Глава I
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Несколько слов вначале

Почти каждый человек, окончивший даже неполную среднюю школу, с легкостью решит уравнение:

$x + 2 = 5$

Он, не задумываясь, напишет:

$x = 5 - 2$

Но едва ли один из 100 **сумеет объяснить**, **почему та́к** он решил уравнение.

И — что удивительно! — столь потрясающее явление почему-то ни у кого не вызывает удивления.

Вот, если в двух словах, одно из тех зерен, из которых вырос «Графический Анализ» (ГрафАнализ), созданный автором.

Графический Анализ — это технология (не методика) решения так называемых текстовых арифметических задач.

Технология, как гласит словарь, — это совокупность знаний о способах и средствах проведения производственных процессов. Упрощенно говоря: не нужно ничего изобретать, соблюдай требования технологического процесса в отношении материалов, инструментов и способов работы, и ты гарантированно получишь нужное тебе изделие с должной мерой качества (в пределах допусков, естественно).

Таким образом, используя технологию Графического Анализа, можно **любого** ребенка очень быстро, за 25–30 занятий, научить решать не только обычные школьные, но и очень сложные задачи (например, глава II, цикл VI, задача 6 — задача в 6 действий, **только на сложение**. Школьник пятого-шестого классов сможет решить ее уже через 6–7 занятий, минут за 10, со «скоростью ручки». И к тому же, скажем так, «автоматически»).

В ГрафАнализе мы с вами будем исходить из того факта, что арифметика полностью алгоритмизируема, и что в арифметике, с точки зрения текстовых арифметических задач, есть всего лишь 14 логических элементов.

Если научить ребенка ВИДЕТЬ (в буквальном смысле слова) эти элементы, то тем самым мы научим его не просто решать, а **строить, конструировать** решение задачи. Мы не будем заставлять его думать там, где это не нужно, зато сосредоточим его внимание на действительно важном. Решая задачи технологическими приемами ГрафАнализа, он **попутно, мимоходом** (в той мере, в которой позволяет его возраст) действительно поймет, почему так решается уравнение, с которого я начал.

Но текстовые задачи хоть и составляют содержательный материал ГрафАнализа, сами по себе должны играть лишь вспомогательную роль для учителя в процессе изучения математики в начальной школе. Действительно, что за радость решать задачи, зная заранее, что мы легко нарисуем — буквально! — решение почти любой из них.

А раз задачи не будет представлять для нас никаких трудностей, а значит и интереса, мы сможем резко сократить число задач и высвободившееся время потратить на нечто другое.

Стоит добавить и то, что Графический Анализ позволяет УВИДЕТЬ — опять же, в буквальном смысле слова! — совершенно отчетливо, в чем именно состоит затруднение ребенка, какой из 14 логических элементов арифметики он не освоил. Ну, а зная причину ошибки, довольно легко ее устранить.

Весь дальнейший материал «Введения» в силу ограниченного объема книги изложен очень кратко.

Хочу только сказать, что взгляд на математику как язык — это точка зрения «прикладника», человека, пользующегося математикой как инструментом. Но я глубоко убежден, что большинству от математики нужно **немногое, но существенное**. Одиннадцатиклассник или студент-первокурсник (и его родители тоже) думают, что он никак не может понять, что такое интеграл, а на самом деле он «$-\frac{3}{2}$» не может сложить с единицей!

Анализируя в своей практической работе постоянно повторяющиеся ошибки, одни и те же «моменты непонимания» моих учеников, я вынужденно спускался — от студентов вузов и старшеклассников — все ниже и ниже, пока не оказалось, что 90, если не все 100% их проблем таится в начальной школе.

Вот здесь и проявились причины того удивительного явления, с упоминания о котором я начал эту главу. Выяснилось, что до 6-го класса в подавляющем большинстве дети просто еще не в состоянии воспринять смысл вычитания и деления — слишком высок уровень абстрагирования. И работа на языке «иксов» сводится в основном к механическому запоминанию решений простейших уравнений. Но гораздо более значимым явилось то, что большинство школьников и студентов попросту… плохо считают, не понимают смысла дроби, и опять же плохо считают, не умеют работать с отрицательными числами и … — да-да — тоже плохо считают! Почему? Видимо потому, что начальная школа как-то упускает из виду, что техника арифметических вычислений, легкая, грамотная, быстрая, лежит в основе всей дальнейшей математики. Видимо потому, что не осознается, как ни странно, основополагающая роль учителя начальной школы. Непонимание же смысла арифметических действий и плохой счет приводят к тому, что даже освоив в какой-то мере алгоритмы решений уравнений, ребенок постоянно ошибается в вычислениях или в записи решений простейших уравнений. Все чаще и чаще получает неудовлетворительные оценки. И наконец, после 7-го класса, окончательно попадает в разряд неуспевающих или слабых. Перед ним встает непреодолимая стена арифметической и алгебраической неграмотности в дальнейшем освоении математики.

Поэтому мне захотелось дать в руки учителей и родителей простой, легкодоступный и эффективный инструмент, который в процессе разработки получил название «Графический Анализ».

Попробуйте поработать этим инструментом, **но… соблюдая технологию**.

Концептуальная часть

Если взглянуть на практику преподавания математики в школе (да и в вузе), особенно на результаты этого преподавания, то складывается впечатление, что никто (в прикладном смысле), кажется, даже не задается вопросом: «**А должны ли быть *<u>слабые</u>* ученики «в математике»?**

Но прежде чем ответить на этот вопрос, читатель, выясним чуть подробнее: что такое математика и в чем заключаются традиционно известные трудности обучения ей.

«Коротко математику можно охарактеризовать как науку о числах и фигурах» — говорил известный российский математик А. И. Маркушевич [5, с. 262]. И характеристика эта почти не отличается от формулировки из «Словаря русского языка» С. И. Ожегова.

Эта краткая формулировка вам, разумеется, известна.

Не менее известно устоявшееся в широких кругах публики мнение о том, что математика доступна только тем, у кого развито так называемое абстрактное мышление, что для овладения математикой требуются якобы особые способности, что сложность ее изучения обусловлена присущей математике логической природой и сложностью самой логики.

Возьму на себя смелость сказать, что подобные убеждения — достояние отнюдь не только нашего времени, но существуют с тех самых пор, как математика еще только оформлялась как наука, т. е. со времен Вавилона и Древнего Египта.

И основания к тому были серьезные. Попробуйте, читатель, — не овладеть! — только разобраться в технике умножения и деления древних египтян: уверяю вас, слабо не покажется (особенно с нашей привычкой со школьных времен воспринимать алгоритмы деления и умножения как нечто тривиальное).

Еще в средние века четыре действия арифметики изучались в университетах. Более того, «Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна» [4, с. 47].

Так ли это?

Что касается арифметики (а именно ей посвящена эта книга, точнее, технологии решения текстовых **арифметических** задач и глубокому усвоению сути 4-х арифметических действий), то вроде бы, с одной стороны, мы с вами, читатель, знаем: в принципе, ничего сложного в ней нет. С другой стороны, вспоминается: да, было-было, если чуть посложнее, и нам — родителям — несладко. А вот детям, по-прежнему, трудно. И как нам кажется, труднее, чем в наше время.

В чем же дело? Может и в самом деле «рядовым людям премудрость эта недоступна»?

Попробуем взглянуть на математику не с точки зрения самих математиков (в отношении задач и целей ее преподавания), а с точки зрения естественников, прикладников.

Если, следуя Г. Галилею, признать: математика — это язык природы[1] — то при всей очевидной внешней простоте этого глубочайшего положения, мы придем к совершенно неожиданным выводам, крайне значимым в конкретике школьного — *именно школьного*! — преподавания математики.

Давно прошли времена, когда математика требовалась только ученым и инженерам (ну и самим математикам, разумеется). Нынче почти ни один грамотный специалист в гуманитарной области, будь то экономика, социология, психология или лингвистика и т. п. просто не в состоянии обойтись без высокой математической подготовки («элементарный матанализ» — по определению Н. Н. Лузина — в пределах двух курсов технического университета, теория вероятностей, статистические методы обработки информации ...).

Если исходить «из способностей», «из уровня абстрактного мышления», то мы должны прийти к выводу, что дальнейшее развитие цивилизации невозможно (в самом деле, ну где ж напасешься особо способных да одаренных, когда природа производит их в 5%-ном количестве!).

Но вот если принять *концептуальное положение*: «**Математика — это язык**», то достаточно будет вспомнить расхожую фразу: «Даже самый тупой француз довольно прилично говорит по-французски».

И действительно: разве язык не является стройной логической системой? — Грамматическое управление языковыми конструкциями, семантическая и синтаксическая сочетае-

[1]Кстати говоря, сами математики тоже разделяют галилеевский взгляд на свою науку: «…*азбука* и грамматика какого-либо языка часто также не очень интересны, а между тем *только через их изучение* лежит путь ко всей литературе с ее увлекательными сказками, рассказами, новеллами и стихами. Подобно этому через те *простейшие*, *азбучные* положения математики, которые изучаются в школе, лежит столбовая дорога к современной математике» (А. И. Маркушевич [5, с. 262]. Все выделено мной. — В.Х.).

мость, воплощение и выделение сложных смысловых блоков особенно характерная для «чистого языка» — поэзии!

Это о сходстве языка и математики как языка.

Теперь — о различиях.

Математика *проще* любого языка потому, что ее семантика и ее грамматика, выраженные в понятиях, логических связях и отношениях, значительно проще языковых. Прежде всего еще и в силу строгой однозначности, гораздо меньшего, минимально необходимого «словарного запаса» основных понятий (имеется в виду школьная математика и вузовская в объеме первых двух курсов).

Но в силу этой же большей однозначности она и *сложнее* языка: требуется ***безукоризненное*** владение минимальной грамматикой.

К тому же еще о сложности, связанной с однозначностью: в естественных языках помимо минимальной грамматики уже словарного запаса в 600–900 слов достаточно, чтобы объясняться. Но в силу семантической неоднозначности и широкого объема каждого понятия речь может строиться крайне безграмотно, и, тем не менее, — она будет понятна.

В математике, основанной на логике «верно — неверно», подобная безграмотность речи, увы, непозволительна. Однако для 99,99% людей-специалистов математика интересна, прежде всего, с точки зрения умения говорить на этом языке, владения этим языком, использования этого языка для конкретных прикладных целей, а отнюдь не с точки зрения «лингвистики» — тонкого и глубокого знания математики «самой по себе», что интересно лишь для математиков-профессионалов.

На мой взгляд, все беды школьной (и не только школьной) математики проистекают из непонимания того очевидного факта, что математика «сама по себе», как теория, — это в самом широком смысле гуманитарная дисциплина. Для приложений же — это **язык**, но язык особый: не язык общения человека с человеком, а язык природы. Язык человека не в его растительном существовании, а язык, делающий человека частью мироздания».

А теперь посмотрим, к каким кардинальным изменениям в нашем понимании целей и результатов преподавания школьной математики приводит вышеназванное, *концептуальное* положение: «**Математика — это язык**, и владеть этим языком в нашу информационную эпоху необходимо **каждому**». Не только ради так называемой «общей культуры», но и в силу жизненной необходимости. Кто-то сказал по этому поводу, что основным капиталом в третьем тысячелетии будут не деньги, а знания.

Теперь мы можем совершенно однозначно ответить на вопрос, поставленный в начале этой главы: «Должны ли быть слабые ученики?»

Если подходить с точки зрения «общего знакомства с математикой» (а так, к сожалению, зачастую *практически* реализуется курс школьной математики), то очевиден ответ, подтвержденный веками преподавания: да, должны. Были, есть и всегда будут.

Но если взглянуть с позиции: знание языка математики **жизненно необходимо каждому в наше время**, то отсюда следует, что «слабых» учеников не должно быть вовсе!

Ответ хорош. И убедителен, если вдуматься поглубже в тенденции развития нашей цивилизации. *Одно интересно: как этого достичь*? Не правда ли?!

И все же, попробуем принять как неизбежную данность нашего времени проблему: как научить всех и каждого этому языку. И поищем пути решения данной проблемы.

В теории функциональных систем российского физиолога П. К. Анохина развивается положение о том, что жизнедеятельность системы определяется полезным результатом, значимым для выживания системы: «Если деятельность системы заканчивается полезным в каком-то отношении результатом, то взаимодействие компонентов системы всегда будет протекать по типу их взаимодействия, направленного на получение результата» [6, с. 78].

Более того, именно полезный результат и определяет систему как таковую, является для нее системообразующим фактором[2].

Хотим мы того или нет, но объективно школьная математика является подсистемой математики высшей школы, и ее полезный результат «на выходе» должен определяться потребностями вузовской математики. В противном случае жизнедеятельность всей системы будет нарушаться, что мы и видим на примере высшей школы (но это, как говорится, совсем другой вопрос). Нас интересует неотложная проблема: как научить языку математики всех? Довольно очевидным следствием из того факта, что слабые ученики существуют и количество их заметным образом увеличивается, является вывод: каким-то образом мы должны трансформировать, упорядочить школьную — *еще и еще раз: именно школьную*! — математику, а не просто «давать» некий спектр знаний.

Как мы выяснили, стержнем такой упорядоченности является тот полезный результат системы «школьная математика», который мы хотим получить «на выходе» школы.

Если проанализировать, какие основные *технические* навыки крайне необходимы при изучении дифференциального и интегрального исчислений (и всех вообще математических дисциплин в вузах любого профиля), то выявится следующая их совокупность:

1. таблицы сложения и умножения (!);

2. грамотная и быстрая работа с дробями;

3. операции с отрицательными числами;

4. вынесение общего множителя (в различных формах), разложение на множители и вообще алгебраическая техника Алгебры-7 (алгебра 7-го класса);

5. умение работать со степенями, особенно с дробными показателями (быстро, правильно, в уме);

6. самоконтроль (владение методами самоконтроля и наличие *долговременной практики* в этом)!

Только один пункт (4) связан с базовой алгеброй 7 класса. Остальные — арифметика! (Дробные показатели — из практики — трудны для учащихся именно арифметически.)

Мне могут резонно заметить: но это же так очевидно, подразумевается само собой. Это попросту тривиально!

Отвечу: *было бы* тривиально, если бы мы имели школьников и тем более студентов с добротной арифметической и алгебраической подготовкой. К сожалению, опыт достаточного числа преподавателей высшей школы свидетельствует как раз об обратном (не говоря уж о средней школе). И если бы это касалось только математики!

Осмелюсь утверждать, что вышеназванный небольшой перечень основных — повторюсь — технических навыков (которые, разумеется, не исчерпывают всю необходимую математическую технику средней школы) составляет ~ 90% всех необходимых для освоения высшей математики. Остальные 10% приходятся на понимание таких основополагающих понятий, как модуль, радикал, радиан и логарифм. Сюда же относится умение работать с уравнениями, системами уравнений, неравенствами.

---

[2] Отсылаю интересующихся к цитируемой работе, в которой П. К. Анохин разрабатывает интереснейший подход к тому, что такое система вообще и убедительно показывает, что принципы теории функциональных систем (ТФС) могут быть использованы в разнообразнейших областях. Главной трудностью при этом является «переформулировка» понятий ТФС в терминах данной дисциплины. К сожалению, книга издана давно и тиражом всего 7000 экз. Добавлю, что здесь я лишен возможности подробнее познакомить читателя с принципами ТФС, но логика применения ТФС к курсу школьной математики, его содержанию и методам, будет, в общих чертах, ясна из дальнейшего.

На этом примере явственно видна всем известная, но — как ни странно! — мало кем понимаемая (*в прикладном, практическом смысле*) важность арифметики *как техники быстрого и грамотного счета*.

Учителя начальной школы не задумываются над этим в силу того, что их учеников и их самих отделяют семь лет, стоящих между начальной школой и вузом. Учителя средней школы просто-напросто не имеют возможности заниматься ликвидацией арифметических пробелов. Преподаватели вузов... Но простите! — Преподаватели вузов имеют право рассчитывать на грамотных студентов.

Но мало осознать важность арифметической подготовки и иерархии ее целей. Откуда-то нужно взять время на их реализацию — и в рамках существующей школьной программы. Откуда? Вот здесь и приходит на помощь технология «Графического анализа». (Название мое. Сокращенно: ГрафАнализ, ГРАН) Что это такое?

Несколько лет назад где-то мне довелось прочесть, что за десять лет обучения в школе ученик решает порядка 2000 задач. Результат же общеизвестен. Практически нулевой.

Текстовые задачи составляют не менее 30% общего числа всех заданий в учебниках математики начальной школы и занимают непропорционально много времени (по отношению к своему логическому содержанию) на уроках. Чтобы обойти это затруднение, приходится решать их мало. Но как бы мало их ни решалось, времени на их решение все равно уходит много. Если использовать технологию «Графического анализа», то мы можем получить значительный выигрыш во времени, т. к. средствами ГрафАнализа текстовые арифметические задачи решаются гораздо быстрее — и чем сложнее задача, тем заметнее выигрыш во времени. К тому же сам ГрафАнализ построен так, что ребенок *вынужден* освоить основные логические конструкции. Тем самым мы получим дополнительное время для отработки технических навыков счета (в самом широком смысле этого слова) в рамках существующего курса.

Вкратце суть Графического анализа можно изложить так.

Вся арифметика преподносится ребенку как единое «поле арифметики», реализуемое следующим образом:

1. Единое «поле арифметики» как:

• одно действие — сложение;

• два основных понятия: сумма и слагаемые;

• три основных отношения: «Больше НА» (столько-то), «Больше В» (раз) и «Равенство».

2. Основные понятия — сумма и слагаемые — переводятся в естественную графику. Например, простейшая текстовая задача 1-го класса:

На одной тарелке 5 яблок,
на другой — 3 яблока.
Сколько яблок на обеих тарелках?

Сначала задача не решается, а рисуется (рис. 1)

а). Всего (В) — Сумма

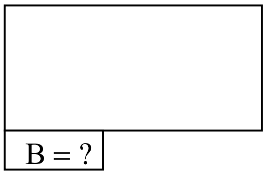


Рис. 1

b). Содержимое слагаемых (яблоки) $\boxed{5я}$ $\boxed{3я}$

c). Вводятся естественные «псевдоиксовые» обозначения слагаемых: $Т_1$, $Т_2$ ($Т_1$ — тарелка-1, $Т_2$ — тарелка-2).

d). Рисуется «заполненная» сумма соответствующих слагаемых (рис. 2).

Всего (В) = ?

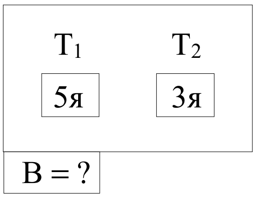


Рис. 2

е). Естественным образом, из интуитивно ясного понятия суммы, появляется уравнение в общем виде:

$В = Т_1 + Т_2$

f). И только потом проводятся вычисления в традиционной записи:

В = 5я + 3я

(«x» как обозначение неизвестной величины, предпочтительнее — и естественнее! — вводить начиная с действия вычитания).

3. По отдельности отрабатываются задачи только на сложение, вычитание, умножение и деление по циклам задач, выстроенных совершенно определенным образом.

Подробно с каждым циклом читатель познакомится в соответствующих главах II–V.

Сейчас я хотел бы провести краткое сопоставление стандартных способов решения текстовых задач и решение средствами ГрафАнализа на примере.

Н. Б. Истомина выделяет 4-е основных способа решения текстовых задач:

1. Практический;
2. Арифметический;
3. Алгебраический;
4. Графический.

Замечу, что к ним позже добавляются еще два способа: схематическое моделирование и комбинированный, но возможности этих способов в их практической реализации довольно ограниченные.

Сущность каждого способа я продемонстрирую на решении задания 97 [7, с. 199], строго следуя примерам, приведенным на с. 199–200 (там же).

«Задание 97. Решите различными способами (практическим, арифметическим, алгебраическим, графическим) следующую задачу: «В гараже стояло 10 машин. После того, как несколько машин уехало, осталось 6. Сколько машин выехало из гаража?»

I. Сначала — решение средствами ГрафАнализа.

Графика

а) Первичный анализ текста с точки зрения СУММЫ и СЛАГАЕМЫХ.

Всего (сумма) — 10 м (машин)

Слагаемые	**Содержимое слагаемых**
У – уехавшие машины	x м
О – оставшиеся машины	6 м

б) Графика рисуется «автоматически», т. к. из первичного анализа ВИДИМ (в буквальном смысле!) основные элементы задачи: сумма и 2 слагаемых (рис. 3).

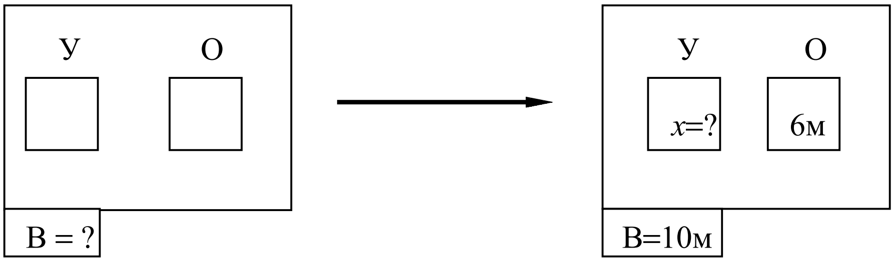


Рис. 3

Алгебра

а) $В = У + О$ Сумма считывается с Графики

б) $10 = x + 6$ Содержимое (значения) слагаемых

в) $x = 10 - 6$ Смысл вычитания как нахождение неизвестного слагаемого

Позднее, при наличии практики, вместо б) и в) будем писать в общем виде:

б) $У = В - О$

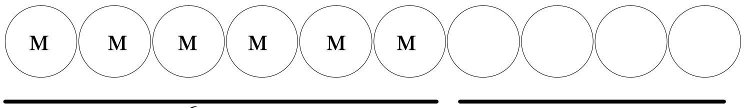
Арифметика — числовое решение

$x = 10$ м – 6 м

$x = 4$ м

II. Четыре стандартных способа решения

Практический



осталось — 6 машин уехало Рис. 4

Для ответа на вопрос задачи можно не выполнять арифметических действий, т. к. количество оставшихся машин соответствует тем кругам, которые пусты (рис. 4). Возможности этого метода ограничены, говорит Н. Б. Истомина, поскольку дети могут выполнять предметные действия только **с небольшими** количествами.

Арифметический

10 – 6 = 4 (м) — уехавшие машины

Алгебраический

Пусть x — уехавшие машины. Тогда количество всех машин можно записать выражением:

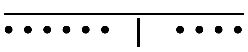
$6 + x$ — все машины

По условию задачи известно, что всего в гараже стояло 10 машин. Значит:

$6 + x = 10.$

Решив это уравнение, мы ответим на вопрос задачи.

Графический



уехало осталось Рис. 5

«Этот способ решения близок к практическому, но носит более абстрактный характер и требует специального разъяснения (рис. 5)» (там же, с. 199).

Мы видим, что 3-и способа из 4-х явным образом, как это и должно быть в арифметике, опираются на понятие **суммы**. И только 2-й — арифметический — использует сразу вычитание. Но вот в чем беда. В момент решения этот способ, в указанной форме записи, является, в сущности, свернутым практическим или графическим, т. к. арифметическое решение опирается на осознание — во внутреннем плане действий — понятий **суммы** и **слагаемых**, т. е. *на глубокое понимание смысла вычитания как нахождения неизвестного слагаемого*. А буквально через несколько минут решение задачи превращается просто в числовой пример. И как-то уходит из поля зрения и учителя, и ученика то, что для решения текстовой задачи самым главным было не написать (10 – 6), а проанализировать условие: выявить имеющиеся данные и их взаимосвязи, понять вопрос и, наконец, только после этого получить возможность осознать — какими арифметическими средствами получить решение.

Забегая вперед, хотелось бы более зримо, пусть и на простом примере, показать истинную разницу между стандартным графическим способом решения текстовых задач, имеющим лишь иллюстративную ценность, и ГрафАнализом.

Уже в простейшей задаче в одно действие, построенной на отношении «Больше НА» — графический способ резко теряет свою наглядность.

Задача. В одном ящике 10 яблок. В другом на 5 больше. Сколько яблок во втором ящике? (рис. 6)

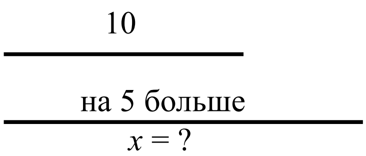


Рис. 6

Конечно, многие дети догадаются и здесь, что $x = 10 + 5$, но наглядность, а значит и вся методическая ценность способа — утеряны.

А если мы усложним задачу до двух действий, изменив ее вопрос: сколько яблок в двух ящиках?

Ребенку придется, помимо отношения «Больше НА», видеть сумму за невыразительными двумя черточками. Очевидно, что более сложные задачи стандартным графическим способом изобразить практически невозможно, и он исчерпывает себя уже на задачах в два действия. А ведь кроме сложения остаются еще три арифметических действия.

Решим ту же задачу со вторым вопросом средствами ГрафАнализа, но прежде введем **графический элемент (ГРАЭЛ) «Больше НА»**.

Будем понимать под неравенством $Я_2 > Я_1$ на 5 равенство $Я_2 = Я_1 + 5$ ($Я_1$ и $Я_2$один и другой ящики) и рисовать его как на рис. 7:

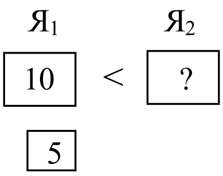


Рис. 7

Тогда, уже без пояснений, наша задача легко рисуется и решается (рис. 8).

1. Графика (графсхема)

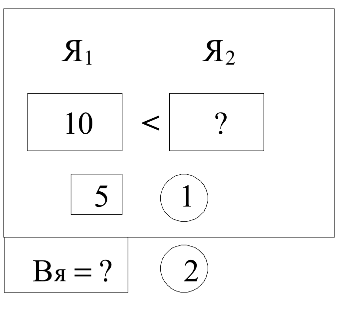


Рис. 8

2. Алгебра

1) $Я_2 = Я_1 + 5$
2) $В = Я_1 + Я_2$

3. Арифметика

1) $Я_2 = 10$ я $+ 5$ я $= 15$ я
2) $В = 10$ я $+ 15$ я $= 25$ я

ГрафАнализ с легкостью позволяет **нарисовать** решение очень сложных задач (что показано в следующих главах книги и приложении 4), *объединяя* в себе все 4-е метода в единое целое, причем изначально удается добиться более высокого уровня абстрагирования.

«Как показывают исследования В. В. Давыдова, дети младшего школьного возраста вполне могут овладеть элементами алгебры, например устанавливать отношения между величинами. Для выявления отношений между величинами оказалось необходимым *моделирование* этих отношений — выражение их в другой материальной форме… Такое моделирование самим ребенком отношений между величинами… осуществляется сначала в форме *графических отношений* (отрезков). Затем постепенный переход к моделированию посредством абстрактных символов типа А – В, А > В, А < В приводит к тому, что эти отношения становятся предметом действия ребенка» [8, с. 190].

В результате собственной преподавательской работы автор пришел к тем же выводам. Возможности технологии ГрафАнализа, основанные на том, что «вся» арифметика была сведена к 14-и логическим элементам и соответствующим им 8-и графическим элементам (ГРАЭЛам), позволили окончательно согласиться с мыслью школы Давыдова о том, что **потенциально возможный** уровень теоретического мышления младших школьников позволяет строить методику преподавания математики в начальной школе на довольно высоком уровне абстрагирования. Но… *при одном единственном условии*: **не забывать, что перед нами ребенок** только начинающий знакомиться с математикой, и, значит, не забывать использовать все преимущества наглядного, эмпирического способа обучения. И не просто не забывать, — *а необходимым образом использовать*!

ГрафАнализ позволяет неразрывно соединить высокий уровень абстрагирования — как одну из основ будущего теоретического мышления — и максимально возможную степень наглядности, предметности математических понятий и отношений, столь необходимые для ребенка этого возраста.

Если вернуться к нашей задаче, то мы видим:

I. Графика (графсхема) — это **<u>первый</u>** уровень абстрагирования. В сущности, это объединение практического и графического способов решения задач (но с гораздо большими возможностями!). Ребенок в буквальном смысле слова ВИДИТ сумму и слагаемые. Он легко научается понимать разницу между **опредмеченным слагаемым**, выраженным в *содержательных* обозначениях $Я_1$, $Я_2$, и **содержимым слагаемого**: 10 яблок, 5 яблок, «?» яблок. Тем самым изначально закладывается понимание алгебраической величины и ее числового значения. Плюс к этому, как побочный результат, естественным образом — «от известного» — идет расстановка действий, что дает учителю возможность легко и наглядно учить детей различным формам записи решений, например: по действиям, по действиям с пояснением, с вопросами.

II. Алгебра — **<u>второй</u>** уровень абстрагирования, неразрывно связанный с первым, и являющийся, в контексте ГРАН, **переводом** Графики в Алгебру. Предметность остается в содержательных мнемонических обозначениях (не x или y, а $Я_1$ и $Я_2$ — первый и второй ящики). Наглядные графические обозначения и отношения **переводятся** в содержательно алгебраические равенства, *с которыми уже можно работать* (т. е. вести преобразования, вычисления) на уровне простейшей алгебраической и арифметической техники. К тому же, **мимоходом**, мы получаем превосходную возможность научить ребенка **решать уравнения** «не попугайным способом», а понимая смысл арифметических действий, следствием которых и являются простейшие уравнения и способы их решения (нахождение неизвестного слагаемого — значит, действие вычитания; неизвестный множитель — действие деления).

Этот единый комплекс — Графика + Алгебра — я называю **синтезным блоком**, т. к. он позволяет отчетливо разделить чисто **механическую** часть решения задачи (арифметические вычисления) и, скажем так, **творческую** часть (осмысление задачи, перевод задачи из содержательно-предметной области в план математической модели).

Но даже в синтезном блоке ГрафАнализ не отдает на откуп «математическим способностям» ту — большую — часть логического анализа, которая **тоже является механической** (технической), — но уже на уровне логики (выделение данных, отношений между ними, результаты). По большому счету, синтезный блок полностью алгоритмизируем, и на долю творчества остается только — как это и должно быть — **языковая** проблема: анализ задачи на языке содержательно-предметной области и формирование ее математической модели.

ГрафАнализ как технология решения текстовых задач позволяет ~ 95% задач почти любого уровня сложности **алгоритмизировать**, т. е. свести процесс решения задачи к четкому алгоритму. Стоит только правильно нарисовать графическую схему задачи, что сводится к выделению числа слагаемых и отношений между ними, как дальнейший процесс решения приобретает автоматический характер.

ГрафАнализ позволяет алгоритмизировать процесс решения еще и в том смысле, что дает инструкцию по выделению данных и отношений и — быть может, самое главное — способствует сознательному пониманию **цели** (вопроса) задачи.

При составлении программ для ЭВМ хорошо известно, что первой основной сложностью является осмысление цели задачи. Вторая сложность — переформулирование содержательной задачи в терминах математической модели, включая разработку алгоритма. И, наконец, третья — техническое воплощение алгоритма на конкретном языке программирования.

В программировании, в широком смысле, есть особая специальность — постановщик, проектировщик[3]: человек или группа людей, занимающихся осмыслением задачи и ее переформулированием. И от успешной работы постановщика всегда зависит успешность реализации всего проекта. Техническая реализация алгоритма — это уже действительно техническая задача, задача 3-го уровня, скажем так.

В создании ГрафАнализа большую роль сыграло именно осмысление роли постановщика, что позволило явно выделить значимость алгоритмов при обучении математике от арифметики до 2-го курса технического университета (например, алгоритмические приемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений). Нынешняя школа ставит во главу угла развивающее обучение, формирование умений творчески подходить к решению любой проблемы (в том числе и математических задач), стремится «научить учеников учиться».

Безусловно, это сверхзадача, и та цель, к которой мы — преподаватели — должны стремиться. Вот только цель эта не является конструктивно-определенной, т. е. из ее общей формулировки никоим образом нельзя найти средства ее достижения.

Как же выявить эти средства?

Если взглянуть на работу художников — музыкантов, живописцев, скульпторов, — то мгновенно выявится характернейшая черта, предоснова их творчества: гигантская значимость ремесла, свободное владение всеми доступными техниками своего искусства. Да оно и понятно. Художники имеют дело с материалом, а на материале сразу видно — владеешь ты ремеслом или нет. И если нет отточенного ремесла, то о каком творчестве может идти речь!

Процесс творчества един в своей сущности для любого вида деятельности. Поэтому ясно, что для того, чтобы ребенок смог творчески подходить к задачам, он прежде должен владеть материалом (основными понятиями) и инструментом для обработки материала. Что же является инструментарием в курсе математики: ведь здесь нет ни кистей, ни красок, ни резца?..

---

[3] Иначе можно сказать, что постановщик переводит задачу с языка конкретной содержательной области на язык алгоритмов.

Да алгоритмы!

Приведу большую выдержку из статьи В. М. Глушкова «Что такое кибернетика?» «Алгоритмом называется конечная система правил, по которой совершается преобразование дискретной информации. Множество разнообразных алгоритмов имеется в математике. Из школьного курса алгебры, например, вам хорошо известны алгоритмы для решения квадратных уравнений, систем линейных уравнений, для раскрытия скобок и приведения подобных членов в буквенных выражениях и т. п. Но алгоритмы широко распространены и за пределами математики… Оказывается, чуть ли не всякий вид умственной деятельности может быть сведен к выполнению того или иного алгоритма. Но практически найти все правила, составляющие эти алгоритмы, — часто очень сложная и трудоемкая задача» [5, с. 443] .

Для нас важно то, что, начиная с появления программирования для ЭВМ, **явно** выявился тот аспект математики, что она по сути своей алгоритмизируема, и подавляющую часть ее инструментария составляют разнообразные алгоритмы.

Разумеется, отнюдь не все алгоритмы нам нужны для владения математикой как языком (более того, их не так много, как принято думать). Минимальный и эффективный их набор определяется, как сказано выше, полезным результатом системы «школьная математика». Но этот вопрос я рассматриваю в другой, еще не завершенной, работе: «Концепция знаниевых ядер математики» и здесь не имею возможности уделить ему хоть сколько-нибудь места.

ГрафАнализ ценен именно этим: разнообразные алгоритмы решения текстовых задач (во всяком случае, опирающиеся на задачи разнообразных типов, как в курсе математики М. И. Моро, М. А. Бантовой, Г. В. Бельтюковой (см. [1])) сводятся к «одному алгоритму» — технике конструирования решения задачи.

Как пишет Н. Б. Истомина: «… все многообразие методических рекомендаций, связанных с обучением младших школьников решению задач, целесообразно рассматривать с точки зрения двух принципиально отличающихся друг от друга подходов.

Один подход нацелен на формирование у учащихся умения решать задачи определенных типов…

Цель другого подхода — научить детей выполнять семантический и математический анализ текстовых задач, выявлять взаимосвязи между условием и вопросом, данными и искомыми, представлять эти связи в виде схематических и символических моделей» [7, с. 204].

Цель «другого подхода» полностью реализуется средствами ГрафАнализа. Но его основная задача отлична от целей обоих методических подходов. А именно, хоть ГрафАнализ и создавался вначале как общедоступный технологический инструментарий решения текстовых арифметических задач, но, будучи включен в более широкую концепцию знаниевых ядер математики, сейчас он должен стать, как надеется автор, средством решения совершенно иной задачи: получить «на выходе» начальной школы **технически одноуровневый класс**.

Используя ГрафАнализ, учитель может — ничего не теряя, а только приобретая в качестве знаний учеников! — резко (возможно, на порядок) сократить время на решение текстовых задач, а высвободившееся время направить на отработку счетной, в широком смысле, техники детей.

Тем самым учитель средней школы в 5-м классе получит возможность ориентироваться не на некоего «среднего» ученика, а на добротный уровень **всего** класса. Думаю, нет нужды пояснять, сколь значима такая возможность для учителя средней школы.

Далее стоит **особо подчеркнуть**, что технология ГрафАнализа может использоваться **любым** учителем, работающим **по любому** учебнику математики именно в силу того, что ГрафАнализ имеет **не методическую, а технологическую основу**. Причем начинать использовать ГрафАнализ, как полагает автор, можно почти в любой момент школьной программы. Но наиболее удобно, если речь не идет о первом классе, использовать для освоения технологии ГрафАнализа начало 2-го и 3-го классов — время, отведенное на повторение пройденного.

Еще раз подчеркну: ГрафАнализ может быть использован в любой методической концепции, тем самым **являясь основой для объединения, а не разделения авторов различных методических направлений**.

Но этим возможности ГрафАнализа не исчерпываются.

В силу того, что арифметика (с точки зрения решения текстовых арифметических задач) сведена к 14-и основным логическим элементам, реализованных 8-мью графическими элементами — ГРАЭЛами, — учитель начальной школы, пожалуй, впервые, может получить в свои руки инструмент «точечной локализации ошибок с точностью до ГРАЭЛа», т. е. не просто в общем представлять себе, что ученик плохо считает, не умеет решать уравнения или, например, затрудняется в задачах на деление, а совершенно точно — даже не просто узнать — УВИДЕТЬ: где, в каком ГРАЭЛе идет ошибка, какой логический элемент не осмыслен ребенком!

«Нотная» запись задач, основанная на ГРАЭЛах, позволяет быстро проанализировать новый (или существующий) учебник с точки зрения его логической структуры в отношении текстовых задач и свободно распоряжаться имеющимся дидактическим материалом, исходя не столько из программы, сколько из наличного состояния класса и отдельных учеников практически без дополнительных затрат времени на подготовку занятий (см. глава VI).

Завершая эту главу, я хотел бы сказать еще несколько слов вот о чем. Когда человек чего-то не понимает, например, слушая лекцию, то он в этот момент ничего не делает, не работает, бездельничает. Сколько лет и дети, и родители жалуются на перегрузку, учителя — на объем материала. Однако «эффект перегрузки» возникает как следствие непонимания, неусваиваемых знаний. В результате мы имеем парадоксальнейшее явление: дети крайне мало работают на уроке, **и уроки математики становятся идеальным средством приучаться к интеллектуальному безделью**.

Это далеко не безобидное явление.

Сошлюсь на автора книги «Возрастная и дифференциальная психология» Е. Ф. Рыбалко. «Уровень развития познавательного интереса… соответствует, как правило, уровню знаний. К примеру, элементарным знаниям соответствует и низкий уровень интереса… Знаниям глубоким соответствует интерес к активному поиску существенных связей и объективных закономерностей» [9, с. 172]. И далее: «Учащиеся, склонные к работе на уровне достаточного, относительно <u>неглубокого</u> понимания материала, <u>не реализуют свои потенциальные возможности</u> в развитии интеллектуальных черт, таких, как наблюдательность, любознательность, вдумчивость, сообразительность, изобретательность. Умственная работа **на уровне поверхностного понимания** … **задерживает** развитие интеллектуальных свойств личности школьника; его мышление характеризуется инертностью и «репродуктивностью» (там же, с. 184).

Почему я считаю вышесказанное особенно важным по отношению именно к урокам математики? Потому, что концептуальное положение «Математика — это язык» обязывает нас, преподавателей математики, думать не только о некоторых «способных учениках» — синоним «естественников и технарей», но обо всех, зная, что и будущий «гуманитарий» в наше время столь же нуждается в этом языке — это требование его будущей профессии. И не владея языком математики, «гуманитарий» лишается также и возможности заниматься своей профессией.