателю. Это также сокращённый вариант записи в виде явных произведений:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}, \dots, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 90}{3 \cdot 90} = \frac{180}{270}.$$

Технологический совет.

Когда будете учить ребёнка грамотному приведению дробей к новому знаменателю, то, — **обязательно проговаривая вслух!** — разбивайте процесс приведения на три этапа:

1. Сначала **написать** после знака «=» (после приводимой дроби) **дробную черту и новый знаменатель**:

$$\frac{3}{7} = \frac{\quad}{28}.$$

2. Лишь после того, как новый знаменатель **перед глазами** (записан на бумаге!), следует вслух **ваше требование**: «**Дополнительный множитель** (в смысле, требование к ребёнку, чтобы он написал дополнительный множитель над дробью. **Дополнительный множитель нужно писать всегда!**)»:

$$\frac{3}{7} = \frac{4}{28}.$$

Чтобы найти дополнительный множитель **4**, просим ребёнка **не разделять** 28 на 7, а **7 умножить** на... (вопрос-подсказка: «На что нужно умножить 7, чтобы получить 28?.. Ясно, что на 4. Это и есть нужный дополнительный множитель»).

3. А вот теперь (и на это вначале **нужно обращать внимание ребёнка!**), когда и старый числитель **3 перед глазами**, и сам дополнительный множитель **4 тоже перед глазами**, мы без всякого напряжения и, главное, правильно — пишем числитель новой дроби 12:

$$\frac{\overset{4}{\underset{7}{3}}}{7} = \frac{12}{28}.$$



Технологические приёмы и инструментарий

Перечислю инструменты и приёмы, которыми надо владеть в совершенстве, чтобы грамотно работать с дробями. Их совсем немного:

1. Признаки делимости на 2, 5, 10; 3, 9; 4, 25.
2. Деление «уголком».
3. Разложение на простые множители.
4. Технологические приёмы нахождения НОК знаменателей дробей (приведения дробей к наименьшему общему знаменателю):
 - 1) **Большой** знаменатель делится на **меньший**.
 - 2) Знаменатели — **взаимно простые**.
 - 3) **Следующее кратное** большего знаменателя.
 - 4) **Алгоритм** нахождения НОК (разложение на простые множители).

В этом разделе описан **весь необходимый**, очень небольшой и **крайне важный инструментарий**, используемый для грамотного сокращения, разложения на простые множители и, главное, приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

Признаки делимости на 2, 5, 10; 3, 9; 4, 25

Что такое признаки делимости? — Правила, которые позволяют с одного взгляда определить: делится ли число на числа, указанные в заголовке.

После всего ранее изложенного, ясно, что это умение определять делимость числа «с одного взгляда» нужно нам при **сокращении дробей** на общий множитель (делитель) и для **разложения числа на простые множители**.

Именно здесь ребёнок непосредственно убедится (с вашей помощью, разумеется) в том, что признаки делимости, во-первых, реально нужны ему, а во-вторых, что они, именно в силу нужности, очень легко запоминаются, поскольку постоянно используются.

Далее я даю таблицу 8: формулировки признаков делимости и примеры. **Технику вы наращиваете сами** в процессе работы.

Таблица 8		
Признаки делимости		Примеры
1.	На 2 делятся числа, которые <u>оканчиваются</u> чётной цифрой, т.е. цифрой 0, 2, 4, 6, 8.	10, 22, 34, 156, 1298
2.	На 5 делятся числа, которые <u>оканчиваются</u> цифрой 0 или 5.	40, 55, 120, 3865
3.	На 10 делятся числа, которые <u>оканчиваются</u> цифрой 0.	20, 180, 2900
4.	На 3 или 9 делятся числа, <u>сумма цифр</u> которых <u>делится</u> на 3 или 9.	24: $2 + 4 = 6$. 6 делится на 3, $\Rightarrow$ 24 делится на 3 111: $1 + 1 + 1 = 3$. 3 делится на 3, $\Rightarrow$ 111 делится на 3. 495: $4 + 9 + 5 = 18$. 18 делится на 9 (и на 3), $\Rightarrow$ 495 делится на 9 (и на 3).
5.	На 4 делятся числа, <u>две последние цифры</u> которых дают число, делящееся на 4.	124: 24 делится на 4, $\Rightarrow$ 124 делится на 4. 1536: 36 делится на 4, $\Rightarrow$ 1536 делится на 4.
6.	На 25 делятся числа, которые <u>оканчиваются</u> на 00, 25, 50, 75.	100, 225, 650, 2575.

Нам более всего необходимы первые четыре признака делимости на 2, 5, 10 и 3, 9, поскольку в ~ **99% случаев** применяются именно они.

Ребёнку вы поясняете, что «с первого взгляда» он, глядя на последнюю цифру числа, определяет: делится ли число на 2, 5 или 10.

Обязательно **обратите его внимание** на то, что числа 2 и 5 — уже готовые простые множители, а $10 = 2 \cdot 5$ — **раскладывается на простые множители** на следующем шаге по таблице умножения.

Тут же мгновенно **расширьте** для него **признак делимости на 10** до признака делимости на **100 и 1000** — числа должны кончаться **00** или **000** нулями: $1300 = 13 \cdot 100 = 13 \cdot 10 \cdot 10$, $23000 = 23 \cdot 1000 = 23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Если «**по последней цифре**» (2, 5, 0) деления нет, то, «**со второго взгляда**», проверяем делимость на 3 или 9 — **считаем сумму цифр числа** и смотрим: делится ли сумма цифр на 3 или 9.

Обратите внимание ребёнка на то, что число 3 — уже готовый простой множитель, а $9 = 3 \cdot 3$ — **раскладывается на простые множители** на следующем шаге по таблице умножения.

Скажите ему и то, что в 99% случаев будет достаточно этих четырёх признаков. Но если он хочет **повысить свою счётную квалификацию**, то имеет смысл познакомиться с признаками делимости на 4 и 25 (особенно, на 25, поскольку $25 = 5 \cdot 5$ — не только готовые простые множители, но и большое число, а значит, и быстрое деление).

Деление «уголком»

Поскольку в главе II мы с вами, читатель, научились письменному делению, то к этому инструменту дам лишь небольшое пояснение.

Посмотрите на числа: 411 и 252.

Первое из них делится на 3 (по признаку делимости на 3), второе делится на 9 (по признаку делимости на 9) и, само собой, на 3.

Не позволяйте ребёнку такие деления **проводить устно** — сразу отправляйте его «на поля», только письменно. Всё время напоминайте ему, что нам нужен **правильный результат** и с **минимальными усилиями**!

Разложение на простые множители

Поскольку в п. Разложение на простые множители, раздел «Содержательное окружение ядра» мы достаточно подробно познакомились с сутью разложения на простые множители (**представление числа в виде произведения только простых множителей**), то добавлю лишь несколько слов о технологии разложения:

1. **Первым разложением** раскладываем число на примерно равные множители, например:

$$64 = 8 \cdot 8, \text{ а не } 64 = 32 \cdot 2,$$

$$120 = 12 \cdot 10, \text{ а не } 120 = 60 \cdot 2.$$

Цель: как можно быстрее дойти до таблицы умножения, до простых множителей.

Исключение — числа с несколькими нулями на конце:

$$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10 \cdot 10, \text{ а не } 60 \cdot 5.$$

2. При последовательном «многошаговом» разложении, ни в коем случае ничего не переставляем, пока не доберёмся полностью до простых множителей. Только в конце собираем их по возрастанию и степеням, как сделано в моих примерах в п. Разложение на простые множители, раздел «Содержательное окружение ядра».
3. **Работают обе руки!**
 $1200 = 12 \cdot 100 = 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 \dots$

Когда начинаем раскладывать множители 12 и 100, то **палец левой руки** — сначала на множителе 12, а правая — пишет разложение: $4 \bullet 3$.

Затем, **палец левой руки передвигается на множитель 100**, а правая пишет разложение: $10 \bullet 10$.

Таким образом **передвигаем палец с одного множителя на другой** до конца разложения (ну и, разумеется, вслух).

Предупреждение!

Как правило, **очень трудно** добиться такой работы двух рук, **но крайне необходимо!** Иначе — ошибки.

Заставляйте ребёнка следовать принципу: «Работают обе руки»!

Технологические приёмы нахождения НОК знаменателей дробей (приведения дробей к наименьшему общему знаменателю)

Я всегда учу находить НОК знаменателей сразу на примере сложения дробей, приводя их к наименьшему общему знаменателю, поскольку в конкретной работе дети легко схватывают саму суть НОК и приведения.

Поэтому, сейчас просто перечислю четыре приёма нахождения НОК в той последовательности, в которой эти приёмы осваиваются в разделе «Сложение и вычитание дробей» с небольшими пояснениями:

1. **Большее число делится на меньшее.**

В этом случае **большее** число **и есть НОК** обоих чисел.

Пример.

НОК (10, 5) = 10, т.к. 10 делится на 5.

2. Числа — **взаимно простые**.

В этом случае **НОК** обоих чисел — их **произведение**.

Определение.

Числа называются **взаимно простыми**, если у них **нет общих** множителей (точнее, только один общий множитель — единица).

Пример.

НОК (4, 3) = $4 \bullet 3 = 12$, т.к. $4 = 2 \bullet 2$ и $3 = 3$ — **общих множителей нет**, а НОК должен делиться **и** на 4, **и** на 3, т.е. на **все** множители обоих чисел, **на 2, 2 и 3**.

НОК (14, 15) = $14 \bullet 15 = 210$, т.к. $14 = 2 \bullet 7$ и $15 = 3 \bullet 5$ — **общих множителей нет**, а НОК должен делиться **и** на 14, **и** на 15, т.е. на **все** множители обоих чисел, **на 2, 7, 3, 5**.

Замечание.

Нужно различать **простые** числа и **взаимно простые** числа.

Простое число — это **одно** число, число «само по себе», которое делится только на единицу и себя.

Взаимно простые числа — это **несколько** чисел, числа, «внутри» которых **нет общих** множителей. Каждое из взаимно простых чисел может быть и составным, как во втором примере. Числа 14 и 15 «сами по себе» — **составные**, но «внутри них» **нет общих** множителей, поэтому они, по определению, **взаимно простые**.

3. **Следующее кратное** большего числа.

Если числа **имеют общие** множители, то при их умножении мы **получим общее кратное** этих чисел (действительно, раз мы берём их произведение, то, очевидно, что оно будет

делиться на каждое из чисел), **но не наименьшее** (а значит, и общий знаменатель дробей не будет наименьшим).

В этом случае мы спрашиваем себя: **следующее кратное большего** числа? — то есть, умножаем число на 2, 3, 4, ... (находим кратные) и смотрим: делится ли результат (следующее кратное большего числа) на меньшее?

Если делится, то это и будет НОК данных чисел.

Пример.

НОК (4, 6) = 12.

Спрашиваем себя: числа 4 и 6 имеют общий множитель? Да, имеют, множитель 2 (т.к. $4 = 2 \cdot 2$ и $6 = 2 \cdot 3$). **Следующее кратное 6-и** (большого числа 6)?.. — Это число 12 ($6 \cdot 2 = 12$). 12 делится на 4 (на меньшее)? Да, делится. Значит, 12 и есть наименьшее общее кратное 4-х и 6-и.

Пример.

НОК (12, 15) = 60.

Поскольку числа 12 и 15 имеют общий множитель 3, (т.к. $12 = 4 \cdot 3$ и $15 = 3 \cdot 5$), то спрашиваем себя: **следующее кратное 15-и** (большого числа 15)?.. $15 \cdot 2 = 30$ — не делится на 12 (на меньшее); **следующее кратное 15-и**?.. $15 \cdot 3 = 45$ — не делится на 12; **следующее кратное 15-и**?.. $15 \cdot 4 = 60$ — делится на 12. Значит, число 60 — НОК (12, 15).

Замечание.

Только что описанные три приёма нахождения НОК составляют ~ **95% случаев устного** приведения дробей к наименьшему общему знаменателю, и в подавляющем числе случаев используется третий приём.

Но!!! — Все три приёма требуют отточенной вычислительной техники, и **прежде всего** — **великолепного владения таблицей умножения**. Все три приёма требуют умения **видеть** состав числа в виде множителей: что, какие множители «сидят внутри» числа?.. есть ли общие? Если **есть**, то ищем **следующее кратное большего**, а если **нет** — **взаимно простые**, перемножаем их (кстати, это единственный случай, когда приводим дроби к наименьшему общему знаменателю, перемножая знаменатели дробей!).

4. Алгоритм нахождения НОК (разложение на простые множители).

Реально, нужда в этом приёме возникает нечасто, но зато с его помощью мы можем найти **наименьший общий знаменатель** скольких угодно дробей и со сколь угодно большими знаменателями.

Поскольку алгоритм описан в п. Алгоритм нахождения НОК, раздел «Содержательное окружение ядра», то просто **ещё раз** обращаю ваше внимание, читатель, только **на технологию**.

- 1) На первом шаге раскладываем число **на примерно равные множители**. Если устно это сделать затруднительно (например, число 594), то, пользуемся **признаками делимости** (п. Признаки делимости), чтобы выяснить, на какое число можно поделить. При этом, «не хватаемся» за первый попавшийся признак (не делим число 594 на 2 только потому, что оно оканчивается чётной цифрой), а проверяем: нельзя ли поделить на что-нибудь побольше (в нашем случае число 594 делится на 9) с тем, чтобы **побыстрее добраться до двузначных чисел, до таблицы умножения**.
- 2) Последовательно раскладывая число до простых множителей, — **ничего не переставляем**. Только разложив на простые множители, — **собираем их в степени и выстраиваем по возрастанию**.

3) «Работают обе руки» — один из важнейших технологических приёмов (не математический, п. Разложение на простые множители)!

Закончили с одним множителем, — **передвигаем** палец левой руки на следующий множитель (вот, кстати, ещё одна причина, чтобы **в процессе разложения** мы не переставляли множители).

Наконец, разложили на простые множители, — кончиком ручки **пересчитываем множители**, собирая их в степени («считает ручка»). Чем больше множителей в разложении, тем легче ошибиться при их пересчёте, если работаем только «глазами», и тогда — грош цена всем нашим знаниям и умениям!



«Клетка» знаниевого ядра ЗЯМ₂

Сложение и вычитание дробей

Итак, самая **сложная и утомительная** часть создания знаниевого ядра — формирование элементов ЗЯМ₂ — закончена (разумеется, если вы реализовали всё вышеописанное практически, за исключением технологических приёмов НОК, которые будут освоены в этом разделе).

Теперь мы приступаем к **формированию «клетки ядра»** (приложение 3). Это **ответственный** (и очень быстро реализуемый, если мы позаботились о формировании элементов ЗЯМ₂ и **счётной технике** ребёнка) этап, поскольку сокращения и приведение к новому знаменателю, понятия простых чисел и кратных **сами по себе нас теперь не интересуют**. Это всего лишь необходимые элементы знаниевого ядра, на основе которых возникает **качественно новое знаниевое образование** — «клетка ядра».

В основном, всё происходит в рамках сложения дробей (вычитание — это то же самое сложение, и мы просто закрепляем сложение и немного расширяем технические возможности). Нам важен, прежде всего, **результат** сложения — верный, грамотно и быстро полученный результат, а приведение к общему знаменателю и сокращения должны идти **автоматически**, сами собой, так, как пальцы музыканта скользят по грифу гитары, «не задумываясь» какую струну и на каком ладу прижать.

В то же время, **параллельно** осваиваются все четыре приёма приведения к наименьшему общему знаменателю и, **в свою очередь**, осваивая эти четыре приёма, мы овладеваем грамотным и быстрым сложением дробей и, тем самым, формируем «клетку» знаниевого ядра.

Сложение дробей

Мы **можем складывать** (или вычитать) только величины **одного наименования**, одной «размерности»:

$$2 \text{ яблока} + 1 \text{ яблоко} = 3 \text{ яблока},$$

$$2 \text{ трактора} + 1 \text{ трактор} = 3 \text{ трактора},$$

$$2 \text{ м / с} + 1 \text{ м / с} = 3 \text{ м / с}.$$

Складывать величины **разных наименований** мы **не можем**, поскольку это будет **физически, материально** совершенно бессмысленное сложение:

$$2 \text{ яблока} + 1 \text{ трактор} - \text{что это?!}$$

$$2 \text{ м / с} + 1 \text{ кг} - \text{что это?!}$$

Точно так же и с дробями — мы можем складывать только дроби с одним знаменателем, **одинаковые доли**, одного наименования, одной «размерности»:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Пятые доли с пятыми мы можем сложить.

А вот пятые и третьи доли сложить не можем — это всё равно, что пытаться складывать два яблока с трактором — бессмысленное сложение, поскольку величины разной «размерности»:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \text{что это?!}$$

А, тем не менее, нам нужно уметь складывать разные доли, то есть дроби с разными знаменателями.

Раз мы можем складывать дроби с одинаковыми знаменателями, то спросим себя: **нельзя ли дроби с разными знаменателями сделать дробями с одинаковыми знаменателями?**

Ну, конечно же, можно.

Для этого у нас есть **основное свойство дроби**, — **приведение к новому знаменателю**, кратному исходному, старому знаменателю (п. Основное свойство дроби, раздел «Содержательное окружение ядра»).

Мы **говорим: нужно привести дроби к наименьшему общему знаменателю** (НОЗ). А наименьший общий знаменатель — это **наименьшее общее кратное знаменателей** дробей (п. НОК — наименьшее общее кратное, раздел «Содержательное окружение ядра»). То есть, нам нужно найти **самое маленькое число, которое делится на знаменатели** данных дробей — НОК знаменателей (вот почему без понятий кратного и наименьшего общего кратного просто немыслима грамотная работа с дробями!).

В п. Технологические приёмы нахождения НОК знаменателей дробей, раздел «Технологические приёмы и инструментарий» описаны четыре приёма нахождения НОК двух (или нескольких) чисел.

Сейчас я их ещё раз перечислю (только будем под числами понимать знаменатели приводимых дробей):

1. Большой знаменатель делится на меньший.

В этом случае **большой знаменатель** и есть НОЗ (наименьший общий знаменатель) дробей.

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10} \right) = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}.$$

$$(\text{НОК}(10; 5) = 10 \text{ и } \frac{2}{5} = \frac{4}{10})$$

2. Знаменатели дробей — взаимно простые (нет общих множителей)

В этом случае НОЗ дробей — **произведение их знаменателей**.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{12} + \frac{8}{12} \right) = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$(\text{НОК}(4; 3) = 12 \text{ и } \frac{1}{4} = \frac{3}{12}; \frac{2}{3} = \frac{8}{12})$$

3. Следующее кратное большего знаменателя.

Если в знаменателях дробей **есть общие множители**, то, **умножая** **большой знаменатель** на 2, 3, 4, ... — находим его **кратные** и проверяем: **делится ли** кратное на **меньший знаменатель**. Если делится, **то это и есть** НОЗ дробей.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \left(\frac{2}{18} + \frac{3}{18} \right) = \frac{2+3}{18} = \frac{5}{18}.$$

$$(\text{НОК}(9; 6) = 18 \text{ и } \frac{1}{9} = \frac{2}{18}; \frac{1}{6} = \frac{3}{18})$$

4. НОЗ находится разложением на простые множители **по алгоритму НОК** (п. Алгоритм нахождения НОК, раздел «Содержательное окружение ядра»).

Первые три приёма **приведения дробей к** наименьшему общему знаменателю (НОЗ) **реализуются устно и охватывают ~ 95% всех случаев**. Поэтому я подробно опишу формиро-

вание этих трёх приёмов у ребёнка. Для этого я воспользуюсь подборкой упражнений № 713–715 и № 716–717 из учебника Математика-4 И.В. Барановой и З.Г. Борчуговой [9, с. 185] с небольшими добавлениями и изменениями.

Больший знаменатель делится на меньший

Примеры.

- 1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$; 2) $\frac{5}{12} + \frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$; 5) $\frac{2}{3} + \frac{7}{12}$; 6) $\frac{5}{8} + \frac{11}{24}$; 7) $\frac{7}{18} + \frac{7}{9}$; 8) $\frac{4}{77} + \frac{10}{11}$;
 9) $\frac{13}{100} + \frac{81}{10\,000}$; 10) $\frac{13}{70} + \frac{3}{14}$; 11) $\frac{1}{48} + \frac{5}{12}$; 12) $\frac{7}{60} + \frac{2}{15}$; 13) $\frac{5}{48} + \frac{5}{16}$; 14) $\frac{1}{4} + \frac{37}{100}$; 15) $\frac{4}{75} + \frac{2}{25}$.

Сперва **скажите** ребёнку, что в ~ 95% случаев он будет находить наименьший общий знаменатель дробей **устно**. Для этого существуют три приёма, которые позволяют «с одного взгляда» найти наименьший общий знаменатель, правда, требуется уметь хорошо считать и, особенно, блестяще владеть таблицей умножения.

Проговорите вслух первый приём: **больший знаменатель делится на меньший**.

Скажите ребёнку, что «с первого взгляда» он должен **видеть**: делится ли больший знаменатель на меньший. Если делится, то это и есть НОЗ — наименьший общий знаменатель дробей. Сначала выпишите ему подробно пример (как у меня выше) сложения дробей $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$. По мере его написания, **проговаривайте**: «Общий знаменатель — 10, дополнитель-

ный множитель (к дроби $\frac{2}{5}$) — 2. Приведём дробь $\frac{2}{5}$ к знаменателю 10 и сложим с дробью

$\frac{3}{10}$: $\left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10}\right)$. Поскольку теперь дроби с **одинаковым** знаменателем 10, нам остаётся сло-

жить их числители 3 и 4. Запишем это на одной дробной черте $\frac{3+4}{10}$. Получаем $\frac{7}{10}$.

Замечание.

Промежуточное сложение я написал **в скобках** только затем, чтобы наглядно показать, что, приведя одну из дробей к новому знаменателю, действительно складываем дроби с одинаковым знаменателем. Вначале стоит пару примеров записывать именно так, а затем — сразу на одной дробной черте.

Внимание!

Получив ответ, **обязательно спрашивайте**: «Дробь **сократимая** или нет?.. **Можно ли её сократить** на что-то?.. (Кстати, сократить — это разделить или умножить?) Какие множители «сидят» в числе 10?.. — **2 и 5**. **Есть общие множители** в числителе **7** и знаменателе **10**?.. Нет. Значит, дробь несократимая».

Далее можно поступать по-разному.

Если ребёнок уже не шестиклассник, то есть худо-бедно знаком с дробями, нужно, во-первых, отработать его видение большего знаменателя, а во-вторых, вычисление дополнительного множителя. В этом случае **вы ручкой** «проходитесь» по всей группе примеров, **спрашивая**: «**Видим**, что **большой** (подразумевается знаменатель) **делится на меньший**?.. **Дополнительный** (подразумевается дополнительный множитель к нужной дроби)? — Или, **показывая ручкой** на следующий пример: — Общий знаменатель (подразумевается **наименьший**)?.. — и, передвигая ручку к нужной дроби, — **Дополнительный**?..»

Несколько примеров ребёнок должен прорешать до конца не только ради практики приведения к НОЗ, но и, **главное**, ради практики **грамотного счёта** при сложении и доведения ответа до несократимой дроби.

Если ребёнок только знакомится с дробями — **прорешивать письменно** нужно всю группу примеров (разумеется, под вашим руководством!).

Внимание.

Примеры 11) – 15) основаны на знании базовых чисел (п. Базовые числа, тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II). **Обратите на это внимание ребёнка**, а если он не знаком с базовыми числами, то выпишите их в его тетрадь для того, чтобы он их выучил. Дроби со знаменателями из базовых чисел встречаются довольно часто и если мы **видим** базовые числа как множители, то наша счётная квалификация с дробями значительно возрастает.

Пример 10) **требует от вас подсказки ребёнку**, что-то вроде: «Посмотри, у 70-ти ноль на конце. Правда ведь, **хотелось бы**, чтобы 70 поделилось на 14?.. А попробуй по последней цифре 4 числа 14 умножением «выйти» на 70. На что нужно умножить 4, чтобы получить 0 на конце?.. Верно, на 5 ($14 \bullet 5 = 70$). Вот где пригодилось умение делить «по последней цифре» (п. Деление двузначного числа на двузначное «по последней цифре», тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II)».

Далее, читатель, я привожу полные решения примеров для вас, чтобы вы могли грамотно учить своего ребёнка. Напоминаю, пару примеров всегда стоит написать не сразу на единой дробной черте, а в виде отдельных дробей, приведённых к общему знаменателю. **Обратите внимание** на то, что примеры 5) – 7) и 10) – 15) должны быть доведены до **несократимой дроби**.

Решения примеров.

$$\begin{aligned}
 &1) \quad \frac{\overset{4}{\underset{2}{1}}}{2} + \frac{3}{8} = \left(\frac{4}{8} + \frac{3}{8} \right) = \frac{4+3}{8} = \frac{7}{8}; \quad 2) \quad \frac{5}{12} + \frac{\overset{2}{\underset{6}{1}}}{6} = \frac{5+2}{12} = \frac{7}{12}; \quad 3) \quad \frac{1}{4} + \frac{\overset{2}{\underset{2}{1}}}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}; \\
 &4) \quad \frac{3}{10} + \frac{\overset{2}{\underset{5}{2}}}{5} = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}; \quad 5) \quad \frac{\overset{4}{\underset{3}{2}}}{3} + \frac{7}{12} = \frac{8+7}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}; \quad 6) \quad \frac{\overset{3}{\underset{8}{5}}}{8} + \frac{11}{24} = \frac{15+11}{24} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}; \\
 &7) \quad \frac{7}{18} + \frac{\overset{2}{\underset{9}{7}}}{9} = \frac{7+14}{18} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}; \quad 8) \quad \frac{4}{77} + \frac{\overset{7}{\underset{11}{10}}}{11} = \frac{4+70}{77} = \frac{74}{77}; \\
 &9) \quad \frac{\overset{100}{\underset{100}{13}}}{100} + \frac{81}{10000} = \frac{1300+81}{10000} = \frac{1381}{10000}; \quad 10) \quad \frac{13}{70} + \frac{\overset{5}{\underset{14}{3}}}{14} = \frac{13+15}{70} = \frac{28}{70} = \frac{2}{5}; \\
 &11) \quad \frac{1}{48} + \frac{\overset{4}{\underset{12}{5}}}{12} = \frac{1+20}{48} = \frac{21}{48} = \frac{7}{16}; \quad 12) \quad \frac{7}{60} + \frac{\overset{4}{\underset{15}{2}}}{15} = \frac{7+8}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}; \quad 13) \quad \frac{5}{48} + \frac{\overset{3}{\underset{16}{5}}}{16} = \frac{5+15}{48} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}; \\
 &14) \quad \frac{\overset{25}{\underset{4}{1}}}{4} + \frac{37}{100} = \frac{25+37}{100} = \frac{62}{100} = \frac{31}{50}; \quad 15) \quad \frac{4}{75} + \frac{\overset{3}{\underset{25}{2}}}{25} = \frac{4+6}{75} = \frac{10}{75} = \frac{2}{15}.
 \end{aligned}$$

Важное замечание!

В школе, когда учат сокращать, то зачёркивают сокращаемое число, например, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ и либо сразу пишут ответ, либо над зачёркнутым числом пишут множители, остающиеся после

сокращения $\frac{\overset{1}{\underset{8}{4}}}{2} = \frac{1}{2}$. Видимо, для того, чтобы, знакомя с сокращением, наглядно, графически

отделить в сознании ребёнка **сокращение дроби от приведения к новому знаменателю**, когда дополнительный множитель пишут над дробью, отделяя от числителя скобкой. На первых порах это разумно, особенно, если учесть, что при сокращении алгебраических дро-

бей мы обязательно зачёркиваем сокращаемые числитель и знаменатель и выписываем оставшиеся после сокращения множители. Однако, с **числовыми дробями**, как показывает опыт, стоит не зачёркивать числитель и знаменатель, а писать **над числителем** множитель (делитель), **на который** мы сокращаем, отделяя скобкой точно так же, как пишем дополнительный множитель. Дело в том, что при зачёркивании, ребёнок довольно часто ошибается и

пишет вместо результата сокращения число, на которое сокращал, например, $\frac{4}{8} = \frac{1}{4}$, то есть 4

вместо 2. Это происходит потому, что множитель, на который сокращаем (в данном случае 4), **не виден**, не написан на бумаге, а «сидит в уме». Стоит не только старших, но и младших приучать к записи сокращения такой же, как при приведении к новому знаменателю, напри-

мер, $\frac{\overset{4}{20}}{24} = \frac{5}{6}$. Теперь **множитель 4**, на который мы должны сократить, **перед глазами**, и

мы **безошибочно «считаем ручкой»** (такая запись сокращения относится к отдельным дробям, при умножении дробей — зачёркиваем сокращаемые множители обычным образом).

Конечно, с младшими придётся повозиться некоторое время, **напоминая им**, что хоть и пишем множитель сокращения как дополнительный множитель, но на самом деле делим, а не умножаем. Но эта совсем нетрудная работа с лихвой окупается безошибочным счётом, когда **множитель сокращения перед глазами**. Надо только **всегда требовать писать** множитель сокращения!

Знаменатели взаимно простые

Примеры.

- 1) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$; 4) $\frac{2}{7} + \frac{2}{5}$; 5) $\frac{3}{11} + \frac{2}{13}$;
 6) $\frac{3}{5} + \frac{3}{4}$; 7) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; 8) $\frac{5}{9} + \frac{3}{5}$; 9) $\frac{1}{6} + \frac{3}{5}$; 10) $\frac{4}{11} + \frac{9}{10}$;
 11) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9}$; 12) $\frac{1}{8} + \frac{1}{9}$; 13) $\frac{1}{25} + \frac{1}{4}$; 14) $\frac{3}{14} + \frac{4}{15}$; 15) $\frac{3}{10} + \frac{1}{21}$.

Проговорите вслух второй приём устного приведения дробей к НОЗ: **знаменатели — взаимно простые**.

Скажите ребёнку, что если «с первого взгляда» он **видит**, что больший знаменатель **не делится** на меньший, то «со второго взгляда» он должен проверить: не являются ли знаменатели **взаимно простыми** числами.

Для этого — при отличном знании таблицы умножения! — нужно **видеть**: какие множители «**сидят внутри**» числа. Если **общих множителей в знаменателях нет**, то НОЗ — **произведение** знаменателей.

Внимание!

Разумеется, произнеся термин «взаимно простые», **вы тут же спрашиваете** (если ребёнок уже знаком с этим термином): «А что такое взаимно простые числа?»

Но, в любом случае, обязательно напомним (или объясним) ему, что **взаимно простые числа — это те, у которых нет общих множителей** (п. Технологические приёмы нахождения НОК знаменателей дробей, раздел «Технологические приёмы и инструментарий» — определение взаимно простых чисел и замечание к нему).

Поскольку НОЗ — наименьший общий знаменатель — это самое маленькое число, которое должно делиться на знаменатели обеих дробей, то он должен делиться **на каждый множитель** обоих знаменателей. А так как **общих множителей у взаимно простых чисел нет**, то НОЗ должен делиться на произведение всех этих множителей и является произведением всех множителей знаменателей, а значит, и произведением знаменателей дробей.

Вы видите, читатель, что группа примеров разбита на три подгруппы.

1) – 5): знаменатели — **простые** числа.

Тут же **напомните** ребёнку (спрашивая его, и мгновенно **подсказывая** определение при заминках), что простые числа — это те, которые делятся только на себя и единицу. Раз у знаменателей дробей **нет общих множителей**, то они **ещё и взаимно простые** (2 и 5; ... ; 2 и 7; ... ; 11 и 13).

6) – 10): один знаменатель — **простое** число, а другой — **составное**.

Следует сосредоточивать внимание ребёнка **на множителях составного** числа.

Проговариваете для него: «Какие множители «сидят» в числе 4? — Двойки ($4 = 2 \bullet 2$). А знаменатель первой дроби — 5 ($\frac{3}{5} + \frac{3}{4}$). Есть **общие множители** в знаменателях дробей?..

Нет. Значит, знаменатели — **взаимно простые** и НОЗ — **произведение** знаменателей.

Точно так же: «Какие множители в 9-ти? — Тройки ($9 = 3 \bullet 3$); в 6-ти? — Два и три ($6 = 2 \bullet 3$); в 10-ти? — Два и пять ($10 = 2 \bullet 5$).

Всё время проговариваете, отрабатывая лексику, что раз **нет общих** множителей, то знаменатели — **взаимно простые**.

Совет.

Вначале ребёнку трудно **видеть множители «внутри»** числа. При заминках — тотчас же помогайте ему, рисуя числа и множители этих чисел, например:

$\frac{3}{3}$ и $\frac{4}{2 \cdot 2}$ «внутри» 4-ёх «сидят» двойки, в 3-ёх — только тройка. **Общих множителей нет.**

$\frac{6}{2 \cdot 3}$ и $\frac{5}{5}$ «внутри» 6-ти «сидят» двойка и тройка, а в 5-ти — только пятёрка. **Общих множителей нет.**

11) – 15): оба знаменателя — **составные** числа.

Показывая ручкой на знаменатели 4 и 9 ($\frac{3}{4} + \frac{5}{9}$), спрашиваете: «**Видим**, что знаменатели взаимно простые?.. Какие множители «сидят» в 4-ёх и 9-ти?.. — Двойки и тройки. **Есть общие** множители?.. Нет. Значит, знаменатель (подразумевается, НОЗ — наименьший общий знаменатель)?.. Верно, тридцать шесть ($36 = 4 \bullet 9$). — Или (для дробей $\frac{3}{14} + \frac{4}{15}$) — **14** — произведение чего и чего?.. — 2-ух и 7-ми ($14 = 2 \bullet 7$). **Есть в 15-ти** двойка или семёрка?.. Нет ($15 = 3 \bullet 5$). Значит, 14 и 15 — взаимно простые и НОЗ: $14 \bullet 15 = 210$ (**обязательно** считать «на полях» **письменно**, а не устно!).

Точно так же, как в предыдущей подгруппе, поясняйте наглядно состав чисел, рисуя их множители:

$\frac{4}{2 \cdot 2}$ и $\frac{9}{3 \cdot 3}$ или $\frac{14}{2 \cdot 7}$ и $\frac{15}{3 \cdot 5}$.

Видим, что **общих множителей** в каждой паре знаменателей **нет**.

Решения примеров.

Оба знаменателя — простые числа.

$$1) \frac{\overset{5}{\underset{2}{1}}}{2} + \frac{\overset{2}{\underset{5}{2}}}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}; \quad 2) \frac{\overset{3}{\underset{2}{1}}}{2} + \frac{\overset{2}{\underset{3}{1}}}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}; \quad 3) \frac{\overset{7}{\underset{2}{1}}}{2} + \frac{\overset{2}{\underset{7}{3}}}{7} = \frac{7+6}{14} = \frac{13}{14};$$

$$4) \frac{\overset{5}{\underset{7}{2}}}{7} + \frac{\overset{7}{\underset{5}{2}}}{5} = \frac{10+14}{35} = \frac{24}{35}; \quad 5) \frac{\overset{13}{\underset{11}{3}}}{11} + \frac{\overset{11}{\underset{13}{2}}}{13} = \frac{39+22}{143} = \frac{61}{143}.$$

Один знаменатель — простое число, другой — составное число.

$$6) \frac{\overset{4}{\underset{5}{3}}}{5} + \frac{\overset{5}{\underset{4}{3}}}{4} = \frac{12+15}{20} = \frac{27}{20}; \quad 7) \frac{\overset{4}{\underset{3}{2}}}{3} + \frac{\overset{3}{\underset{4}{1}}}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}; \quad 8) \frac{\overset{5}{\underset{9}{5}}}{9} + \frac{\overset{9}{\underset{5}{3}}}{5} = \frac{25+27}{45} = \frac{52}{45};$$

$$9) \frac{\overset{5}{\underset{6}{1}}}{6} + \frac{\overset{6}{\underset{5}{3}}}{5} = \frac{5+18}{30} = \frac{23}{30}; \quad 10) \frac{\overset{10}{\underset{11}{4}}}{11} + \frac{\overset{11}{\underset{10}{9}}}{10} = \frac{40+99}{110} = \frac{139}{110}.$$

Оба знаменателя — составные числа.

$$11) \frac{\overset{9}{\underset{4}{3}}}{4} + \frac{\overset{4}{\underset{9}{5}}}{9} = \frac{27+20}{36} = \frac{47}{36}; \quad 12) \frac{\overset{9}{\underset{8}{1}}}{8} + \frac{\overset{8}{\underset{9}{1}}}{9} = \frac{9+8}{72} = \frac{17}{72}; \quad 13) \frac{\overset{4}{\underset{25}{1}}}{25} + \frac{\overset{25}{\underset{4}{1}}}{4} = \frac{4+25}{100} = \frac{29}{100};$$

$$14) \frac{\overset{15}{\underset{14}{3}}}{14} + \frac{\overset{14}{\underset{15}{4}}}{15} = \frac{45+56}{210} = \frac{101}{210}; \quad 15) \frac{\overset{21}{\underset{10}{3}}}{10} + \frac{\overset{10}{\underset{21}{1}}}{21} = \frac{63+10}{210} = \frac{73}{210}.$$

Следующее кратное большего знаменателя

Примеры.

$$1) \frac{1}{4} + \frac{1}{6}; \quad 2) \frac{1}{6} + \frac{1}{8}; \quad 3) \frac{3}{10} + \frac{2}{15}; \quad 4) \frac{3}{20} + \frac{11}{30}; \quad 5) \frac{3}{50} + \frac{7}{20};$$

$$6) \frac{7}{40} + \frac{7}{60}; \quad 7) \frac{11}{30} + \frac{1}{45}; \quad 8) \frac{7}{12} + \frac{1}{15}; \quad 9) \frac{1}{12} + \frac{9}{16}; \quad 10) \frac{1}{15} + \frac{2}{25}.$$

Этот приём устного приведения к НОЗ используется наиболее часто.

Спросите ребёнка: «Есть общий множитель в 4-ёх и 6-ти ($\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$)?.. Есть, двойка ($4 = 2 \cdot 2, 6 = 2 \cdot 3$). А раз так, то не перемножаем знаменатели, а ищем следующее кратное большего знаменателя. Итак, **следующее кратное** 6-ти (большого знаменателя)?.. Шесть на два (подразумевается, умножить) — двенадцать. **Делится** 12 на 4 (на меньший знаменатель)?.. Да. Значит, 12 и есть НОЗ дробей. — Далее, вопрос о дополнительных множителях. — **Дополнительные** множители (**показывая ручкой** на соответствующую дробь) к $\frac{1}{4}$? — 3.

И к $\frac{1}{6}$? — 2».

Вопросы к $\frac{3}{10} + \frac{2}{15}$: «Есть общий множитель в знаменателях (в 10-ти и 15-ти)? — Да, 5 ($10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5$). **Следующее кратное** 15-ти? .. Тридцать ($15 \cdot 2 = 30$). **Делится** 30 на 10? — Да. Значит, 30 и есть НОЗ дробей».

И так — для всех десяти примеров **вы постоянно**, с небольшими вариациями, **повторяете**: есть общий множитель?.. следующее кратное большего (знаменателя)?.. делится (кратное) на меньший (знаменатель)?.. дополнительный (множитель)?..

И всё время показываете кончиком ручки на нужное число!

Напоминаю!

Последовательность записи при сложении дробей: **дробная черта, знаменатель (НОЗ), дополнительные множители и лишь потом — счёт в числителе** (п. Технологический совет, приведение дроби к новому знаменателю, раздел «Содержательное окружение ядра»).

Внимание.

В примерах 6) – 8) я, проводя сокращения, **выписываю над дробями множитель, на который сокращаю** (см. выше п. Важное замечание).

Если ребёнок уже не шестиклассник, то он быстро схватывает **разницу** в одной и той же записи над дробью **между дополнительным множителем как умножением и множителем сокращения как делением** из контекста записи (ну и с вашей помощью, само собой).

При начальной работе с сокращениями, лучше зачёркивать сокращаемые числитель и знаменатель и выписывать над ними остающиеся после деления множители, как в школе. Но немного погодя — всё равно переходите на мою форму записи: **множитель сокращения должен быть перед глазами!**

Решения примеров.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{4} + \frac{\overset{2}{\cancel{1}}}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}; & 6) \quad \frac{\overset{3}{\cancel{7}}}{40} + \frac{\overset{2}{\cancel{7}}}{60} = \frac{21+14}{120} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}; \\
 2) \quad \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{6} + \frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{8} = \frac{4+3}{24} = \frac{7}{24}; & 7) \quad \frac{\overset{3}{\cancel{11}}}{30} + \frac{\overset{2}{\cancel{1}}}{45} = \frac{33+2}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}; \\
 3) \quad \frac{\overset{3}{\cancel{3}}}{10} + \frac{\overset{2}{\cancel{2}}}{15} = \frac{9+4}{30} = \frac{13}{30}; & 8) \quad \frac{\overset{5}{\cancel{7}}}{12} + \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{15} = \frac{35+4}{60} = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}; \\
 4) \quad \frac{\overset{3}{\cancel{3}}}{20} + \frac{\overset{2}{\cancel{11}}}{30} = \frac{9+22}{60} = \frac{31}{60}; & 9) \quad \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{12} + \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{16} = \frac{4+27}{48} = \frac{31}{48}; \\
 5) \quad \frac{\overset{2}{\cancel{3}}}{50} + \frac{\overset{5}{\cancel{7}}}{20} = \frac{6+35}{100} = \frac{41}{100}. & 10) \quad \frac{\overset{5}{\cancel{1}}}{15} + \frac{\overset{3}{\cancel{2}}}{25} = \frac{5+6}{75} = \frac{11}{75}.
 \end{array}$$

Важное замечание!

Конечно, мы всегда можем привести дроби **к общему** знаменателю, просто перемножив знаменатели дробей, но этот знаменатель **не будет наименьшим, если** в знаменателях дробей **имеются общие множители**.

А это — крайне существенно!

Мало того, что знаменатель не будет наименьшим, так ещё и «сидящий» в знаменателях дробей **общий множитель, «затесавшись» в дополнительные множители, существенно увеличивает числители** приводимых дробей и, после их сложения, **потребуется сокращение** получившейся дроби **на этот общий множитель!**

Посмотрите на примеры 1), 4) и 7), в которых теперь я складываю дроби, беря в качестве общего знаменателя произведение знаменателей исходных дробей.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \frac{\overset{6}{\cancel{1}}}{4} + \frac{\overset{4}{\cancel{1}}}{6} = \frac{6+4}{24} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{24} = \frac{5}{12}; & \\
 4) \quad \frac{\overset{30}{\cancel{3}}}{20} + \frac{\overset{20}{\cancel{11}}}{30} = \frac{90+220}{600} = \frac{\overset{10}{\cancel{310}}}{600} = \frac{31}{60}; &
 \end{array}$$

$$7) \frac{\overset{45}{\underset{30}{11}}}{30} + \frac{\overset{30}{\underset{45}{1}}}{45} = \frac{495 + 30}{1350} = \frac{525}{1350} = \frac{\overset{25}{\underset{54}{21}}}{54} = \frac{\overset{3}{\underset{18}{7}}}{18}.$$

В примере 1) вроде бы ничего особо страшного не происходит: подумаешь, общий знаменатель всего **в 2 раза** больше НОЗ; да и сократить $\frac{10}{24}$ на 2 тоже совсем не трудно.

В примере 4) — хуже: знаменатель уже **в 10 раз** больше наименьшего, хотя и здесь сокращение дроби $\frac{310}{600}$ проходит без труда.

Но вот пример 7) превращается в настоящий **вычислительный кошмар при сокращении** (и не только для шестиклассника, осваивающего работу с дробями): ведь общий знаменатель **в 75 раз больше** наименьшего! И, соответственно, **резко усложняется** работа с числителями: вместо лёгких **устных** умножений и сложений, **приходится считать вручную**, письменно (**калькулятор, разумеется, должен быть исключён при обучении счёту!**), да ещё и **дважды сокращать в конце** (вряд ли ребёнок — да и вы тоже! — догадается, что можно сразу сократить на 75 — да это и не нужно).

А ведь чем больше ненужной глупой писанины, тем легче ошибиться!

Обязательно покажите ребёнку эти три примера **глупого** приведения к общему знаменателю, чтобы он наглядно убедился: да, непременно нужно уметь находить именно наименьший общий знаменатель — **тогда работать будет и легче, и приятнее, и, главное, безопаснее!**

Алгоритм нахождения НОК (разложение на простые множители)

Если **устно** привести дроби к наименьшему общему знаменателю **не удаётся** или мы **видим**, что это потребует **значительных**, а значит, **и неоправданных усилий**, то, **не раздумывая**, раскладываем дроби на простые множители и **пользуемся алгоритмом нахождения НОК знаменателей**.

Напомню алгоритм (п. Алгоритм нахождения НОК дробей, раздел «Содержательное окружение ядра»):

1. **Разложить** числа на **простые** множители.
2. Взять **ВСЕ** множители чисел.
3. **Каждый** множитель взять в **МАХ'ой степени** (с максимальным показателем).

Также напомню технологию разложения (п. Алгоритм нахождения НОК, технологические приёмы нахождения НОК знаменателей, раздел «Технологические приёмы и инструментарий»):

1. Раскладываем числа на **примерно равные** множители.
2. В процессе разложения — **ничего не переставляем**. Разложив число на простые множители, **собираем их в степени и выстраиваем по возрастанию**.
3. **«Работают обе руки!»**

Пример 1.

$$\frac{\overset{6}{\underset{75}{4}}}{75} + \frac{\overset{25}{\underset{18}{5}}}{18} = \frac{24 + 125}{450} = \frac{149}{450}.$$

$$75 = 3 \cdot 25 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2,$$

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.$$

$$\text{НОК}(75, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 5^2) = 6 \cdot 75 = 450.$$

Пример 2.

$$\frac{\overset{3}{\underset{48}{7}}}{48} + \frac{\overset{4}{\underset{36}{5}}}{36} + \frac{\overset{6}{\underset{24}{1}}}{24} = \frac{21 + 20 + 6}{144} = \frac{47}{144}.$$

$$48 = 3 \cdot 16 = 2^4 \cdot 3 \quad (6 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2),$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2,$$

$$24 = 3 \cdot 8 = 2^3 \cdot 3 \quad (3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3).$$

$$\text{НОК}(48, 36, 24) = 2^4 \cdot 3^2 = (2^4 \cdot 3) \cdot 3 = 48 \cdot 3 = 144.$$

Пример 3.

$$\frac{\overset{6}{\underset{42}{5}}}{42} + \frac{\overset{14}{\underset{18}{7}}}{18} + \frac{\overset{21}{\underset{12}{1}}}{12} = \frac{30 + 98 + 21}{252} = \frac{149}{252}.$$

$$42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2,$$

$$12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3.$$

$$\text{НОК}(42, 18, 12) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = (2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 3 = 42 \cdot 6 = 252.$$

Вы видите, читатель, что для НОК'а знаменателей, мы берём **все** множители **в максимальных степенях**. Возникает вопрос: как, наиболее простым способом, найти дополнительные множители?

Важный технологический совет!

Чтобы найти дополнительные множители к дробям, нужно, как рекомендуют школьные учебники, разделить НОК на знаменатели дробей. Например, в примере 1: $450:18 = 25$ или, в примере 3: $252:12 = 21$.

Но, спрашивается, зачем делать **ненужную работу**! — Ведь у нас есть разложения на простые множители и НОК'а, и знаменателей. **А эти разложения и есть сами числа**, т.е.

75 и $3 \cdot 5^2$ — это одно и то же число, так же и $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ и 252 — одно и то же число.

Чтобы найти — **не деля** НОК на знаменатель дроби! — дополнительный множитель, надо просто посмотреть: **чего, каких множителей не хватает до НОК'а в разложении знаменателя соответствующей дроби**.

Показываю, пример 1.

$$\text{НОК}(75, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2,$$

$$75 = 3 \cdot 5^2.$$

Спрашиваем себя: чего, каких множителей в разложении числа 75 (т.е. в $3 \cdot 5^2$) **не хватает** до разложения НОК'а (т.е. до $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$)?

Видим, что не хватает одной двойки и одной тройки, т.е. $2 \cdot 3 = 6$. **6** — это и есть дополнительный множитель к дроби $\frac{4}{75}$ ($75 \cdot 6 = 450$).

Спрашиваем себя: чего не хватает в разложении 18-ти до НОК'а?

Смотрим на разложения:

$$18 = 2 \cdot 3^2,$$

$$\text{НОК} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

Видим, что в $2 \cdot 3^2$ не хватает двух пятёрок — $5^2 = 25$. **25** — это и есть дополнительный множитель к дроби $\frac{5}{18}$ ($18 \cdot 25 = 450$).

В примере 3 я показываю уже быстрее.

Чего (каких множителей) не хватает в 42-ух, в 18-ти, в 12-ти до НОК'а — 252?

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$\text{НОК} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Видим, не хватает $2 \cdot 3 = 6$. **6** — дополнительный множитель к дроби $\frac{5}{42}$.

$$18 = 2 \cdot 3^2,$$

$$\text{НОК} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Видим, не хватает $2 \cdot 7 = 14$. **14** — дополнительный множитель к дроби $\frac{7}{18}$.

$$12 = 2^2 \cdot 3,$$

$$\text{НОК} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Видим, не хватает $3 \cdot 7 = 21$. **21** — дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{12}$.

Как видите, читатель, всё предельно просто. Надо только **постоянно проговаривать** ребёнку, что глупо же делать ненужную работу деления, если можно просто воспользоваться готовыми разложениями чисел на простые множители. **И тут же подчеркнуть**: вот в чём прелесть простых множителей! вот для чего нам нужно было с ними разобраться!

Внимание!

Крайне важно, чтобы здесь **работали обе руки!** — Палец левой руки — на разложении числа, а ручка в правой руке **аккуратнейшим образом** считает в разложении НОК'а недостающие множители.

Тщательнейше следите за работой двух рук!

Иначе — ошибки, поскольку очень легко ошибиться при подсчёте недостающих множителей, если работать только «глазами».

А ребёнку **проговорите**, что это «плата» за отказ от ненужной работы деления НОК'а на знаменатель. Если он не приучится работать двумя руками — грош цена всем его знаниям и умениям, поскольку, «по закону подлости», в самый неподходящий, в самый важный момент «глаза» его подведут!

О мере письменного и устного счёта.

Напомню, как и с натуральными числами в главе II, так и с дробями (а разве это не те же натуральные числа, только разбитые на две подгруппы, называемые числителем и знамена-

телем!) нужно учиться искусству счёта, которое заключается в чувстве меры устного и письменного счёта.

Покажу на примере.

Нам нужно сложить три дроби $\frac{5}{14} + \frac{5}{12} + \frac{5}{8}$.

В знаменателях дробей имеется общий множитель 2. Числа вроде бы небольшие. И мы, не раздумывая (поскольку научились!), начинаем перебирать кратные большего знаменателя 14:

$14 \bullet 2 = 28$ — не делится на 12 и 8,

$14 \bullet 3 = 42$ — не делится на 12 и 8,

$14 \bullet 4 = 56$ — не делится на 12, хотя делится на 8,

$14 \bullet 5 \dots$

Думаю, читатель, достаточно.

Вы уже уловили, что номер со следующим кратным не пройдёт (и действительно, если мы найдём НОК знаменателей, то окажется, что он равен аж $168 = 2^3 \bullet 3 \bullet 7$).

Так мало того, что добраться до НОК'а устным умножением не просто, — ещё более не просто проверить устным делением: делится ли кратное на 12 и 8!

А казалось бы, такие простые знаменатели: 14, 12, 8!

Так вот, **обязательно покажите** этот пример ребёнку и **скажите** ему о том, что если на втором, максимум, на третьем шаге умножения он чувствует, что **становится сложно умножать в уме (а тем более, делить)** — мгновенно надо отправляться «на поля», то есть, **не раздумывая**, раскладывать на простые множители и быстренько находить НОК и дополнительные множители **без глупых ненужных** (чреватых почти неизбежной ошибкой) **усилий!**

Покажите ему ещё два примера, когда «с одного взгляда» становится ясно — нужно раскладывать на простые множители:

$$\frac{5}{48} + \frac{11}{36} \text{ и } \frac{8}{105} + \frac{6}{49}.$$

А вот $\frac{1}{30} + \frac{2}{45}$ (этот пример у нас разобран выше) и $\frac{29}{150} + \frac{1}{90}$, несмотря на дву- трёхзначные знаменатели, легко приводятся к НОЗ устно (90 и 450).

Замечание.

Обратите внимание, что $75 = 3 \bullet 25$ и $48 = 3 \bullet 16$ раскладывать предпочтительнее именно так — как базовые числа (п. Базовые числа, тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II), поскольку 25 и 16 — сразу дают готовые степени простых множителей: 5^2 и 2^4 .

Таблицу умножения тоже используем с умом — посмотрите:

$$12 = 4 \bullet 3, 18 = 2 \bullet 9, 24 = 3 \bullet 8, 36 = 4 \bullet 9,$$

а не

$$12 = 2 \bullet 6, 18 = 3 \bullet 6, 24 = 4 \bullet 6, 36 = 6 \bullet 6.$$

Всё время следите, чтобы ребёнок писал именно разложения первой строки, и **поясняйте** ему, что 4, 8, 9 сразу дают готовые степени простых чисел: 2^2 , 2^3 , 3^2 (тем самым, мы учим ребёнка видеть «внутри числа» готовые степени простых множителей 2, 3 ...).

Технологический совет.

А теперь — **вроде бы «мелочь»**: как писать дроби?

В начальной школе ребёнок приучается писать цифры числа **точно уместаясь в клетку**, и **через одну строчку** школьной тетради в клетку.

Это приводит к тому, что при записи дробей он рисует **дробную черту точно по тетрадной линейке** и цифры числителя и знаменателя, «втискиваясь» в клетку, **наползают на дробную черту**, пытаясь уместиться в клетке. А из-за того, что привыкли писать через одну строчку (оставлять пробел в одну строку) — **дополнительные множители нижних дробей** писать просто негде, и они почти «залезают» в знаменатели верхних дробей, что, естественно, приводит к ошибкам.

На рис. 16 вы видите, как **наползают** числители и знаменатели **на дробную черту** и как дополнительные множители нижних дробей **«вклиниваются» в знаменатели** верхних дробей.

Рис. 16

Рис. 17, а

Рис. 17, б

Избежать этого можно (**и нужно обязательно!**) двумя способами.

На рис. 17, а, мы пишем **дробную черту** не по линейке, а **посередине** клетки; цифры же числителя и знаменателя — **почти в клетке**. Тогда **отступы** от дробной черты получаются автоматически.

Далее, **отступаем не на одну строчку** от знаменателей верхних дробей, как на рис. 16, **а на две**, как на рис. 17, а. Тогда у нас на листе — не сплошная цифирь, а достаточно читабельный числовой текст.

Далее, — обращаю на это особое внимание! — **знаки действий и знак равенства** нужно писать **на уровне дробной черты**. В частности, ещё и поэтому мы **всегда** начинаем писать дроби **с дробной черты**.

Следите за этим, иначе дроби будут «прыгать» друг по отношению к другу то вниз, то вверх. Мало того, что это просто некрасиво (а такая «мелочь» как «некрасиво», вызывает подсознательное раздражение и у ученика, и у преподавателя), так это ещё и **утомляет** при чтении (проверке) написанного, а значит, ведёт к ошибкам, к тому, что мы не замечаем ошибок.

Второй способ рисования дробей изображён на рис. 17, б. Нужно только время и терпение, чтобы ребёнок отучился «втискиваться в клетку» и, оставляя пробелы между цифрами и дробной чертой (отступая от дробной черты), преодолел психологический барьер — начал писать цифры, пересекая тетрадные линейки.

Оба способа хороши и оба должны использоваться. Впоследствии **появится привычка оставлять пробелы** между цифрами числителя и знаменателя и дробной чертой, между дробями (примерно две строчки).

Но, повторяю, вам, читатель, **придётся потрудиться**, чтобы ребёнок приобрёл умение хорошей записи дробей.

Впрочем, таковы все «мелочи»!

Смешанные дроби

До сих пор мы с вами, читатель, занимаясь **обыкновенными** дробями, были знакомы только с **правильными** ($\frac{3}{4}$ — числитель меньше знаменателя) и **неправильными** ($\frac{7}{4}$, $\frac{4}{4}$ — числитель больше или равен знаменателю) дробями.

Теперь познакомимся с третьей формой дробей — **смешанными дробями**.

Я думаю, читатель, ваш ребёнок (и вы!) чётко уяснил, что дроби, в своём роде, — те же натуральные числа: как только они приведены к общему знаменателю — мы о знаменателе «забываем» и считаем, как на пальцах, числитель: один, два, три, ... , семь, ... добавляя только — семь чего?... семь, например, четвёртых долей.

Посмотрите на рис. 18: что из себя представляет дробь $\frac{7}{4}$?

Если смотреть **сверху** координатной прямой, то это натуральные числа 1, ... , 3, 4, ... , 7 — **количество четвёртых долей**.

Но если посмотреть **снизу** координатной прямой, то **видим**, что, досчитав до **4-х четвёртых долей** ($\frac{4}{4}$), мы получаем **одну целую единицу**. И, продолжая считать долями, мы насчитываем ещё **3 четвёртых доли** ($\frac{3}{4}$) уже **второй единицы** (отрезок от 1 до 2).

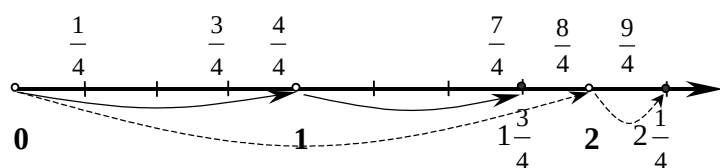


Рис. 18

Что же получается?

Сверху — **неправильная** дробь $\frac{7}{4}$, а **снизу** — **одна целая единица да ещё правильная** дробь $\frac{3}{4}$. Всего $1 + \frac{3}{4}$.

Глядя на дробь $\frac{9}{4}$, **видим**, что это **9 четвёртых долей** сверху, а снизу — **две целых единицы да ещё 1 четвёртая доля** ($\frac{1}{4}$), а всего $2 + \frac{1}{4}$.

Так вот, **условились** дроби, у которых есть и целая часть, и дробная (правильная дробь, меньше 1), **записывать единым символом**, без знака сложения: $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$ и называть их **смешанными дробями** (произносим: «Одна целая три четвёртых, две целых одна четвёртая»).

Очень важно, чтобы ребёнок отчётливо понимал, что **смешанная дробь** — это **сумма** целой и дробной частей:

$$1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}, \quad 2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

Вернёмся к рис. 18.

Мы начали с того, что **увидели**: **неправильная** дробь $\frac{7}{4}$ и **смешанная** дробь $1\frac{3}{4}$ — это **одно и то же число** (**одна и та же точка** на координатной прямой). Математически это означает **равенство**:

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}, \quad \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Так вот, **превращение** неправильной дроби в смешанную, называется **выделением целой части** из неправильной дроби.

Обратный процесс называется **преобразованием смешанной дроби в неправильную дробь**.

Выделение целой части из неправильной дроби

Первый способ — «в лоб»: делим числитель на знаменатель (ведь дробь, это ещё и действие деления).

Частное даёт целую часть, а остаток — числитель дробной части:

$$\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1 \text{ (остаток 3)} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 4} \\ \underline{4} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{① — целая часть} \\ \text{③ — остаток} \end{array}$$

Этим способом пользуются только в случае «больших» дробей ($\frac{295}{21} = 14\frac{1}{21}$).

Но, поскольку мы с вами, читатель, озаботились о необходимых умениях устного деления, раскладывая делимое на удобные слагаемые ($\frac{52}{4} = \frac{40+12}{4} = 10+3=13$, п. Деление двузначного числа на однозначное, тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II), то, разумеется, в массе «маленьких» дробей, мы должны научить ребёнка устно выделять целую часть точно таким же разложением числителя на удобные слагаемые. Кстати, это умение, помимо самой арифметики, пригодится в 10 классе, в курсе тригонометрии.

Поясню на примерах:

$$\frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = 1\frac{3}{4}; \quad \frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = 1\frac{4}{5}; \quad \frac{7}{3} = \frac{6+1}{3} = 2\frac{1}{3};$$

$$\frac{17}{5} = \frac{15+2}{5} = 3\frac{2}{5}; \quad \frac{29}{6} = \frac{24+5}{6} = 4\frac{5}{6}; \quad \frac{48}{11} = \frac{44+4}{11} = 4\frac{4}{11}.$$

Вы видите, читатель, что такое удобные слагаемые в числителе: одно число делится (нацело) на знаменатель, а другое — меньше знаменателя.

Ясно, что способ выделения целой части путём разложения на удобные слагаемые, требует великолепного знания таблицы умножения и, хоть и простенького, но отточено-грамотного сложения одно- двузначных чисел с одно- двузначными (таблицы 1, 3, 5, тренажёр устного счёта: сложение/вычитание — переход через десяток, глава II).

Показав (проговорив) ребёнку несколько примеров, далее вы задаёте стандартные вопросы-пояснения: разложи на удобные слагаемые... а что такое удобные слагаемые?... — одно число делится на знаменатель, а другое — меньше знаменателя.

Внимание!

Вы всё время требуете, чтобы ребёнок вслух произносил разложение на слагаемые, особенно, второе слагаемое — числитель дробной части точно так же, как и при устном делении двузначного числа на однозначное (п. Деление двузначного числа на однозначное, тренажёр устного счёта: умножение/деление, глава II).

Ещё проще пользоваться умножением знаменателя на будущую целую часть дроби.

Мы «подбираемся» к знаменателю «снизу».

В первом примере — $\frac{7}{4}$.

4 (знаменатель) умножаем на **2** — много ($4 \cdot 2 = 8$, а у нас числитель **7**).

$4 \cdot 1 = 4$ и ещё остаётся **3** до семи ($7 = 4 + 3$). Отсюда результат — $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

Во втором примере — $\frac{7}{3}$.

3 (знаменатель) умножаем на **3** — много ($3 \cdot 3 = 9$, а у нас числитель **7**).

$3 \cdot 2 = 6$ и ещё остаётся 1 до семи ($7 = 6 + 1$). Отсюда результат — $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

В третьем примере — $\frac{17}{5}$.

5 (знаменатель) умножаем на **4** — много ($5 \cdot 4 = 20$, а у нас числитель 17).

$5 \cdot 3 = 15$ и ещё остаётся 2 до семнадцати ($17 = 15 + 2$). Отсюда результат — $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$.

В четвёртом примере — $\frac{48}{11}$.

11 (знаменатель) умножаем на **5** — много ($11 \cdot 5 = 55$, а у нас числитель 48).

$11 \cdot 4 = 44$ и ещё остаётся 4 до сорока восьми ($48 = 44 + 4$). Отсюда результат — $\frac{48}{11} = 4\frac{4}{11}$.

Надо только не забывать: написали результат, тут же проверили ручкой умножение и сложение (следующий пункт) — получаем ли нашу неправильную дробь.

Перевод смешанной дроби в неправильную

Для умножения и деления обыкновенных дробей нам понадобится превращать смешанную дробь в неправильную.

Сначала — обоснование такого преобразования:

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{\overset{3}{2}}{1} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{3} = \frac{6 + 1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Видим, что сперва смешанную дробь $2\frac{1}{3}$ записали в виде **суммы** целой и дробной частей

$2 + \frac{1}{3}$, затем, целую часть — натуральное число 2, — записали в виде дроби со знаменателем

$1 - \frac{2}{1}$, далее, привели дроби к общему знаменателю и записали **на одной дробной черте**

$$\frac{\overset{3}{2}}{1} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{3}.$$

Нас интересует именно эта запись. Видим, чтобы перевести смешанную дробь в неправильную, надо действовать по схеме:

умножаем 3 — знаменатель дробной части на **2** — целую часть и **складываем** с числителем дробной части.

Внимание!

Стрелки говорят нам, что «**считает ручка**» (как передвигается кончик пера).

И опять требуется отличное знание таблицы умножения и устного сложения!

$$\overset{+}{\swarrow} 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

«Считая ручкой», мы не произносим: «Три умножить на два — получится шесть; плюс один — получится семь». — Никакого лишнего словесного мусора.

На самом деле — **первое движение ручки от 3 к 2** — произносим: «Шесть» (сразу результат умножения, поскольку «считает ручка» и мы **видим** множители). **Второе движение — от 2 к 1** — произносим: «И один. — Семь».

То есть реально, при счёте **вслух, произносится**: «Шесть и один — семь».

Обязательно — с союзом «и», так как «и» для нас — это действие сложения!

Примеры.

Перевести в неправильную дробь.

$$3\frac{1}{2}; 2\frac{2}{5}; 1\frac{8}{15}; 11\frac{1}{11}; 30\frac{1}{3}; 12\frac{7}{10}; 100\frac{3}{10}; 24\frac{99}{100}; 75\frac{2}{3}.$$

Замечание.

Перевод дроби $11\frac{1}{11}$ требует знания квадрата числа $11^2 = 121$. Также крайне желательно

для тригонометрии помнить: $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $15^2 = 225$.

Конечно, всегда можно умножить «в столбик» $11 \bullet 11$, но лучше выучить квадраты этих чисел, чтобы, глядя на числа 121, 144, 169, 225, видеть, что это квадраты чисел 11, 12, 13, 15.

За исключение последнего примера, все дроби переводятся устно. А вот на последний пример **нужно обратить внимание ребёнка**: «Да, при хорошей счётной технике, можно и устно, — но стоит ли? **Видим, что «напряг»** (для устного счёта), пусть и небольшой?.. **В таком случае** — «на поля», **письменно**. Особенно, в ответственных случаях (контрольная, экзамен).

Ответы к примерам.

$$\frac{7}{2}; \frac{12}{5}; \frac{23}{15}; \frac{122}{11}; \frac{91}{3}; \frac{127}{10}; \frac{1003}{10}; \frac{2499}{100}; \frac{227}{3}.$$

Сложение смешанных дробей

Нам осталось сделать последний шаг, читатель, чтобы, **в первом приближении**, закончить сложение дробей. — Научимся складывать смешанные дроби.

Принцип сложения очень прост (но его надо соблюдать неукоснительно!): **отдельно** (складываем) — **целые части** и **отдельно** — **дробные**.

Если мы чётко усвоили, что **смешанная дробь** — это **сумма** **целой** и **дробной** частей, то пример сложения будет совершенно ясен:

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{5} = \left(2 + \frac{1}{3}\right) + \left(3 + \frac{2}{5}\right) = (2 + 3) + \left(\frac{\overset{5}{1}}{3} + \frac{\overset{3}{2}}{5}\right) = 5 + \frac{5+6}{15} = 5 + \frac{11}{15} = 5\frac{11}{15}.$$

Один раз стоит пройтись с ребёнком по всей вычислительной цепочке, а потом **научить** его все промежуточные вычисления делать устно:

$$2\frac{\overset{5}{1}}{3} + 3\frac{\overset{3}{2}}{5} = 5\frac{5+6}{15} = 5\frac{11}{15}.$$

Внимание!

«Считает ручка!» — Всё время **проговаривайте** ребёнку: «Ручкой (передвигай от числа к числу)!.. Отдельно — целые части (сколько получится?)».

И здесь же, уже автоматом вслух (о сложении дробных частей): «Дробная черта... Общий знаменатель... Дополнительные (множители)».

Необходимый минимум устных примеров.

$$1) \quad 3\frac{1}{4} + 3; 5 + 4\frac{3}{5}; 2 + 7\frac{5}{8}; 5\frac{1}{6} + 5.$$

$$2) \quad 1\frac{1}{6} + \frac{1}{6}; \quad 2\frac{1}{8} + \frac{3}{8}; \quad \frac{2}{9} + 3\frac{4}{9}; \quad \frac{5}{12} + 4\frac{1}{12}.$$

$$3) \quad 1\frac{3}{14} + 2\frac{1}{14}; \quad 3\frac{2}{15} + 1\frac{4}{15}; \quad 1\frac{7}{24} + 6\frac{1}{24}; \quad 7\frac{5}{27} + 3\frac{13}{27}.$$

$$4) \quad 2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{6}; \quad 1\frac{3}{10} + 3\frac{7}{10}; \quad 5\frac{5}{8} + 1\frac{5}{8}; \quad 4\frac{7}{9} + \frac{5}{9}.$$

Техника работы с примерами.

Ребёнок их **не пишет, а вы — ручкой** — достаточно быстро показываете с целой части на целую и с дробной на дробную.

П. 1 — целиком делается устно. Только вы поддерживаете ребёнка репликами: «Три и три?.. Верно, шесть... Два и семь?.. — Девять...». А начинаете его фразой: «**Видим**, что **можем отдельно** сложить **целые** части?..»

Почти все остальные примеры делаются «**наполовину**» устно, поскольку требуется сокращение дробных частей.

П. 2 вы начинаете фразой: «**Видим**, что **можем отдельно** сложить **дробные** части (они уже с общим знаменателем)?.. — Одна целая и две шестых».

И вот тут — внимание!

Сразу и навсегда запретите ребёнку проводить устные сокращения при сложении (вычитании) дробей! Устно он может только сказать, например, $1\frac{2}{6}$. **В тот же миг**, скажите ему, чтобы он этот **промежуточный результат** — **записал!** И только **видя** перед собой дробь, **готовую** к сокращению, пусть пишет окончательный результат: $1\frac{1}{3}$ (с вашим вспомогательным вопросом: «Можем сократить дробную часть?.. А раз можем, то и сокращаем... На сколько?.. Верно, на два» — То есть, на бумаге он напишет $1\frac{\overset{2}{2}}{6} = 1\frac{1}{3}$. Поэтому я и сказал, что решения будут «полуустными»).

На этапе обучения жёстко пресекайте попытки устного сокращения!

Постоянно напоминайте ему, что нам нужен **правильный** результат, а при устном сокращении очень легко ошибиться, стоит немного отвлечься. Также **постоянно напоминайте**, что окончательный результат должен быть доведён **до несократимой дроби**.

П. 3 вы начинаете фразой: «**Видим**, что **можем отдельно** сложить **целые** и **отдельно** — **дробные** части?»

П. 4 нуждается в пояснении.

В первых двух примерах дробные части при сложении дают одну целую единицу, и эти примеры — целиком устно.

В последних двух примерах дробные части при сложении дают неправильную дробь, что требует выделения целой части.

Особо обратите внимание ребёнка на то, что в этих двух примерах (и в дальнейшем!) **сначала** нужно **сократить** неправильную дробь и **только потом выделять** целую часть. Объясняется это тем, что **гораздо легче** выделить целую часть **при маленьких** числителе и знаменателе.

В ответах к примерам я даю полную роспись **письменной части** (п. 1 — устные ответы).

Ответы к примерам.

$$1) \quad 6\frac{1}{4}; \quad 9\frac{3}{5}; \quad 9\frac{5}{8}; \quad 10\frac{1}{6}.$$

$$2) \quad 1\frac{\check{2}^2}{6} = 1\frac{1}{3}; \quad 2\frac{\check{4}^4}{8} = 2\frac{1}{2}; \quad 3\frac{\check{6}^3}{9} = 3\frac{2}{3}; \quad 4\frac{\check{6}^6}{12} = 4\frac{1}{2}.$$

$$3) \quad 3\frac{\check{4}^2}{14} = 3\frac{2}{7}; \quad 4\frac{\check{6}^3}{15} = 4\frac{2}{5}; \quad 7\frac{\check{8}^8}{24} = 7\frac{1}{3}; \quad 10\frac{18^9}{27} = 10\frac{2}{3}.$$

$$4) \quad 5\frac{6}{6} = 6; \quad 4\frac{10}{10} = 5; \quad 6\frac{10^2}{8} = 6\frac{5}{4} = 7\frac{1}{4}; \quad 4\frac{12^3}{9} = 4\frac{4}{3} = 5\frac{1}{3}.$$



Вычитание дробей

Так как **вычитание** — это то же самое сложение (только с противоположным знаком, как мы узнаем в главе V, «Отрицательные числа»), а складывать, приводя к общему знаменателю, мы умеем, то в вычитании дробей нам нужно только овладеть несколькими техническими приёмами.

Но сначала, пара примеров на вычитание правильных дробей и их запись:

$$1) \frac{19}{21} - \frac{4}{21} = \frac{19-4}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7};$$

$$2) \frac{\overset{3}{3}}{10} - \frac{\overset{2}{2}}{15} = \frac{9-4}{30} = \frac{\overset{5}{5}}{30} = \frac{1}{6}.$$

Главное в обоих примерах — запись вычитания на одной дробной черте ($\frac{19-4}{21}, \frac{9-4}{30}$) и сокращение дробей.

Внимание!

Ни в коем случае не позволяйте ребёнку миновать запись на одной дробной черте!

Если первый пример — всего лишь пояснительно-вспомогательный, то второй — требует именно моей формы записи.

Когда мы **записываем** на одной дробной черте **промежуточные** результаты умножения числителей на дополнительные множители ($3 \bullet 3 = 9, 2 \bullet 2 = 4$), то, во-первых, **не держим** их (9 и 4) **в уме** и, также, **не проводим в уме** вычитание ($9 - 4$) — целых три операции! — А мы должны стараться на каждый момент «держать» **только одну** операцию в уме. Во-вторых, мы мимоходом осуществляем автоматический контроль вычислений, поскольку $9 - 4$ — перед глазами.

Технические приёмы вычитания

Вычитание правильной дроби из единицы

Я говорю своим ученикам: умеем вычитать дробь из единицы — нет проблем в 11 классе с первой и основной формулой, с которой начинается дифференцирование, с производной степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$ (например, $(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{1/3-1}$), в данном случае — единицу из дроби.

Пример.

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Нужно **напомнить** ребёнку, что мы можем 1 (единицу) записать в виде дроби с любым натуральным знаменателем:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots = \frac{6}{6} = \dots = \frac{21}{21} = \dots = \frac{100}{100} = \dots$$

А далее, — несколько примеров, **спрашивая**: «Единица со знаменателем 7 (или 15) — сколько (седьмых или пятнадцатых долей)?.. Верно, $\frac{7}{7}$ (или $\frac{15}{15}$).

Примеры.

$$1 - \frac{1}{4}; 1 - \frac{1}{7}; 1 - \frac{2}{9}; 1 - \frac{3}{10}; 1 - \frac{7}{15}.$$

Мимоходом стоит заметить, что совсем не обязательно говорить вместо единицы — $\frac{4}{4}, \frac{7}{7}, \dots, \frac{15}{15}$, а достаточно из знаменателя вычитаемой дроби вычесть её числитель.

Ответы к примерам.

$$\frac{3}{4}; \frac{6}{7}; \frac{7}{9}; \frac{7}{10}; \frac{8}{15}.$$

«Отщепление» единицы (вычитание правильной дроби из натурального числа)

Научившись вычитать дробь из единицы, мы можем теперь вычесть дробь из любого натурального числа, **«отщепляя» единицу**.

Пример.

$$3 - \frac{1}{5} = (2 + 1) - \frac{1}{5} = 2 + (1 - \frac{1}{5}) = 2 + \frac{4}{5} = 2\frac{4}{5}.$$

Показывая этот пример ребёнку, **нужно проговаривать**: «3 — это **2 и 1**. Из единицы можем вычесть $\frac{1}{5}$?.. Да, **только что научились**: $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Да **ещё оставалось** 2 целых единицы, а сумма целой и дробной частей $2 + \frac{4}{5}$ — смешанная дробь $2\frac{4}{5}$ ».

Чтобы вычесть из натурального числа дробь, мы говорим: **«отщепим» единицу** от 3-х единиц (займём единицу) — и тогда **сразу видим**, что **остаётся** целая часть результата (смешанной дроби) — **на единицу меньше**. Было 3 (целых), стало 2 (целых).

В следующих примерах **вы** показываете **ручкой** с одного числа на другое и **требуете**: «Скажи целую часть (результата)».

Примеры.

$$6 - \frac{1}{6}; 4 - \frac{3}{4}; 3 - \frac{4}{7}; 7 - \frac{5}{8}; 12 - \frac{10}{21}; 21 - \frac{17}{100}.$$

Ответы к примерам.

$$5\frac{5}{6}; 3\frac{1}{4}; 2\frac{3}{7}; 6\frac{3}{8}; 11\frac{11}{21}; 20\frac{83}{100}.$$

Внимание!

Следующие два пункта, несмотря на всю их простоту, **крайне важны**, особенно, второй — вычитание смешанной дроби из натурального числа, поскольку стандартная ошибка, возникающая в нём, часто **остаётся на всю жизнь!**

Вычитание натурального числа из смешанной дроби

Пример.

$$5\frac{2}{7} - 3 = 5 + \frac{2}{7} - 3 = (5 - 3) + \frac{2}{7} = 2 + \frac{2}{7} = 2\frac{2}{7}.$$

Напомните ребёнку, что смешанная дробь $5\frac{2}{7}$ — это **сумма** целой (число 5) и дробной (дробь $\frac{2}{7}$) частей: $5\frac{2}{7} = 5 + \frac{2}{7}$. И, написав эту сумму, **спросите**: «Можем отдельно вычесть число 3 из целой части 5 нашей дроби $5\frac{2}{7}$?.. Да ($5 - 3 = 2$). А «дробный хвостик» ($\frac{2}{7}$)?»

Видим, что $\frac{2}{7}$ нужно **прибавить** к получившейся целой части (к числу 2)?.. Да $(2 + \frac{2}{7})$. —

А это смешанная дробь $2\frac{2}{7}$ ».

Разумеется, в реальном счёте запись решения короче: $5\frac{2}{7} - 3 = 2\frac{2}{7}$.

Примеры.

$$3\frac{1}{2} - 2; 5\frac{2}{3} - 4; 6\frac{8}{9} - 3; 15\frac{7}{16} - 5; 47\frac{21}{25} - 8; 50\frac{1}{10} - 50.$$

Как и в предыдущем пункте — **требуете** (показывая ручкой с целой части дроби $5\frac{2}{7}$ на число 3): «Целая часть (результата)?.. Верно, 2. Результат?.. — $2\frac{2}{7}$ ».

Ответы к примерам.

$$1\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}; 3\frac{8}{9}; 10\frac{7}{16}; 39\frac{21}{25}; \frac{1}{10}.$$

Вычитание смешанной дроби из натурального числа

Стандартной ошибкой (и крайне значимой!) является то, что **дробную часть** вычитаемой дроби ребёнок **не вычитает, а прибавляет**. То есть путает с только что изложенным вычитанием числа из смешанной дроби.

Если вы, после только что разобранного вычитания $5\frac{2}{7} - 3$, спросите ребёнка о вычитании $5 - 3\frac{2}{7}$, то, большинстве случаев, получите ответ $2\frac{2}{7}$.

Обязательно подробно распишите и проговорите ребёнку вычитание $5 - 3\frac{2}{7}$.

$$5 - 3\frac{2}{7} = 5 - (3 + \frac{2}{7}) = (5 - 3) - \frac{2}{7} = 2 - \frac{2}{7} = 1\frac{5}{7}.$$

Скажите ему: «Что такое дробь $3\frac{2}{7}$? — Это **сумма** $3 + \frac{2}{7}$, верно? А раз так, то мы можем из 5-ти вычесть 3 (целую часть дроби $3\frac{2}{7}$) **да ещё** — **вычесть или прибавить?**.. — «дробный хвостик» $\frac{2}{7}$. — **Видим**, что $\frac{2}{7}$ мы **тоже** должны **вычесть**: $5 - (3 + \frac{2}{7})$ ».

(Предметное пояснение: из 5 яблок мы должны **забрать** (вычесть) 3 целых яблока, **да ещё** кусочек в $\frac{2}{7}$ яблока.)

В реально счёте записываем короче: $5 - 3\frac{2}{7} = 2 - \frac{2}{7} = 1\frac{5}{7}$.

Внимание!

Ни в коем случае не позволяйте ребёнку миновать запись $2 - \frac{2}{7}$ и сразу выдавать ответ $1\frac{5}{7}$!

Во-первых, потому, что **всегда** при работе со смешанными дробями (сложение и вычитание), мы должны **сначала** «расправиться» с целыми частями и только затем — с дробными.

Во-вторых, человеку **свойственно видеть сложение, а не вычитание**, и ребёнку надо обязательно сказать о том, что в одном случае из десяти (а то и из пяти) он **непрерывно** пишет $5 - 3\frac{2}{7} = 2\frac{2}{7}$, а не $5 - 3\frac{2}{7} = 1\frac{5}{7}$. Нужно пояснить ему, что без среднего счётного звена ($2 - \frac{2}{7}$), он **видит** $3\frac{2}{7}$ **как сумму**, и именно поэтому **прибавляет** $\frac{2}{7}$, а не вычитает. А вот когда мы, **отдельно** вычтя целую часть, записываем $2 - \frac{2}{7}$, то ошибиться невозможно — **всё перед глазами!**

Примеры.

$$6 - 1\frac{1}{2}; 4 - 2\frac{3}{5}; 7 - 5\frac{3}{7}; 8 - 5\frac{3}{4}; 16 - 9\frac{1}{10}; 21 - 20\frac{1}{100}.$$

Для того, чтобы, **прежде всего вы**, читатель, **не позволяли себе** миновать вычитание из целой части дробной, ответы даны в полной записи решения.

Ответы к примерам.

$$6 - 1\frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}; 4 - 2\frac{3}{5} = 2 - \frac{3}{5} = 1\frac{2}{5}; 7 - 5\frac{3}{7} = 2 - \frac{3}{7} = 1\frac{4}{7};$$

$$8 - 5\frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}; 16 - 9\frac{1}{10} = 7 - \frac{1}{10} = 6\frac{9}{10}; 21 - 20\frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Вычитание смешанной дроби из смешанной дроби

(без «отщепления» единицы)

Основной принцип, читатель: **сначала** вычесть **целую** часть, и только **потом** — **дробную** **вы должны соблюдать неукоснительно** (и постоянно, «автоматом» **проговаривать** для ребёнка: «Сначала — целую, потом — дробную»)!

Пример.

$$6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = 4\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = (4\frac{3-1}{4}) = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2};$$

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 3\frac{4-3}{6} = 3\frac{1}{6}.$$

Когда дробные части уже с общим знаменателем (первый пример), то мы можем обойтись и без единой дробной черты ($4\frac{3-1}{4}$). Но запись $4\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ **миновать нельзя** (отдельно вычли целые части $6 - 2 = 4$).

Запись второго примера — очевидна. **Видим**, (поскольку дополнительные множители над дробными частями записаны), что можем, после приведения к общему знаменателю, вычесть

из первой дробной части $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ вторую $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Поэтому, **записав целую часть результата 3, сразу, на единой дробной черте**, пишем вычитание дробных частей $\frac{4-3}{6}$.

Замечание.

Разумеется, результат доводим **до несократимой дроби**, как в первом примере.

Примеры.

$$\begin{aligned}
 & а) 4\frac{7}{8} - 2\frac{1}{8}; б) 7\frac{4}{9} - 1\frac{1}{9}; в) 4\frac{2}{5} - 4\frac{1}{5}; \\
 & г) 3\frac{5}{6} - 1\frac{1}{3}; д) 4\frac{8}{9} - 1\frac{1}{6}; е) 7\frac{3}{8} - \frac{1}{4}; \\
 & ж) 3\frac{11}{14} - 1\frac{2}{7}; з) 18\frac{9}{35} - 17\frac{3}{14}; и) 13\frac{14}{15} - 9\frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

Ответы-решения к примерам.

$$\begin{aligned}
 & а) 4\frac{7}{8} - 2\frac{1}{8} = 2\frac{7-1}{8} = 2\frac{\overset{2}{6}}{8} = 2\frac{3}{4}; б) 7\frac{4}{9} - 1\frac{1}{9} = 6\frac{4-1}{9} = 6\frac{\overset{3}{3}}{9} = 6\frac{1}{3}; в) 4\frac{2}{5} - 4\frac{1}{5} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}; \\
 & г) 3\frac{5}{6} - 1\frac{1}{3} = 2\frac{5-2}{6} = 2\frac{\overset{3}{3}}{6} = 2\frac{1}{2}; д) 4\frac{8}{9} - 1\frac{1}{6} = 3\frac{16-3}{18} = 3\frac{13}{18}; е) 7\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = 7\frac{3-2}{8} = 7\frac{1}{8}; \\
 & ж) 3\frac{11}{14} - 1\frac{2}{7} = 2\frac{11-4}{14} = 2\frac{\overset{7}{7}}{14} = 2\frac{1}{2}; з) 18\frac{9}{35} - 17\frac{3}{14} = 1\frac{18-15}{70} = 1\frac{3}{70}; \\
 & и) 13\frac{14}{15} - 9\frac{7}{12} = 4\frac{56-35}{60} = 4\frac{\overset{3}{21}}{60} = 4\frac{7}{20}.
 \end{aligned}$$

Напоминание.

Вы, читатель, разумеется, **параллельно** с решением ребёнка, **«автоматом» проговариваете вслух**: «Отдельно — целые (части вычесть)... дробная черта... знаменатель... дополнительные (множители)... теперь считаем... сокращение есть?... сокращаем».

Вычитание смешанной дроби из смешанной дроби**(с «отщеплением» единицы)**

Выше мы могли, после приведения к НОЗ, вычесть дробные части **в натуральных числах**.

Ну, а когда это невозможно:

$$1\frac{3}{8} - \frac{7}{8} = 1\frac{3-7}{8} \text{ — что делать?}$$

$$5\frac{\overset{2}{1}}{5} - 2\frac{3}{10} = 3\frac{2-3}{10} \text{ — что делать?}$$

$3-7$, $2-3$ — пока мы не знакомы с отрицательными числами, такое вычитание невозможно.

Но мы умеем переводить смешанную дробь, с целой частью в единицу, в неправильную, тем самым, **увеличивая** числитель дробной части на величину знаменателя.

$$\text{В первом примере } 1\frac{3}{8} = \frac{11}{8}. \text{ А вот теперь можем вычесть: } 1\frac{3}{8} - \frac{7}{8} = \frac{11}{8} - \frac{7}{8} = \frac{\overset{4}{4}}{8} = \frac{1}{2}.$$

Во втором примере, благодаря дополнительному множителю, сразу **видим**, что не можем вычесть $2-3$ и проводим вычисления следующим образом:

$$5\frac{\overset{2}{1}}{5} - 2\frac{3}{10} = 3\frac{2}{10} - \frac{3}{10} = 2 + 1\frac{2}{10} - \frac{3}{10} = 2 + \frac{12}{10} - \frac{3}{10} = 2\frac{9}{10}.$$

То есть, вычтя целую часть и приведя дробные части к НОЗ ($3\frac{2}{10} - \frac{3}{10}$), мы «отщепляем» единицу от целой части ($3\frac{2}{10} = 2 + 1\frac{2}{10}$) и, переведя смешанную дробь в неправильную ($1\frac{2}{10} = \frac{12}{10}$), проводим вычитание дробных частей.

При наличии хорошей счётной техники, «отщепление» единицы и перевод в неправильную дробь, можно (и нужно) записывать короче:

$$5\overset{2}{\underset{1}{\cancel{1}}}\frac{1}{5} - 2\frac{3}{10} = 3\frac{2}{10} - \frac{3}{10} = 2\frac{12-3}{10} = 2\frac{9}{10}.$$

Внимание!

На начальном этапе обучения **ни в коем случае нельзя допускать** краткую запись счёта! Только прорешав несколько примеров, убедившись, что ребёнок понимает смысл всех своих действий, **и ему не трудно в уме** «отщеплять» единицу и переводить в неправильную дробь, только тогда можно (и, повторюсь, нужно) переходить к краткой записи.

Ограничусь полными решениями нескольких примеров:

$$1\frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{13-5}{12} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{12} = \frac{2}{3};$$

$$1\frac{\overset{7}{\cancel{3}}}{5} - \frac{\overset{5}{\cancel{5}}}{7} = 1\frac{21}{35} - \frac{25}{35} = \frac{56-25}{35} = \frac{31}{35};$$

$$15\frac{3}{10} - 11\frac{9}{10} = 4\frac{3}{10} - \frac{9}{10} = (3 + 1\frac{3}{10} - \frac{9}{10}) = 3\frac{13-9}{10} = 3\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{10} = 3\frac{2}{5};$$

$$44\frac{\overset{3}{\cancel{1}}}{6} - 39\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{9} = 5\frac{3}{18} - \frac{8}{18} = (4 + 1\frac{3}{18} - \frac{8}{18}) = 4\frac{21-8}{18} = 4\frac{13}{18};$$

$$99\frac{\overset{4}{\cancel{4}}}{15} - 71\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{20} = 28\frac{16}{60} - \frac{27}{60} = (27 + 1\frac{16}{60} - \frac{27}{60}) = 27\frac{76-27}{60} = 27\frac{49}{60}.$$

Напоминание.

Следите за тем, чтобы ребёнок «считал ручкой» (кончик ручки движется по целым частям, с числителя на дополнительный множитель и т.д.).

Замечание.

После того, как мы овладеем отрицательными числами (глава V), мы сможем проводить вычитание без «отщепления» единицы, гораздо проще и короче.

Совместные действия сложения и вычитания дробей

Всё необходимое для применения совместных действий у нас имеется.

Я приведу два примера с полным решением по действиям. **Вы же, читатель, озаботьтесь** соответствующей **практикой** на большем количестве.

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\ 10 - (5\frac{7}{8} + 3\frac{5}{12}) = \frac{17}{24}.$$

$$1) 5\frac{7^3}{8} + 3\frac{5^2}{12} = 8\frac{21+10}{24} = 8\frac{31}{24} = (8 + \frac{31}{24} = 8 + 1\frac{7}{24}) = 9\frac{7}{24};$$

$$2) 10 - 9\frac{7}{24} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}.$$

$$3\frac{11}{21} - (6\frac{1}{6} - 3\frac{11}{21}) = \frac{37}{42}.$$

$$1) 6\frac{1^7}{6} - 3\frac{11^2}{21} = 3\frac{7}{42} - \frac{22}{42} = 2\frac{49}{42} - \frac{22}{42} = (2\frac{49-22}{42}) = 2\frac{27^3}{42} = 2\frac{9}{14};$$

$$2) 3\frac{11^2}{21} - 2\frac{9^3}{14} = 1\frac{22}{42} - \frac{27}{42} = \frac{64-27}{42} = \frac{37}{42}.$$

Резюме раздела «Клетка» знаниевого ядра ЗЯМ₂

А теперь, читатель, главное!

Если вы с ребёнком **реализуете** вышеописанную программу обучения, **то, тем самым, создадите «клетку» знаниевого ядра «Дробь».**

В самом начале раздела я сказал, что «клетка» ЗЯМ₂ — это качественно новое знаниевое образование, нежели «элементы» ЗЯМ₂, хотя ещё и не автономно-жизнеспособное (рис. 2, приложение 3).

К моменту завершения сложения и вычитания дробей (примеры на совместные действия), вы увидите, что «элементы» ядра стали действительно только «элементами»: сокращения, приведение к НОЗ, грамотный счёт (если вы озаботились тем, чтобы ребёнок хотя бы частично поставил счётную технику главы II) — **идут быстро, без усилий и почти без ошибок.** Это и означает, что «клетка» знаниевого ядра сформирована: элементы ядра образовали **качественно новую структуру, нежели просто набор** понятий, методов, средств.

Теперь вам понадобится **всего лишь несколько дней**, чтобы, добавив умножение и деление, сформировать «оболочку» ядра, — а это уже будет автономное жизнеспособное знаниевое образование!

Практически, никаких особых усилий от вас уже не потребуется — просто добавьте грамотную технику умножения и деления дробей, следя, разумеется, за правильностью счёта.

Однако, это тоже крайне важный этап формирования знаниевого ядра, поскольку только использование всех четырёх действий арифметики в примерах на совместное их применение, даёт **автономное жизнеспособное знаниевое образование** (рис. 2, приложение 3).

После этого, в общем-то, можно сказать, что «на три балла» ваш ребёнок выйдет до самого конца школы. Но, думается, затратив столько усилий, а главное, — **совершенно иначе почувствовав себя**, увидев свои потенциальные возможности и силы, вряд ли ребёнок захочет ограничиться тремя баллами. А уж вы, в любом случае, **просто обязаны** сформировать третью зону ближайшего развития (рис. 2, приложение 3) — владение десятичными дробями и отрицательными числами (ЗЯМ₃).

Только в совокупности ЗЯМ₂ и ЗЯМ₃ дают свободную вычислительную технику — основу всего дальнейшего математического образования (но решающим является, разумеется, ЗЯМ₂).



«Оболочка» знаниевого ядра ЗЯМ₂

Умножение и деление дробей

Как я уже сказал, вам, читатель, понадобится всего лишь несколько дней на умножение и деление дробей.

С точки зрения концепции знаниевых ядер математики, этот этап, носящий название «формирование «оболочки» ядра», является закреплением «клетки» ядра.

Быстро овладев умножением и делением дробей, а также техникой выполнения совместных действий, ребёнок снимает принципиальную для всего дальнейшего математического образования, преграду!

Вы же, читатель, заметите, что **доля ваших усилий**, относящихся непосредственно к предметной, математической стороне занятий, **значительно уменьшится** — **вам станет легко работать с ребёнком**, в отличие от предыдущих этапов. Теперь, когда «клетка» ядра сформирована, вы, по большому счёту, будете просто наращивать технику.

Но главное в другом! — В большинстве случаев вы увидите, **как изменился** ваш ребёнок! Особенно ярко этот психокоррекционный эффект формирования знаниевых ядер математики проявляется на старшекласниках. Старшекласник (9–11 классы) уже **полной мерой** хлебнул, за прошедшие со времён 5–6-го классов 3–4 школьных года, всю жуть «интеллектуального безделья» на уроках математики. В полной мере ощутил собственную якобы «тупость». Именно старшекласник (если, конечно, у него нет сильно выраженного нежелания научиться!) способен прочувствовать всю меру своих **открывающихся возможностей**: сначала, на этапе формирования «клетки» ядра, затем — на завершающем этапе формирования «оболочки» ядра, когда совершенно недоступные ранее дроби вдруг превращаются в простеньки скучные примерчики, к тому же, решаемые со скоростью «одно действие в минуту».

Однако, читатель, не забывайте, что в этой книге я даю лишь **самый необходимый минимум дидактического материала**, относящегося к дробям (правда, со всей необходимой техникой). Поэтому, вы должны озаботиться нужными упражнениями, подобрав их из учебников и дидактических материалов к учебникам.

Но если вы серьёзно проработали всё предыдущее, то у вас не возникнет никаких проблем с подбором материала, тем более, что в этом разделе его понадобится не так уж и много.

Умножение дробей

Сейчас я покажу, как, **экспериментальным путём**, получается известное правило умножения дробей: числитель умножить на числитель и знаменатель — на знаменатель. Имеет смысл обязательно разбирать его, начиная с 7-го класса.

Пример взят из учебника Математика-4 [9, с. 205].

Мы знаем формулу площади прямоугольника: $S = a \cdot b$ (длину a умножить на ширину b), рис. 19.

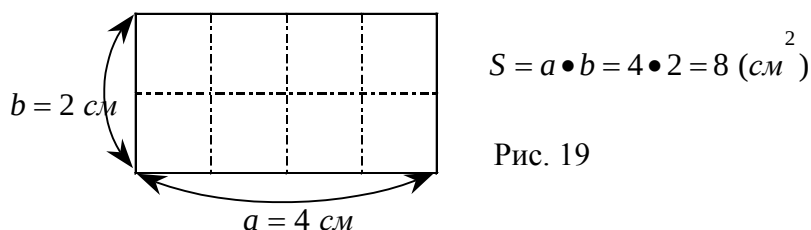


Рис. 19

На рис. 20 квадрат со стороной в 1 дециметр разбит на 12 одинаковых прямоугольников (частей, долей). Длина и ширина квадрата разделены, соответственно, на 3 и 4 части.

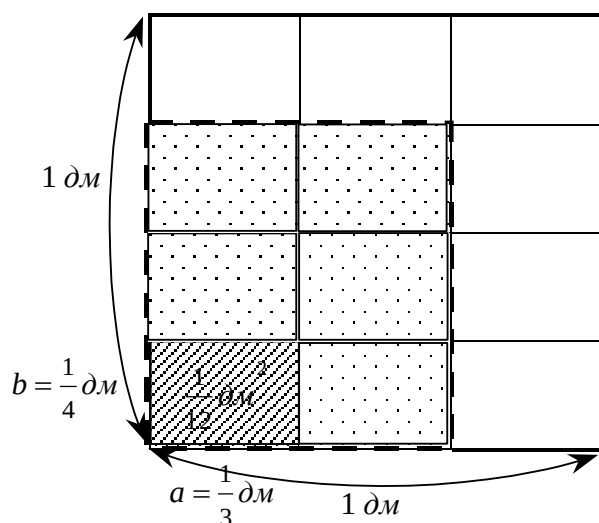


Рис. 20

Так как квадрат разделён на 12 равных прямоугольников, а площадь квадрата равна 1 дм^2 ($S = 1 \text{ дм} \cdot 1 \text{ дм} = 1 \text{ дм}^2$), то площадь **одного** маленького прямоугольника равна $\frac{1}{12} \text{ дм}^2$ (**по смыслу дроби**: разделили 1 целый квадрат на 12 равных частей и взяли 1 часть). Но стороны этого прямоугольника: $a = \frac{1}{3} \text{ дм}$ и $b = \frac{1}{4} \text{ дм}$.

Видим, что если воспользоваться формулой площади $S = a \cdot b$ и **отдельно перемножить** числители и знаменатели дробей, то как раз и получим $S = a \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} (\text{дм}^2)$.

Усилим наш пример.

На рис. 20 выделены 6 прямоугольников из 12. **По смыслу дроби** (разделили 1 целый квадрат на 12 равных частей и взяли 6 частей), площадь получившегося из них большего прямоугольника (выделен рамкой) равна $\frac{6}{12} \text{ дм}^2$. Это с одной стороны. А с другой стороны, основание этого прямоугольника (нижняя сторона) $a' = \frac{2}{3} \text{ дм}$ и высота (боковая сторона) $b' = \frac{3}{4} \text{ дм}$.

И опять **видим**, что если **перемножим отдельно** числители и знаменатели дробей a' и b' , то получим как раз величину, равную $\frac{6}{12}$: $S = a' \cdot b' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} (\text{дм}^2)$.

Вот из такого простенького эксперимента и получается правило умножения дробей, которое в буквах записывается так:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

а словесно, коротко, запоминается: **чтобы умножить дробь на дробь, надо отдельно перемножить числители и отдельно — знаменатели дробей-множителей.**

И, конечно же, как и для натуральных чисел, верны равенства:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b} \cdot 0 = 0.$$

Ограничусь записью нескольких примеров. **Практику вы наращиваете сами.**

Примеры.

$$\begin{aligned}
 1) \frac{4}{9} \bullet \frac{2}{9} &= \left(\frac{4 \bullet 2}{9 \bullet 9} \right) = \frac{8}{81}; & 2) \frac{4}{9} \bullet \frac{9}{5} &= \left(\frac{4 \bullet \cancel{9}^1}{\cancel{9}_1 \bullet 5} \right) = \frac{4}{5}; & 3) \frac{\cancel{7}^1}{\cancel{7}_1} \bullet \frac{7}{5} &= \frac{7}{5}; & 4) 7 \bullet \frac{2}{3} &= \left(\frac{7}{1} \bullet \frac{2}{3} \right) = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}; \\
 5) \frac{5}{\cancel{1}_1} \bullet \cancel{12}^2 &= \left(\frac{10}{1} \right) = 10; & 6) 4 \frac{1}{5} \bullet \frac{5}{14} &= \frac{\cancel{4}^3 \bullet \cancel{5}^1}{\cancel{5}_1 \bullet \cancel{14}_2} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}; & 7) 3 \frac{2}{5} \bullet 2 \frac{1}{17} &= \frac{\cancel{3}^1 \bullet \cancel{35}^7}{\cancel{5}_1 \bullet \cancel{17}_1} = 7.
 \end{aligned}$$

Разбор примеров.

В примерах 1)–2) средняя часть равенства взята в скобки потому, что в дальнейшем, после небольшой практики, дроби-множители сразу перемножаются, без записи на одной дробной черте.

В примерах 2)–3) существенны два момента. **Во-первых**, если видим, что можем сократить, — **мгновенно сокращаем**. **Ничего хуже** нельзя придумать, как перемножить числители и знаменатели, а потом сокращать:

$\frac{4}{9} \bullet \frac{9}{5} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$. Спрашивается, зачем умножать, если у нас есть готовые множители для сокращения! Но гораздо важнее то, что лишний, ненужный, т.е. глупый счёт — источник ошибок. А если, к тому же, числители и знаменатели — дву- трёхзначные числа!

Во-вторых, обратите внимание ребёнка на пример 3). В большинстве случаев, показывая этот пример и спрашивая — можно ли сократить? — получаем ответ, что сокращение невозможно, потому что **множители — 9** расположены «не крест на крест», (как в примере 2). Такой ответ является свидетельством того, что сокращение, как деление на одно и то же число, «схвачено» формально. В таком случае **мгновенно спросите**: «А что такое сокращение (**основное свойство дроби**)?.. Сократить, значит **разделить на одно и то же число** и числитель, и знаменатель. Смотри, $\frac{9:9}{9:9}$ — можем разделить числитель и знаменатель на од-

но и то же число?.. Разумеется. Так можем в нашем примере $\frac{9}{9} \bullet \frac{7}{5}$ сократить на 9? — Конечно же, можем!».

В примере 4) мы только вначале пишем так, как в скобках, **напоминая** ребёнку, что натуральное число — это ещё и дробь ($7 = \frac{7}{1}$), а значит, можно пользоваться правилом умножения дробей.

Внимание!

В дальнейшем, **как можно скорее** постарайтесь приучить ребёнка умножать **без этого промежуточного звена**, т.е. нужно сразу писать: $7 \bullet \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$!

Это обусловлено тем, что дети, привыкнув писать $\frac{7}{1} \bullet \frac{5}{1}$, впоследствии часто просто **не видят** ни умножения, ни сокращения, как, например, в примере 5) — в нём я не стал писать $\frac{5 \bullet 12}{6 \bullet 1}$.

В примере 5) $\frac{10}{1}$ — только как пояснение.

В примерах 6–7), во-первых, нужно напомнить ребёнку, что смешанная дробь — это сумма ($4\frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{5}$), и чтобы умножить смешанную дробь по правилу умножения дробей, её нужно превратить в неправильную дробь.

Во-вторых, нужно стараться приучить ребёнка записывать числители и знаменатели дробей так, как у меня, **на одной дробной черте**.

В-третьих, при записи **на одной** дробной черте, следите за тем, чтобы **сначала** записывалась первая дробь-множитель, **затем** — вторая, а не так, как это часто бывает: сначала числители обеих дробей, потом — знаменатели.

Внимание.

Множители, остающиеся после сокращения, записываем чётко, с пробелами, «не наполняя» на сокращаемые дроби. Перемножая их, — «считаем ручкой», а «не глазами».

Умножение натурального числа на смешанную дробь

Этот пункт является полезным техническим приёмом, поскольку можно отдельно умножить число на целую и дробные части смешанной дроби, **не переводя её в неправильную**, как обычно делается. Тем самым, мы избавляемся **от лишних** умножений, сложений и делений (сокращений).

Нам известен распределительный закон умножения: $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$. Вот его-то мы и используем.

Пример.

$$5 \cdot 7\frac{2}{15} = 5 \cdot (7 + \frac{2}{15}) = 5 \cdot 7 + \cancel{5}^1 \cdot \frac{2}{\cancel{15}_3} = 35 + \frac{2}{3} = 35\frac{2}{3}.$$

Видим, что, благодаря распределительному закону, мы умножаем число 5 **отдельно** на целую часть 7 и **отдельно** на дробную часть $\frac{2}{15}$ дроби $7\frac{2}{15}$. Разумеется, раз можем сокращать, то сразу и сокращаем дробную часть при умножении — $5 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{3}$.

Покажите ребёнку этот пример и скажите: «А если бы мы шли стандартным путём, т.е. смешанную дробь $7\frac{2}{15}$ превращали в неправильную? Смотри: $15 \cdot 7 = 70 + 35 = 105$; $105 + 2 = 107$; $5 \cdot 107 = 535$; $535 : 15 = ?$.. Видишь, какая **гигантская лишняя вычислительная работа**! А деление вообще придётся делать письменно. Считаем, считаем, считаем... — и на каждом шаге можем ошибиться! **А сколько усилий тратим на этот глупый счёт!**.. Так что, стоит научиться умножать наиболее лёгким и безопасным способом?».

Примеры.

$$1) 2\frac{1}{3} \cdot 2; 2) 5 \cdot 3\frac{1}{7}; 3) 3 \cdot 21\frac{1}{4}; 4) 2\frac{2}{15} \cdot 5; 5) 4 \cdot 8\frac{1}{8}; 6) 11\frac{1}{3} \cdot 9; 7) 3 \cdot 7\frac{2}{3}; 8) 2\frac{3}{5} \cdot 6; 9) 36 \cdot 2\frac{5}{72}.$$

Ответы к примерам.

$$1) 2\frac{1}{3} \cdot 2 = 4\frac{2}{3}; 2) 5 \cdot 3\frac{1}{7} = 15\frac{5}{7}; 3) 3 \cdot 21\frac{1}{4} = 63\frac{3}{4};$$

Решения примеров 1)–3) очевидны и ярко демонстрируют, насколько удобно и легко умножать, пользуясь распределительным законом.

$$4) 2\frac{2}{15} \cdot 5 = 10 + \frac{2 \cdot \cancel{5}^1}{\cancel{15}_3} = 10\frac{1}{3}; 5) 4 \cdot 8\frac{1}{8} = 32 + \frac{\cancel{4}^1 \cdot 1}{\cancel{8}_2} = 32\frac{1}{2};$$

В решениях примеров 4)–5) показаны сокращения. В дальнейшем можно записывать без знака сложения, но вначале лучше в виде суммы целой и дробной частей.

$$6) 11\frac{1}{3} \bullet 9 = 99 + \frac{1 \cdot \cancel{9}^3}{\cancel{3}_1} = 99 + 3 = 102; \quad 7) 3 \bullet 7\frac{2}{3} = 21 + \frac{\cancel{3}^1 \cdot 2}{\cancel{3}_1} = 21 + 2 = 23;$$

В решениях примеров 6)–7) умножение на дробную часть — **не в уме**, записывать обязательно.

$$8) 2\frac{3}{5} \bullet 6 = 12 + \frac{3 \cdot 6}{5} = 12 + \frac{18}{5} = 12 + 3\frac{3}{5} = 15\frac{3}{5};$$

$$9) 36 \bullet 2\frac{5}{72} = 72 + \frac{\cancel{36}^1 \cdot 5}{\cancel{72}_2} = 72 + \frac{5}{2} = 72 + 2\frac{1}{2} = 74\frac{1}{2}.$$

В решениях примеров 8)–9) — выделение целой части.

Совместные действия сложения, вычитания и умножения дробей

Примеры на указанные совместные действия **лучше выполнять по действиям**, а не сплошной вычислительной цепочкой.

Приведу два примера: первый из них будет выполнен вычислительной цепочкой равенств (такое задание носит название «**найти значение выражения**»), второй — по действиям.

Пример 1.

$$(6\frac{1}{8} \bullet 1\frac{2}{7} - 2\frac{11}{14} \bullet 1\frac{8}{13}) \bullet 1\frac{3}{5} = 5\frac{2}{5}$$

Решение вычислительной цепочкой:

$$\begin{aligned} (6\frac{1}{8} \bullet 1\frac{2}{7} - 2\frac{11}{14} \bullet 1\frac{8}{13}) \bullet 1\frac{3}{5} &= (\frac{\cancel{49}^7 \cdot 9}{8 \cdot \cancel{7}_1} - \frac{\cancel{39}^3 \cdot \cancel{21}^3}{\cancel{14}_2 \cdot \cancel{13}_1}) \bullet \frac{8}{5} = (\frac{63}{8} - \frac{9}{2}) \bullet \frac{8}{5} = \\ &= (7\frac{7}{8} - 4\frac{1}{2}) \bullet \frac{8}{5} = 3\frac{7-4}{8} \bullet \frac{8}{5} = 3\frac{3}{8} \bullet \frac{8}{5} = \frac{27 \cdot \cancel{8}^1}{\cancel{8}_1 \cdot 5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Видим, что множитель $1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ приходится переписывать лишних 4 раза.

Пример 2.

$$(2\frac{7}{15} + 1\frac{7}{12}) \bullet 1\frac{1}{9} - 1\frac{7}{8} = 2\frac{5}{8}.$$

Решение по действиям:

$$1) 2\frac{7}{15} + 1\frac{7}{12} = 3\frac{28+35}{60} = 3\frac{63}{60} = 4\frac{3}{60} = \boxed{4\frac{1}{20}};$$

$$2) 4\frac{1}{20} \bullet 1\frac{1}{9} = \frac{\cancel{4}^9 \cdot \cancel{10}^1}{\cancel{20}_2 \cdot \cancel{9}_1} = \frac{9}{2} = \boxed{4\frac{1}{2}};$$

$$3) 4\frac{1}{2} - 1\frac{7}{8} = 3\frac{4}{8} - \frac{7}{8} = 2\frac{12-7}{8} = \boxed{2\frac{5}{8}}.$$

Если бы делали сплошной вычислительной цепочкой, то видим, что **пока доберёмся до второго действия, нужно будет 3 раза лишних переписать множитель $1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. А пока доберёмся до третьего действия, нужно будет целых 7 раз лишних переписать слагаемое $1\frac{7}{8}$. Лишняя писанина, как мы знаем, — источник ошибок.**

Помимо лишней писанины, работая по действиям, мы сосредоточиваемся на одном действии, и, тем самым, выполняем его и быстрее, и грамотнее за счёт наработанного ранее **автоматизма вычислений**.

Внимание!

Приучите ребёнка обводить промежуточные результаты квадратиками, как у меня. Эта **важная «мелочь»** позволяет «**не рыскать**» глазами по тексту решения, а сразу сосредоточиться на нужном. Чем больше промежуточных действий, тем важнее выделять промежуточные результаты.



Деление дробей

«Деления мы не знаем!» — ключевая фраза этого пункта.

Прежде чем выводить правило деления дробей, нам понадобится понятие «**взаимно обратные числа**».

«**Перевернём**» дробь $\frac{3}{4}$, т.е. поменяем местами числитель и знаменатель. Получим дробь

$\frac{4}{3}$. Дробь $\frac{4}{3}$ называется **обратной** к дроби $\frac{3}{4}$, а дробь $\frac{3}{4}$, соответственно, **обратна** к дроби

$\frac{4}{3}$. Такие дроби называются **взаимно обратными**. Точнее, два числа называются **взаимно обратными**, если их **произведение** равно единице:

$$\frac{3}{4} \bullet \frac{4}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \bullet \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \bullet \underset{1}{\cancel{3}}} = 1.$$

Примеры взаимно обратных дробей:

$$\frac{5}{7} \text{ и } \frac{7}{5}; 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ и } \frac{3}{7}; 3 = \frac{3}{1} \text{ и } \frac{1}{3}.$$

Эти дроби взаимно обратные, т.к. их произведение равно единице:

$$\frac{5}{7} \bullet \frac{7}{5} = 1; 2\frac{1}{3} \bullet \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \bullet \frac{3}{7} = 1; 3 \bullet \frac{1}{3} = \frac{3}{1} \bullet \frac{1}{3} = 1.$$

Теперь можем заняться выводом правила деления дробей. Вспомним определение действия деления (п. Деление, несколько слов вначале: умножение/деление, глава II): **разделить — найти неизвестный множитель**. Например, $6 : 2 = \frac{6}{2} = x \Leftrightarrow 6 = x \bullet 2$.

Пусть мы хотим разделить дробь $\frac{8}{9}$ на дробь $\frac{2}{3}$. Запишем по определению действия деления:

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = x \Leftrightarrow \frac{8}{9} = x \bullet \frac{2}{3}.$$

Умножим **обе части** последнего равенства **на одно и то же число** — на дробь $\frac{3}{2}$, обратную к $\frac{2}{3}$:

$$\frac{3}{2} \bullet \frac{8}{9} = x \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \bullet \frac{8}{9} = x.$$

Видим, что мы нашли **неизвестный множитель x** , а значит, — **по определению!** — **разделили $\frac{8}{9}$ на $\frac{2}{3}$** .

Видим: чтобы разделить одну дробь — делимое на другую дробь — делитель, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

В буквах правило деления запишем так:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}.$$

Примеры.

$$1) \frac{5}{7} : \frac{10}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 9}{7 \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{9}{14};$$

$$2) 2\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{8}{3} : \frac{4}{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot 5}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3};$$

$$3) 4\frac{5}{7} : 3\frac{2}{3} = \frac{33}{7} : \frac{11}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{33}} \cdot 3}{7 \cdot \underset{1}{\cancel{11}}} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7};$$

$$4) 3 : \frac{7}{9} = \left(\frac{3}{1} : \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 9}{1 \cdot 7} \right) = \frac{3 \cdot 9}{7} = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7};$$

$$5) \frac{9}{7} : 3 = \left(\frac{9}{7} : \frac{3}{1} = \frac{9 \cdot 1}{7 \cdot 3} \right) = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{7 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{3}{7}.$$

Показывая ручкой на пример, спрашивайте: «Что на что надо умножить?»

Внимание!

В примере 2) деление $\frac{8}{3} : \frac{4}{5}$ — как пояснение, сразу переводим в умножение $\frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4}$.

В примере 3) сначала обязательно перевести смешанные дроби в неправильные и записать их со знаком деления, и только потом «перевернуть» дробь-делитель и записать со знаком умножения.

Категорически запрещайте переводить смешанную дробь-делитель в неправильную и одновременно «переворачивать» делитель.

В примерах 4)–5) в скобках, как пояснение, показана запись натурального числа в виде дроби. Вначале нужно расписать несколько примеров подробно, а затем, настаивать на записи короткого решения ($3 : \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 9}{7}$; $\frac{9}{7} : 3 = \frac{9}{7 \cdot 3}$).

Приведу несколько примеров с решениями, аналогичных примерам 4)–5):

$$1) \frac{17}{14} : 17 = \left(\frac{17}{14} \cdot \frac{1}{17} \right) = \frac{\overset{1}{\cancel{17}}}{14 \cdot \underset{1}{\cancel{17}}} = \frac{1}{14};$$

$$2) \frac{11}{9} : 9 = \left(\frac{11}{9} \cdot \frac{1}{9} \right) = \frac{11}{9 \cdot 9} = \frac{11}{81};$$

$$3) 5 : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2};$$

$$4) 1 : \frac{7}{4} = \left(1 \cdot \frac{4}{7} \right) = \frac{4}{7};$$

$$5) 25 : \frac{5}{11} = \overset{5}{\cancel{25}} \cdot \frac{11}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \left(\frac{55}{1} \right) = 55.$$

Обратите внимание на примеры 1) и 2) — внешне они почти одинаковы. Конечно, в дальнейшем нужно писать краткое решение, без среднего звена в скобках. Но вначале, обычно, в примере 2) допускается ошибка — пытаются сократить на 9, буквально, не видят знака деления. В этом случае нужно мгновенно спросить: «На что нужно умножить, на 9

или $\frac{1}{9}$?» — и тут же перевести деление в умножение, т.е. написать $\frac{11}{9} : \frac{9}{1} = \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{9}$, чтобы ре-

бёнок за натуральным числом увидел дробь $9 = \frac{9}{1}$.

В примерах 3)–5) — обязательно записывать деление в виде умножения!

Практику деления дробей вы наращиваете сами.

Деление смешанной дроби на натуральное число

Как и при умножении натурального числа на смешанную дробь, этот пункт является полезным техническим приёмом, позволяющим разделить смешанную дробь, **не переводя её в неправильную**.

Пример.

$$6\frac{2}{7} : 2 = (6 + \frac{2}{7}) : 2 = 6 : 2 + \frac{2}{7} : 2 = 3 + \frac{\cancel{2}}{7 \cdot \cancel{2}_1} = 3 + \frac{1}{7} = 3\frac{1}{7}.$$

Видим, что если можем отдельно разделить целую часть смешанной дроби, то не стоит переводить её в неправильную. Особенно ценна возможность такого деления при больших целых частях и больших, «неудобных» для устного умножения знаменателях.

Примеры с решениями.

$$\begin{aligned} 1) 8\frac{4}{9} : 4 &= 2 \frac{\cancel{4}}{9 \cdot \cancel{4}_1} = 2\frac{1}{9}; & 2) 30\frac{6}{7} : 6 &= 5 \frac{\cancel{6}}{7 \cdot \cancel{6}_1} = 5\frac{1}{7}; & 3) 45\frac{15}{17} : 3 &= 15 \frac{\cancel{15}}{17 \cdot \cancel{3}_1} = 15\frac{5}{17}; \\ 4) 100\frac{25}{51} : 5 &= 20 \frac{\cancel{25}}{51 \cdot \cancel{5}_1} = 20\frac{5}{51}; & 5) 36\frac{12}{19} : 12 &= 3 \frac{\cancel{12}}{19 \cdot \cancel{12}_1} = 3\frac{1}{19}. \end{aligned}$$

Стоит показать ребёнку пример «глупого» деления «в лоб», с переводом смешанной дроби в неправильную:

$$45\frac{15}{17} : 3 = \frac{45 \cdot 17 + 15}{17} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\cancel{260}^{260}}{17} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{260}{17} = 15\frac{5}{17}.$$

Ненужные умножения и деления ($45 \cdot 17$, $780 : 3$, $260 : 17$), к тому же письменно — очевидны.

Совместные действия сложения, вычитания, умножения и деления

Если вы, читатель, отработали с ребёнком умножение и деление дробей (не ограничиваясь только моими примерами), то нужно потратить всего лишь одно-два занятия на работу со всеми четырьмя арифметическими действиями.

При этом **обязательно скажите ребёнку, что арифметика — это самая утомительная и тяжёлая работа в математике!**

Я приведу полное решение трёх примеров по действиям, а вы — добавьте ещё несколько своих.

$$1) 4\frac{1}{6} + (2\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6}) : 2\frac{4}{5} - \frac{3}{5} : 2\frac{2}{5} = 4\frac{1}{8}.$$

$$1) 2\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6} = \frac{9-2}{12} = \boxed{\frac{7}{12}};$$

$$2) \frac{7}{12} : 2\frac{4}{5} = \frac{7}{12} : \frac{14}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot 5}{12 \cdot \underset{2}{\cancel{14}}} = \boxed{\frac{5}{24}};$$

$$3) 4\frac{\overset{4}{1}}{6} + \frac{5}{24} = 4\frac{4+5}{24} = 4\frac{\overset{3}{9}}{24} = \boxed{4\frac{3}{8}};$$

$$4) \frac{3}{5} : 2\frac{2}{5} = \frac{3}{5} : \frac{12}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{4}{\cancel{12}}} = \boxed{\frac{1}{4}};$$

$$5) 4\frac{3}{8} - \frac{\overset{2}{1}}{4} = 4\frac{3-2}{8} = \boxed{4\frac{1}{8}}.$$

Внимание!

Посмотрите **на расстановку действий**, читатель (вверху). Если следовать формальным правилам (сначала действия в скобках, потом — умножение и деление, и лишь в конце — сложение и вычитание), то третьим действием мы должны были бы выбрать деление $\frac{3}{5} : 2\frac{2}{5}$,

а четвёртым — сложение $4\frac{1}{6} +$ результат второго действия (расстановка действий внизу).

Однако старшекласснику стоит пояснить, что поскольку мы после второго действия получаем число — готовое слагаемое $\frac{5}{24}$, то уже можем сложить его с $4\frac{1}{6}$. Выгода та, что все три действия при решении будут идти подряд, неразрывно.

Замечу, что **на начальном этапе обучения** (5–6 классы) такую расстановку действий **проводить не стоит**, чтобы не вносить путаницы в неустоявшуюся технику или же делать это очень осторожно, следя за пониманием ребёнком **смысла** своих действий.

Промежуточные результаты, разумеется, обводим рамкой.

$$2) \overset{\textcircled{2}}{3}\overset{\textcircled{1}}{\frac{1}{8}} : (\overset{\textcircled{5}}{5}\overset{\textcircled{1}}{\frac{5}{12}} - \overset{\textcircled{5}}{3}\overset{\textcircled{1}}{\frac{13}{24}}) + (\overset{\textcircled{3}}{3}\overset{\textcircled{2}}{\frac{1}{18}} - \overset{\textcircled{4}}{2}\overset{\textcircled{4}}{\frac{7}{12}}) \cdot \overset{\textcircled{4}}{1}\overset{\textcircled{4}}{\frac{10}{17}} = 2\overset{\textcircled{5}}{\frac{5}{12}}.$$

$$1) 5\frac{\overset{2}{5}}{12} - 3\frac{13}{24} = 2\frac{10}{24} - \frac{13}{24} = 1\frac{34-13}{24} = 1\frac{\overset{3}{21}}{24} = \boxed{1\frac{7}{8}};$$

$$2) \frac{1}{8} : 1\frac{7}{8} = \frac{25}{8} : \frac{15}{8} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{5}{3} = \boxed{1\frac{2}{3}};$$

$$3) 3\frac{\overset{2}{1}}{18} - 2\frac{\overset{3}{7}}{12} = 1\frac{2}{36} - \frac{21}{36} = \frac{38-21}{36} = \boxed{\frac{17}{36}};$$

$$4) \frac{17}{36} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{17}}}{1}\overset{\overset{3}{\cancel{36}}}{\frac{10}{17}} = \frac{\overset{1}{\cancel{17}} \cdot \overset{3}{\cancel{36}}}{\underset{4}{\cancel{36}} \cdot \underset{1}{\cancel{17}}} = \boxed{\frac{3}{4}};$$

$$5) 1\frac{\overset{4}{2}}{3} + \frac{\overset{3}{3}}{4} = 1\frac{8+9}{12} = 1\frac{17}{12} = \boxed{2\frac{5}{12}}.$$

Ещё раз **обратите внимание** на нестандартную расстановку действий (вверху) и её отличие от стандартной (внизу). Бросается в глаза, как придётся «рыскать» по тексту решения при стандартной расстановке действий.

Напоминаю, что промежуточные результаты обводим рамкой.

Видим, что в итоге всего этого — **очень легко работать**: результаты рядом расположенных действий тоже оказываются рядом, а рамки чётко выделяют именно то, что нужно. Никакого хаоса, никаких метаний туда-сюда по тексту примера, и на выходе — стройная вычислительная запись, легко реализованная и — **самое главное!** — легко поддающаяся проверке.

$$3) \left(6\frac{\overset{①}{5}}{\underset{①}{6}} - 4\frac{\overset{②}{7}}{\underset{③}{8}}\right) \cdot 3\frac{\overset{④}{3}}{\underset{④}{4}} \cdot \left(\frac{\overset{③}{19}}{\underset{②}{20}} - \frac{\overset{⑤}{13}}{\underset{②}{18}}\right) \cdot 28\frac{4}{41} = 47.$$

$$1) 6\frac{\overset{4}{5}}{\underset{6}{6}} - 4\frac{\overset{3}{7}}{\underset{8}{8}} = 2\frac{20}{24} - \frac{21}{24} = 1\frac{44-21}{24} = \boxed{1\frac{23}{24}};$$

$$2) 1\frac{23}{24} \cdot 3\frac{3}{4} = \frac{47 \cdot \overset{5}{15}}{\underset{8}{24} \cdot 4} = \boxed{\frac{47 \cdot 5}{8 \cdot 4}};$$

$$3) \frac{\overset{9}{19}}{\underset{20}{20}} - \frac{\overset{10}{13}}{\underset{18}{18}} = \frac{171-130}{180} = \boxed{\frac{41}{180}};$$

Горизонтальные «поля» для письменных вычислений — отчёркиваем.

$$20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5, \quad \text{НОК}(20, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2^2 \cdot 5) \cdot 3^2 = 20 \cdot 9 = 180.$$

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2.$$

$$4) \frac{47 \cdot \overset{1}{5}}{\underset{8 \cdot 4}{8 \cdot 4}} \cdot \frac{41}{\underset{180}{36}} = \boxed{\frac{47 \cdot 41}{8 \cdot 4 \cdot 36}};$$

$$5) \frac{47 \cdot 41}{8 \cdot 4 \cdot 36} \cdot 28\frac{4}{41} = \frac{47 \cdot \overset{1}{41}}{\underset{1}{8 \cdot 4 \cdot 36}} \cdot \frac{\overset{36}{1152}}{\underset{1}{41}} = \frac{47 \cdot \overset{1}{36}}{\underset{1}{36}} = \boxed{47}.$$

Нестандартная расстановка действий (вверху) — из соображений удобства их выполнения.

Внимание!

Посмотрите на запись результатов **второго и четвёртого действий**. Если следовать шаблону, то мы должны были бы, например, во втором действии перемножить множители числителя и знаменателя, получив дробь $\frac{235}{32}$, да ещё, чего доброго, выделить целую часть.

Но если мы **не просто считаем** «абы как», а **прогнозируем свои действия**, то заранее **видим**, что результат второго действия будет **умножаться** на результат третьего действия. А при умножении как правило идут сокращения. А для сокращений нам нужно **видеть**, какие **множители** «сидят внутри» числа.

Так зачем я буду избавляться от уже готовых множителей, а тем более — выделять целую часть из $\frac{235}{32} = 7\frac{11}{32}$, если для умножения в четвёртом действии мне придётся дробь $7\frac{11}{32}$ сно-

ва превращать в неправильную дробь $\frac{235}{32}$ и думать о том, какие множители «сидят внутри» чисел 235 и 32!

По тем же соображениям — **облегчить себе жизнь**, — оставляем в виде разложения на множители и результат четвертого действия.

Обязательно разберите с ребёнком этот пример и покажите ему, как мы избавляемся от ненужной и хлопотной **работы** в четвертом и пятом действиях.

Последнее, о чём следует сказать — это о сокращении в пятом действии сразу на $8 \bullet 4 = 32$. Да, об этом нужно догадаться, но это совсем не означает, что потребна какая-то необыкновенная интуиция. Просто видя большое число 1152 уж **очень не хочется** делить на два или четыре. Интуиция, точнее, наше нежелание лишней работы, «умная лень», говорит нам, что должно же исчезнуть большое число. Поэтому, не испробовать ли нам деление сразу на 32 (вручную, или на калькуляторе, **когда калькулятор будет разрешён**)? — Что тотчас и оправдывает наши ожидания.

Из того, что 1152 по признаку делимости делится на 9, можно было бы не менее успешно сократить сразу на 36. Ведь нам **очень хочется** покончить с 1152 одним махом!

Так что, как видите, читатель, «суперинтуиция» нам действительно не понадобилась.



Ещё немного о дробях

В самом начале главы III (п. Немного о дробях) вы, читатель, познакомились с двумя сторонами дроби: дробь как **безразмерная часть** целого и дробь как **«размерная» величина содержимого части** целого.

Займёмся связью обеих сторон дроби.

Когда речь идёт о **части**, то обязательно есть и **целое** — то, от чего берётся соответствующая часть.

Часты задачи, когда, зная целое, нужно уметь находить его часть, указанную соответствующей дробью, и, наоборот, по известной части «восстанавливать» целое. Формулируются эти задачи так:

1. Найти дробь (часть) от числа — прямая задача.
2. Найти число по его части (дроби) — обратная задача.

Прямая задача.

Задача 1.

В ящике было 20 **яблок**. Достали $\frac{1}{4}$ **часть** всех яблок. Сколько **яблок** вынули из ящика?

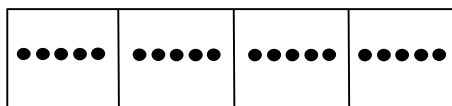
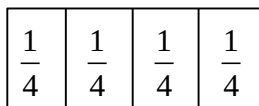


Рис. 21, а

Рис. 21, б

Видим (рис. 21, а), ящик разбит на 4 равные части и каждая часть составляет $\frac{1}{4}$ долю ящика.

Видим (рис. 21, б), каждый малый ящик (**каждая одна четвёртая**) содержит 5 яблок.

Задача решена: достав $\frac{1}{4}$ часть всех яблок, мы, тем самым, вынули из ящика 5 яблок.

Арифметически, по смыслу дроби и деления на равные части, задача решается делением: $20 \text{ я(блок)} : 4 = 5 \text{ я(блок)}$ в **каждой** одной четвёртой. Будем отчётливо понимать, что мы **нашли содержимое дроби** (одной четвёртой).

Задача 2.

В ящике было 20 **яблок**. Достали $\frac{3}{4}$ **часть** всех яблок. Сколько **яблок** вынули из ящика?

Раз в **каждой** одной четвёртой ящика содержится 5 яблок, то в **трёх четвёртых** содержится: $5 \text{ я(блок)} \cdot 3 = 15 \text{ я(блок)}$. И опять мы **нашли содержимое дроби**.

Однако, **арифметически** обе задачи **решаются умножением дроби на число**. Для задачи 2 это выглядит так: $\frac{3}{4} \cdot 20 \text{ я(блок)} = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15 \text{ я(блок)}$ и при этом получаем **содержимое дроби**.

$\frac{3}{4}$ — **безразмерная дробь**, число 20 (яблок) — это **В(сего)**, «размерное» содержимое целого.

А теперь, читатель, я напишу формулу:

$D \cdot B = CD$	D — дробь (безразмерная величина), B — всего, <u>содержимое целого</u> («размерная» величина), CD — <u>содержимое дроби</u> («размерная» величина).
------------------	--

Формула совершенно прозрачна. Но, несмотря на внешнюю простоту, она крайне облегчает решение упомянутых выше задач. Практика показывает, что **основной проблемой**, является понимание **принципиального различия** между дробью — безразмерной величиной и содержимым дроби — «размерной» величиной. И наша формула, чётко разделяя две стороны дроби, позволяет ребёнку отчётливо видеть **безразмерную и размерную составляющие дроби, а не просто числа.**

Остаётся добавить, что, поскольку десятичная дробь есть частный случай обыкновенной, например, $0,3 = \frac{3}{10}$ и проценты — тоже частный случай обыкновенной дроби (по определению $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$), например, $3\% = \frac{3}{100}$, то при решении задач на нахождение дроби от числа мы не будем испытывать никаких затруднений вне зависимости от того, **в какой форме** дана дробь — обыкновенная, десятичная или в форме процентов. Приведу несколько примеров.

Задача 3.

В книге было 60 **страниц**. Прочитали $\frac{3}{10}$ книги (или **0,3** книги, или **30%** книги). Сколько **страниц** прочитано?

Сразу видим, что задача на нахождение дроби от числа, т. к. $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$ — это дробь, безразмерная часть целого; 60 страниц — это **В(сего)** — **содержимое целого**, «размерная» величина. Найти надо **число страниц**, соответствующих дроби $\frac{3}{10}$, т. е. **содержимое** этой дроби, «размерную» величину.

Не раздумывая, пишем формулу: $Д \cdot В = СД$. Нам остаётся только по тексту выделить, что; — есть **Д(робь)**, что; — есть **В(сего)** и что; — есть **СД (содержимое дроби)**. Впрочем, я это уже сделал. Подставим в формулу числовые данные и посчитаем.

Прямая задача — дробь от числа
$Д \cdot В = СД$
$\frac{3}{10} \cdot 60(с) = СД$
или арифметически: $0,3 \cdot 60 = 18(с)$

Внимание.

Если встречаем проценты — мгновенно превращаем их в десятичную или обыкновенную дробь (как удобнее).

«Размерность» поначалу обязательно пишем — **с(траницы)**, чтобы закрепить чёткое различие между **В(сего)** и **СД (содержимое дроби)** как «размерными» величинами, и **Д(робью)** как безразмерной величиной.

Формулу пишем обязательно, и прямо под нею подписываем числовые данные.

Обратная задача.

Задача 4.

Прочитано 18 **страниц**, что составляет **0,3** (или $\frac{3}{10}$, или 30%) всей книги. Сколько **страниц** в книге?

По-прежнему, я выделяю в тексте безразмерную дробь и «размерные» величины. Так как, исходя из формулы, мы знаем, что именно должны выявить, то легко видим: $D = 0,3$; $CD = 18$ с.; $B_C = ?$ Остаётся подставить числовые данные и решить простейшее уравнение.

Обратная задача — число по дроби
$D \bullet B = CD$ $0,3 \bullet B = 18(c)$ так как B - неизвестный множитель, то действие деления $B = \frac{18}{0,3} = 60(c)$ или арифметически: $\frac{18}{0,3} = 60(c)$

Приведу по три задачи из учебника Математика-5 И. В. Барановой и З. Г. Борчуговой (см. [11]). Индекс у номера задачи — это номер страницы.

Прямая задача — дробь от числа (иначе — дробь от ВСЕГО).

438₈₉ В школе 500 учащихся. Учащиеся пятых классов составляют $\frac{9}{50}$ (или 0,18; или 18%) всех учеников школы. Сколько учащихся пятых классов?

Обозначения: $B_y = 500$; $D = \frac{9}{50}$ (0,18); $CD = ?$ Ответ: $CD = 90$ у.

440₈₉ Завод должен изготовить в месяц по плану 250 приборов. Он выполнил $\frac{11}{10}$ плана (или 1,1; или выполнил план на 110%). Сколько приборов изготовил завод за месяц?

Обозначения: $B_{\Pi} = 250$; $D = \frac{11}{10}$ (1,1); $CD = ?$ Ответ: $CD = 275$ п.

443₈₉ Из молока получается $\frac{1}{4}$ (или 0,25; или 25%) сливок. Сколько сливок получится из 284 л?

Обозначения: $D = \frac{1}{4}$ (0,25); $CD = ?$; $B_{\Pi} = 284$. Ответ: $CD = 71$ л.

Обратная задача — число по дроби (иначе — ВСЕГО по дроби).

464₉₂ Масса сушёной малины составляет $\frac{3}{20}$ (или 0,15; или 15%) массы свежей малины. Сколько взяли свежей малины, если получили 3 кг сухой?

Обозначения: $D = \frac{3}{20}$ (0,15); $B_{\text{кг}} = ?$; $CD = 3$ кг. Ответ: $B = 20$ кг.

467₉₂ Сберегательная касса начисляет $\frac{1}{50}$ от первоначальной суммы вклада (или 0,02; или 2% годовых). Вкладчику в конце года начислено 17 р. Какова сумма вклада?

Обозначения: $D = \frac{1}{50}$ (0,02); $CD = 17$ руб.; $B_{\text{руб}} = ?$. Ответ: $B = 850$ р.

468₉₂ Токарь выполнил $\frac{11}{10}$ плана (или 1,1; или выполнил план на 110%), сделав 132 детали. Сколько деталей токарь должен был сделать?

Обозначения: $D = \frac{11}{10}$ (1,1); $CD = 132$ д.; $V_D = ?$ Ответ: $V = 120$ д.

Обратите внимание.

Дробь **не обязательно меньше** единицы, она может быть и больше единицы (задачи 440 и 468). Главное, мы должны чётко понимать, что именно есть **В(сего)**? В задаче 440 за фразой «... должен изготовить... по плану» — звучит «должен **ВСЕГО** изготовить». Значит, 250 приборов — это **В(сего)**. В задаче 468 за фразой «... выполнил $\frac{11}{10}$ плана или выполнил план на 110%, сделав 132 детали» — звучит «**132 детали — это 110%**, т. е. 132 детали — это **CD** (содержимое дроби).

В обратной задаче нужно научить ребёнка чётко сопоставлять **Д(робь)** и **CD** (содержимое дроби) так, как я только что сделал. Задача 464: $\frac{3}{20}$ или 15% — это 3 кг сушёной (это выражено в тексте словами о том, что масса сушёной малины — 15% (т.е. дробь). 3 кг — сухая малина).

Задача 467: 2% — это 17 р. (из текста выделяется словами: начисляет 2%... начислено 17 р.).

В дальнейшем прямая и обратные задачи будут использоваться как элемент более сложных задач, решения которых показаны в моей книге «Задача? — Это очень просто!» (п. Ещё немного о дробях, глава V).



Резюме главы III

«Знаем дроби, — знаем всё!» — этим экспериментальным фактом, являющимся отражением школьной практики преподавания математики, определяется центральное положение главы III в моей книге.

Самое существенное в главе III то, что она технологически реализует концепцию Знаниевых Ядер Математики (см. статью на моём сайте). То есть, если вы, читатель, последовательно осуществите предлагаемую программу обучения (добавив, в нужных местах, соответствующий дидактический материал), соблюдая технологию, то вы гарантированно получите «на выходе» нужный результат: перед ребёнком будут сняты принципиальные ограничения для всего дальнейшего математического образования.

Конечно, для того, чтобы ребёнок полностью реализовал открывающиеся возможности свободного грамотного счёта, необходимо будет добавить ещё десятичные дроби и отрицательные числа, работа с которыми описана в четвёртой и пятой главах книги. Однако, это будет уже всего лишь расширение технических возможностей, формирование — Б₃-зоны, третьей зоны ближайшего развития (рис. 2 статьи на сайте).

Самым тяжёлым для вас в создании знаниевого ядра ЗЯМ₂ «Дробь» будет **формирование элементов** ядра: А-зона — зона актуального развития (раздел «Элементы ЗЯМ₂»), поскольку «Ни одно понятие А-зоны, ни один технологический приём не могут быть не то что пропущены, а даже просто плохо усвоены!».

Самым ответственным — формирование «Клетки» знаниевого ядра: Б₁-зона — первая зона ближайшего развития (раздел «Клетка» знаниевого ядра ЗЯМ₂) — сложение/вычитание дробей.

Самым лёгким и вдохновляющим — формирование «Оболочки» знаниевого ядра: Б₂-зона — вторая зона ближайшего развития (раздел «Оболочка» знаниевого ядра ЗЯМ₂) — умножение/деление дробей.

Само собой разумеется, что, прежде чем заниматься с ребёнком, **вы тщательно прорабатываете материал главы с карандашом в руке!**

Важнейшими опорными точками в вашей работе с ребёнком будут служить п.п. «Внимание» и «Технологический совет». Чтобы прочувствовать их значимость (особенно, при наличии хорошей счётной техники у вас, читатель!), вы, повторюсь, должны опробовать их сами, «пощупать руками».

Важное замечание.

Именно здесь, в главе III, работая с обыкновенными дробями, вы, читатель (и ваш ребёнок), убедитесь в том, что я не зря всё время говорю **о блестящем владении таблицей умножения**. Как только ребёнок будет ошибаться в таблице умножения, мгновенно реагируйте на это с самыми разными интонациями: «**Таблица умножения!**». И тут же **выписывайте** «на полях» ошибочный пример.



Оглавление	92
Глава III	92
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ	92
Несколько слов вначале	92
Немного о дробях	92
Две стороны дроби	93
Дробь как результат деления	95
Элементы ЗЯМ₂ (знаниевое ядро математики «Дробь»)	97
Центральное понятие ядра (доли, дробь, числитель, знаменатель)	97
Правильные и неправильные дроби	99
Дроби с одинаковыми знаменателями или числителями	100
Сравнение дробей: «ближе к единице» и «по отношению к $\frac{1}{2}$ »	102
Содержательное окружение ядра (простые числа, кратное, НОК, основное свойство дроби)	106
Простые и составные числа	106
Разложение на простые множители	106
Кратное	107
НОК — наименьшее общее кратное	107
Алгоритм нахождения НОК	108
Основное свойство дроби (сокращение, приведение к новому знаменателю)	109
Сокращение дроби	111
Приведение дроби к новому знаменателю	112
Технологические приёмы и инструментарий	114
Признаки делимости на 2, 5, 10; 3, 9; 4, 25	114
Деление «уголком»	115
Разложение на простые множители	115
Технологические приёмы нахождения НОК знаменателей дробей (приведения дробей к наименьшему общему знаменателю)	116
«Клетка» знаниевого ядра ЗЯМ₂	119
Сложение и вычитание дробей	119
Сложение дробей	119
Больший знаменатель делится на меньший	121
Знаменатели взаимно простые	123
Следующее кратное большего знаменателя	125
Алгоритм нахождения НОК (разложение на простые множители)	127
Смешанные дроби	131
Выделение целой части из неправильной дроби	133
Перевод смешанной дроби в неправильную	134
Сложение смешанных дробей	135
Вычитание дробей	137
Технические приёмы вычитания	137
Вычитание правильной дроби из единицы	137
«Отщепление» единицы (вычитание правильной дроби из натурального числа)	138
Вычитание натурального числа из смешанной дроби	138
Вычитание смешанной дроби из натурального числа	139
Вычитание смешанной дроби из смешанной дроби	140
(без «отщепления» единицы)	140
Вычитание смешанной дроби из смешанной дроби	141
(с «отщеплением» единицы)	141
Совместные действия сложения и вычитания дробей	142
Резюме раздела «Клетка» знаниевого ядра ЗЯМ ₂	143
«Оболочка» знаниевого ядра ЗЯМ₂	144
Умножение и деление дробей	144
Умножение дробей	144
Умножение натурального числа на смешанную дробь	147
Совместные действия сложения, вычитания и умножения дробей	148
Деление дробей	150
Деление смешанной дроби на натуральное число	152
Совместные действия сложения, вычитания, умножения и деления	152
Ещё немного о дробях	156
Резюме главы III	160