

Глава II Сложение

Цикл I. Сколько ВСЕГО (задачи с 2-мя слагаемыми в одно действие, ГРАЭЛ-(Σ))

1. На одной тарелке 5 яблок,
на другой — 3 яблока.
Сколько яблок на обеих тарелках? (••)
2. В одной коробке 50 яблок,
в другой — 30 яблок.
Сколько яблок в двух коробках? (••)
3. Одна машина привезла в магазин 500 ящиков конфет,
другая машина привезла 300 ящиков конфет.
Сколько ящиков конфет привезли в магазин? (••)
4. У Саши было 100 копеек,
у Маши было 150 копеек.
Они купили на рынке упаковку спичек и заплатили все свои деньги.
Сколько стоили спички? (••)
5. Один автобус проехал 88 км,
а другой автобус — 102 км.
Какое расстояние проехали оба автобуса? (••)
6. За 3 часа путешественник дошел от реки до горы,
а от горы до озера он дошел за 5 часов.
Сколько времени шел путешественник от реки до озера? (••)

(удаляется графическая разбивка задачи)

7. Маша поехала к бабушке в деревню. Первые 18 часов она ехала поездом, а потом 3 часа — автобусом. За какое время Маша доехала до деревни? (••)
8. После каникул Маша вернулась из деревни домой. До вокзала она ехала автобусом и проехала 120 километров, а затем на поезде она проехала 780 километров. Каково расстояние от деревни до города? (••)

Задачи с синонимичными выражениями¹⁰

9. С дерева сначала улетели 5 синиц, затем **еще** 3. Сколько синиц улетело с дерева? (••)
10. Маша съела утром 3 яблока, вечером **еще** 2. Сколько яблок съела Маша? (••)
11. У Коли было 4 марки. Ему подарили **еще** 2. Сколько марок стало у Коли? (••)

Дроби¹¹.

12. За 1-й день Маша прочитала $\frac{1}{3}$ книги. За 2-й день — $\frac{2}{3}$ книги. Какую часть книги Маша прочитала за два дня? (••)

¹⁰ Задачи 9–11 взяты из книги Н. Б. Истоминой [8, с. 30–31] (все выделено мной. — В. Х.).

¹¹ См. глава III — Вычитание, начало раздела «Немного о дробях». В этой главе я включаю несколько задач с дробными числами исключительно в методических целях: мы сразу увидим, что задачи 5–6 классов по своей логической структуре ничем не отличаются от задач 1–3 классов, и главной проблемой является проблема грамотного счета, а отнюдь не умение решать текстовые задачи.

Ответы: 1) 8 я.; 2) 80 я.; 3) 800 я.; 4) 250 к.; 5) 190 км; 6) 8 ч.; 7) 21 ч.; 8) 900 км; 9) 8с.; 10) 5я.; 11) 6м; 12) $\frac{3}{4} = 1$ — всю книгу.

Сценарий.

Сначала несколько пояснений общего характера.

Поскольку, как уже сказано, я в своем изложении ориентируюсь на 3–5 классы, то, мне думается, лучше всего **вместе с ребенком** прочитать пункт «Немного о сложении», начиная с задачи 1 и до конца, отмеченного тремя звездочками (***). При этом **выделить** для него следующее:

Считать — это отвечать на вопрос «**сколько ВСЕГО**».

Сложить два числа — тоже ответить на вопрос «**сколько ВСЕГО**».

Далее **сказать** ему, что всегда будем называть числа, которые складываем, **слагаемыми**, а результат сложения — **суммой** или **всего** (понятия суммы и слагаемых вводятся уже в начале 1-го класса).

Обратите особое внимание **на обозначения** (имена) слагаемых вот почему: когда мы думаем об обозначениях, то тем самым мы **уже анализируем задачу**¹².

Столь же внимания следует уделять «размерности» величин. Попросту говоря, что складываем: яблоки + яблоки, часы + часы, ящики + ящики. А вот тракторы и часы (тракторы + часы) мы сложить никак не можем. Это величины разной «размерности», неоднородные.

Конечно, использование термина «размерность», если подходить строго, не совсем корректно (поэтому я пишу его в кавычках). Но пусть он будет в нашем лексиконе. Во-первых, он удобен, а во-вторых, он крайне поможет нам разобраться с двумя формами деления. В-третьих же, мы навсегда приучим ребенка к тому, что в дальнейшем, прежде всего в физике, он будет работать с размерными величинами: скорость — метры в секунду, плотность — килограмм на метр в кубе и т. п.

Наконец, — и это самое главное, — используя «размерные» величины, ребенок **опредмечивает** для себя графическую схему (модель) задачи: не просто число «3», а «3 яблока».

Поэтому бойтесь «просто чисел».

Теперь о первом графическом элементе (сокращенно — ГРАЭЛ). Сумму и составляющие ее два слагаемых будем **называть ГРАЭЛ-(Суммы)**. **Обозначать — ГРАЭЛ-(Σ)**¹³.

А рисовать так, как в задаче 1 этого цикла (ниже).

Переходим к работе с ребенком.

Вы помните, то, что выделено жирным шрифтом и далее, в той или иной форме ребенок должен услышать.

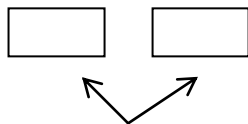
Задача 1

1. Скажите ему, что вы уверены в том, что все задачки цикла I он и в уме решит. Уж что-то, а на таком уровне считать он умеет. Но у вас с ним другая задача: научиться быстро и правильно решать очень сложные задачи, а для этого нужно кое-что узнать.

¹² «Выбор обозначений является важным моментом в решении задачи. К нему следует отнестись очень внимательно. Потраченное на выбор обозначений время с лихвой компенсируется тем временем, которое мы сэкономим, избежав путаницы в работе. Более того, тщательно выбирая обозначения, мы будем хорошо разбираться в тех элементах задачи, которые подлежат обозначению. Таким образом, выбор обозначения может существенно помочь нам понять задачу. Хорошая система обозначений должна удовлетворять следующим требованиям: она должна быть *однозначной, содержательной, легко запоминающейся*» (все выделено мной. — В. Х. [12, с. 119]).

¹³ Греческая буква Σ (сигма) в математике используется для обозначения суммирования.

2. Пусть он прочитает **задачу 1 (вслух!)**. Разумеется, он сразу скажет ответ — 8 яблок. На что вы ему ответите, что это в общем-то и не задача, а простенький элемент (логическая деталька) почти всех сложных задач, и что вы покажете ему, как **нарисовать** эту задачу, буквально **говоря следующее**: «Какие числа мы складываем? — 5 и 3. Значит, это у нас **слагаемые**. Давай будем рисовать слагаемые квадратиками (рис. 6) (**прямоугольниками** удобнее, но я буду говорить «квадратики», чтобы подчеркнуть, что речь идет о слагаемых).



слагаемые Рис. 6

Внутри квадратиков — писать наши числа 5 и 3. Но обрати внимание, что в нашей задаче это не просто числа, как в примере $5 + 3 = 8$, а совершенно конкретные числа.

Что мы хотим **посчитать**? — Сколько яблок, верно? Вот для того, чтобы не забыть о том, **что именно мы считаем** — яблоки, или, упаси Боже, не сложить в какой-нибудь задачке **тракторы и яблоки**, будем писать не просто 5 и 3, а 5я и 3я. Сразу **видно**, что мы считаем в нашей задаче **яблоки**.

И вписываете в квадратики-слагаемые 5я и 3я (рис. 7):



Рис. 7

Продолжаете: «Нам надо узнать (посчитать), сколько **ВСЕГО** яблок на обеих тарелках? Давай наши слагаемые поместим внутри прямоугольника-суммы».

И рисуете прямоугольник, а внутри него слагаемые (рис. 8):

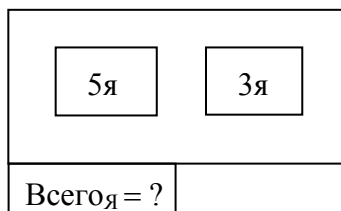


Рис. 8

Продолжаете: «Ведь все **ВИДНО?!** Все понятно? — Как две тарелки на столе: на одной 5 я(блок), на другой 3 я(блока). А слово «Всегоя» (с маленькой буквой «я» внизу будет обозначать у нас **сумму** и напоминать, что вопрос задачи: «Сколько **ВСЕГО** яблок?»»

3. Об обозначениях!

Скажите ему: «Все хорошо, но давай сделаем еще одну вещь, которая очень пригодится нам в дальнейшем и облегчит жизнь. Яблоки на тарелках лежат, верно? Давай дадим нашим слагаемым **имена**, обозначим их буквами. Но возьмем не любые буквы, а такие, чтобы сразу было **видно**, что речь идет о нашей задаче. Раз «тарелка», то и **обозначим слагаемое буквой Т**. Но у нас сказано: **на одной тарелке, на другой тарелке**. Чтобы и это было **видно**, будем обозначать первую тарелку — **Т₁**, а вторую тарелку — **Т₂**»¹⁴.

Нарисуйте целиком заполненный ГРАЭЛ-(Σ) — графэлемент суммы (рис. 9):

¹⁴ Маленькие цифры внизу у буквы Т называются индексами. Читается: «тэ-один и тэ-два». Точно также индексом (буквенным) является буква «я» у Всего.

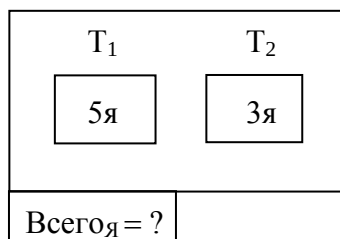


Рис. 9

И спросите ребенка: «Посмотри, правда же все понятно? Мы нарисовали нашу задачу полностью. На нашем рисунке есть и одна, и другая тарелки (T_1 и T_2). На них, соответственно, 5 яблок и 3 яблока (5я и 3я). И вопрос задачи — «Всегоя = ?». Мы указали, что считаем именно яблоки, — видишь, буква «я» внизу? — и добавляете — Рисунок задачи будем **называть графической схемой** задачи (графсхемой). А само решение задачи в виде графсхемы будем **называть** блоком «Графики» или просто **Графика**.

4. Пришла пора блока «Алгебра».

Скажите ребенку: «А ты знаешь для чего мы обозначили тарелки T_1 и T_2 ? Для того, чтобы научиться легко и безошибочно считать. В 7-м классе у вас будет алгебра. Сейчас ты узнаешь, что это такое. Чуть-чуть, конечно, но нам с тобой будет достаточно. Смотри».

И пишете:

$$\text{Всего} = T_1 + T_2$$

Говорите: «Видишь, мы просто нашу нарисованную задачу записали так, как пишут математики. Помнишь, у вас еще в первом классе было уравнение: $x - 3 = 5$? И как вы его решали? А вот так: $x = 5 + 3$. Почему его решают так, мы с тобой разберемся, когда будем «проходить» действие вычитания. А сейчас посмотри, как похоже то, что мы написали, и школьное уравнение».

Пишете одно под другим:

$$\begin{aligned} \text{Всего} &= T_1 + T_2 \\ x &= 5 + 3 \end{aligned}$$

Говорите: «Ну, разве это не одно и то же?! В уравнении мы ищем « x », а в задаче — «Всего». Просто по-разному **назвали** то, что нам неизвестно. В уравнении **складываем** числа 5 и 3 — два слагаемых. И в нашей задаче — **сложение** и два слагаемых.

Но мы же можем складывать (считать) только числа, а у нас — буквы. А вспомни, что означают эти буквы? Это просто **имена слагаемых**. Ну, а сами слагаемые **чему равны, из чего состоят, что содержат** внутри?». — **Обязательно все три синонимических вопроса должны быть произнесены!** Мы постоянно будем пользоваться терминами: **слагаемые** (т. е. тем самым — **их имена**) и **содержимое** слагаемых (**их числовые значения**). Это полностью соответствует понятиям: величина и числовое значение величины. Например, величина — T_1 , ее числовое значение — 5я.

Продолжаете: «Значит, если мы в наше уравнение

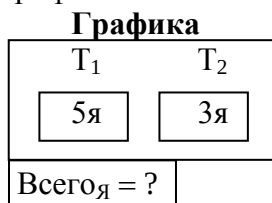
$$\text{Всего} = T_1 + T_2$$

подставим содержимое (числовые значения) слагаемых T_1 и T_2 , то получим обычное школьное уравнение. Только вместо буквы « x », у нас будет написано слово «Всего» (ведь мы ищем неизвестную сумму)».

Пишете:

- (1) $\text{Всего} = T_1 + T_2$
- (2) $\text{Всего} = 5я + 3я$
- (3) $\text{Всего} = 8я$

Говорите: «Уравнение (1) мы будем называть «блок алгебры», а когда подставим вместо букв (имен) слагаемых их содержимое: 5я и 3я, то уравнение (2) будем называть «блок арифметики».



Алгебра	
Всего = T ₁ + T ₂	
Арифметика	
Всего = 5я + 3я	= 8я
Всего = 8я	

Рис. 10

То есть у нас с тобой при решении задачи **будет 3 блока**, три шага, три этапа, которые мы просто будем называть: **Графика, Алгебра, Арифметика**.

Наконец, подводя итог, вы **говорите**: «Соединим теперь все три шага решения вместе. Все у нас должно быть **перед глазами**, поэтому будем **записывать** решение так (рис. 10):

Обратите внимание на цепочку равенств (два знака «=») в «Арифметике». В школе детей приучают к следующей форме записи решения уравнений:

$$x = 5 + 3$$

$$x = 8$$

то есть цепочка равенств в уравнениях **непозволительна**. Но для нас очень удобно при нескольких действиях **видеть сразу** числовой результат. Чтобы наша вспомогательная форма записи не противоречила школьной, я отделил вертикальной чертой второй знак «=».

О непротиворечивости форм записи решения методами ГрафАнализа и школьной я расскажу в конце этой главы.

Я очень много внимания уделил простейшей задаче 1. Но, во-первых, самый ответственный этап — первоначальное знакомство ребенка с принципами применения ГРАН. Во-вторых, эта книга не учебник, а изложение технологии решения, т. е. крайне важна **последовательность ввода** тех или иных элементов, та или иная **акцентировка внимания** и т. п. В-третьих, самое важное то, чтобы ребенок **«почувствовал»**, **«опредметил»** для себя «Графику» и «Алгебру», поэтому, в отличие от учебника, нам важна **не формальная строгость математической лексики**, а глубинное «чувствование» способа действия, из которого рождается вначале — интуитивное понимание, переходящее с годами в истинное знание. Ведь знать — значит уметь!

В силу этого я сохраняю математическую строгость изложения лишь в части основополагающих понятий и определений, основных терминов и отдаю предпочтение синонимичности употребления лексики, пользуюсь любой возможностью пояснить, опредметить тот или иной шаг, термин, понятие, действие, что, конечно, совершенно не означает безалаберности в использовании лексики, математической некорректности.

Автор учебника математики просто **не может** себе позволить подобных пространственных «отступлений». Хотя бы в силу ограниченности объема учебника и столь **необходимых требований** соблюдения математической строгости и точности в использовании лексики. Именно поэтому я надеюсь, что «отработка» строгости будет осуществляться в дальнейших школьных уроках, а ГРАН будет тем, чем и должен быть — дополняющим учебник средством.

И еще. Слово «Всего» в уравнениях блоков «Алгебра» и «Арифметика» **до поры до времени мы будем писать полностью**, с целью «впечатать» в память и сознание то, что сложение или счет отвечают на вопрос: «Сколько ВСЕГО?». Потом будем пользоваться сокращением — **«В»**.

Однако продолжим.

Теперь, после подробного знакомства с основными принципами ГрафАнализа, вы предлагаете ребенку решить остальные задачи этого цикла по схеме: «Графика», «Алгебра», «Арифметика». **Все задачи построены на одном ГРАЭЛ-(Σ)**. В задачах 2–6 сохраняется графическая разбивка логической структуры задачи: на каждой строке — одно слагаемое; вопрос выделен отдельно.

Сосредоточиваемся на:

1. **ВИДЕНИИ** слагаемых и вопросе задачи — умении **видеть** «сколько ВСЕГО» в разных формах.
2. **Удобных** (мнемоничных) именах слагаемых (указаны рекомендуемые обозначения).
3. «Размерности» величин.

Задача 2

После прочтения ребенком текста **спрашиваем**: «**Ви;́дим** слагаемые? Сколько их?.. Правильно, два. Как **удобно** их обозначить (назвать)?»

Может последовать ответ: **Я₁** и **Я₂**.

Мгновенно направляем его вопросом: «**Что считаем**: яблоки или коробки?.. Верно, **считаем яблоки**. А где лежат яблоки?.. Правильно, в коробках. **Сравни** с первой задачей: **считали** яблоки, а яблоки лежали **на тарелках**. Слагаемых было **два**, по числу тарелок. И нам **удобно** было **назвать слагаемые Т₁ и Т₂**. А вот то, **что считали** — 5я и 3я — было у нас **содержимым** слагаемых.

Теперь мы опять **считаем яблоки**, а яблоки **лежат в коробках**. Так как **удобнее обозначить** слагаемые?»

Ответ наверняка будет правильным: **К₁** и **К₂** (одна и другая коробки, читается, как мы помним, ка-один и ка-два) Содержимым слагаемых будут 50я и 30я («размерность» — яблоки [я]).

Внимание!

Все время, в любой задаче, спрашивайте: «**ВИДИМ** слагаемые?» Употребление слова «**ВИДИМ**» — **крайне важно**. Ведь мы именно этому и хотим научить: **ВИДЕТЬ** слагаемые и отношения между ними.

Задача 3

«**Видим** слагаемые?.. Правильно, 500 и 300. Как обозначим?»

Опять может последовать **Я₁** и **Я₂** или **К₁** и **К₂**, т. к. ребенка сбивает то, что написано: 500 ящичков конфет (два предмета — ящички и конфеты).

Вопрос: «**Что считаем** — ящички или конфеты?» сразу наводит ребенка на нужную мысль. Раз **считаем ящички**, то это — **содержимое** слагаемых. **Где** лежат ящички? — **В машинах**. Значит, **удобные обозначения** (имена) слагаемых: **М₁** и **М₂**. Содержимое слагаемых: 500я и 300я («размерность» — ящички [я]).

Внимание!

В вопросе задачи не употребляется явно «сколько ВСЕГО» (не сказано: «Сколько ящичков **на двух машинах?**») Если ребенок затрудняется с вопросом, поясните ему, что «сколько ВСЕГО» подразумевается, поскольку у нас написано «сколько... в магазин», т. е. подразумевается (слышится) фраза: сколько всего ящичков привезли в магазин обе машины?

То же относится к вопросам задач 4, 6, 7, 8. Под подразумевается, соответственно: 4. Сколько стоили (ВСЕГО) спички? 6. Сколько времени (ВСЕГО) шел путешественник? 7. За какое время... — за какое (ВСЕ) время... 8. Каково расстояние... — каково (ВСЕ) расстояние, сколько (ВСЕГО) километров?

Задача 4

Обозначения слагаемых: **С** и **М** (Саша, Маша).

Содержимое слагаемых: 100к и 150к («размерность» — копейки [к]).

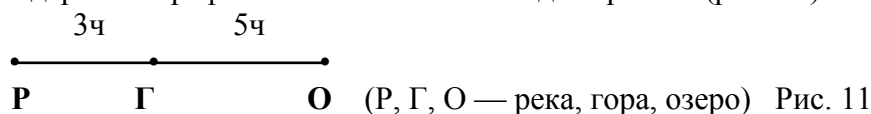
Задача 5

Обозначения слагаемых: **А₁** и **А₂** (автобусы один и другой).

Содержимое слагаемых: 88км и 102км («размерность» — километры [км]).

Задача 6

Задача арифметическая, а не «на движение». Чтобы увидеть это, сначала нарисуем задачу стандартным графическим способом в виде отрезков (рис. 11):



Видим, что речь идет о слагаемых: 3 часа и 5 часов, а отнюдь не о движении ($S = V \cdot T$). Значит, используем ГРАЭЛ-(Σ).

Обозначения. Если 3-й класс, то лучше так и оставить, прямо по тексту: Г — время до горы, О — время от горы до озера. Если 5-й класс и старше, то они уже знакомы с формулой вычисления пути при равномерном движении. А поскольку в дальнейшем в физике всегда будут использоваться эти три буквы: S — путь, T — время, V — скорость, то предложите ребенку «привыкнуть на будущее» и ввести обозначения в общем-то ему знакомы: T₁ и T₂ или T_Г и T_О (лучше T_Г и T_О, в данном случае — мнемоничнее).

Содержимое слагаемых: 3ч и 5ч («размерность» — время, часы [ч]).

Замечание

Пусть ГРАН не будет для вас абсолютно универсальным средством. Если необходимо, пользуйтесь сначала **любыми** графическими иллюстрациями, например, как та, которую я нарисовал.

Но осознав арифметическую суть задачи, т. е. то, что речь идет о слагаемых и суммах, мгновенно переходите к ГРАН.

Задача 7

Обозначения слагаемых аналогичны задаче 6.

3-й класс: П и А (поезд, автобус).

5-й класс и старше: T₁ и T₂ или T_П и T_А (время поездом, время автобусом, T — время).

Содержимое слагаемых: 18ч и 3ч («размерность» — время, часы [ч]).

Задача 8

Обозначения слагаемых — аналогичны задаче 7:

А и П (автобус, поезд), либо S₁ и S₂ или S_А и S_П (расстояние автобусом, расстояние поездом, S — путь).

Содержимое слагаемых: 120км и 780км («размерность» — путь, километры [км]).

Задачи 9–11

Слово «еще» вместе с вопросом «сколько...» (т. е. сколько всего) дает нам очевидный ГРАЭЛ-(Суммы) и задача 9 на фоне задач 10–11 не должна вызвать никаких затруднений, хотя и может показаться, что речь идет о вычитании: синицы **улетели**.

Внимание!

На рис. 12 я воспроизвожу решение третьеклассника на 3-м занятии.

Вы видите, с каким трудом рисуются «квадратики» слагаемых и прямоугольник суммы, как неэффективно используется пространство листа, как наезжает верхняя линия «суммы» на обозначения слагаемых (б₁, б₂, б₃). Учтите, что это может продолжаться **довольно долго**. Ребенок должен **привыкнуть**, «набить руку», просто научиться **набрасывать** «Графику»; **научиться рассчитывать** нужное для рисунка и решения место на листе с учетом числа слагаемых, с учетом того, что ему нужно **поставить над** «квадратиками» имена слагаемых, **а внутри** «квадратиков» — вписать их содержимое. Сравните с рис. 13, который я именно

«набросал». У меня линии тоже **не очень ровные**. Но **ясно видны** все существенные элементы задачи. Все компактно, **но не тесно**. Числа и буквы **легко читаются**. Все обозримо, **но не растянуто** на весь лист. Вот такой аккуратности графики вы должны добиваться (не спеша, приучая постепенно!). Должны добиваться того, чтобы **минимум** времени (в пределах 1–3 минут в зависимости от степени сложности задачи, возраста и практики ребенка) уходило на рисование, а главным было **ВИДЕНИЕ** слагаемых и сумм, быстрое — автоматическое — именование слагаемых и т. п.

В дальнейшем, в физике и химии, школьники постоянно будут пользоваться не «рукописными», а печатными буквами. Вы видите на рис. 12, что имена слагаемых написаны так, как этому учат на уроках русского языка. Взгляните, как выписана буква «Б» на верхней картинке, буква «К», маленькие (строчные) буквы «б» на нижних рисунках — прямо по прописям, со всеми завитушками. Ребенок будет вам говорить, что так ему удобнее, так он привык. **Требуйте, чтобы буквы — имена слагаемых — были только «печатными» и большими (прописными)! Объясните**, что вы занимаетесь не русским языком, во-первых, а во-вторых, это ему пригодится в дальнейшем на уроках физики и химии. **Добавьте**, что у вас с ним **нет времени** на то, чтобы «выводить буковку», а вот печатную букву он, после небольшой тренировки, будет писать очень быстро, и она будет легко и однозначно читаться (будет легка для восприятия, для ви́дения). Пусть он сам сравнит рис. 12 и рис. 13 и скажет, где изображение (включая уравнения из «Алгебры») легче для чтения и ви́дения.

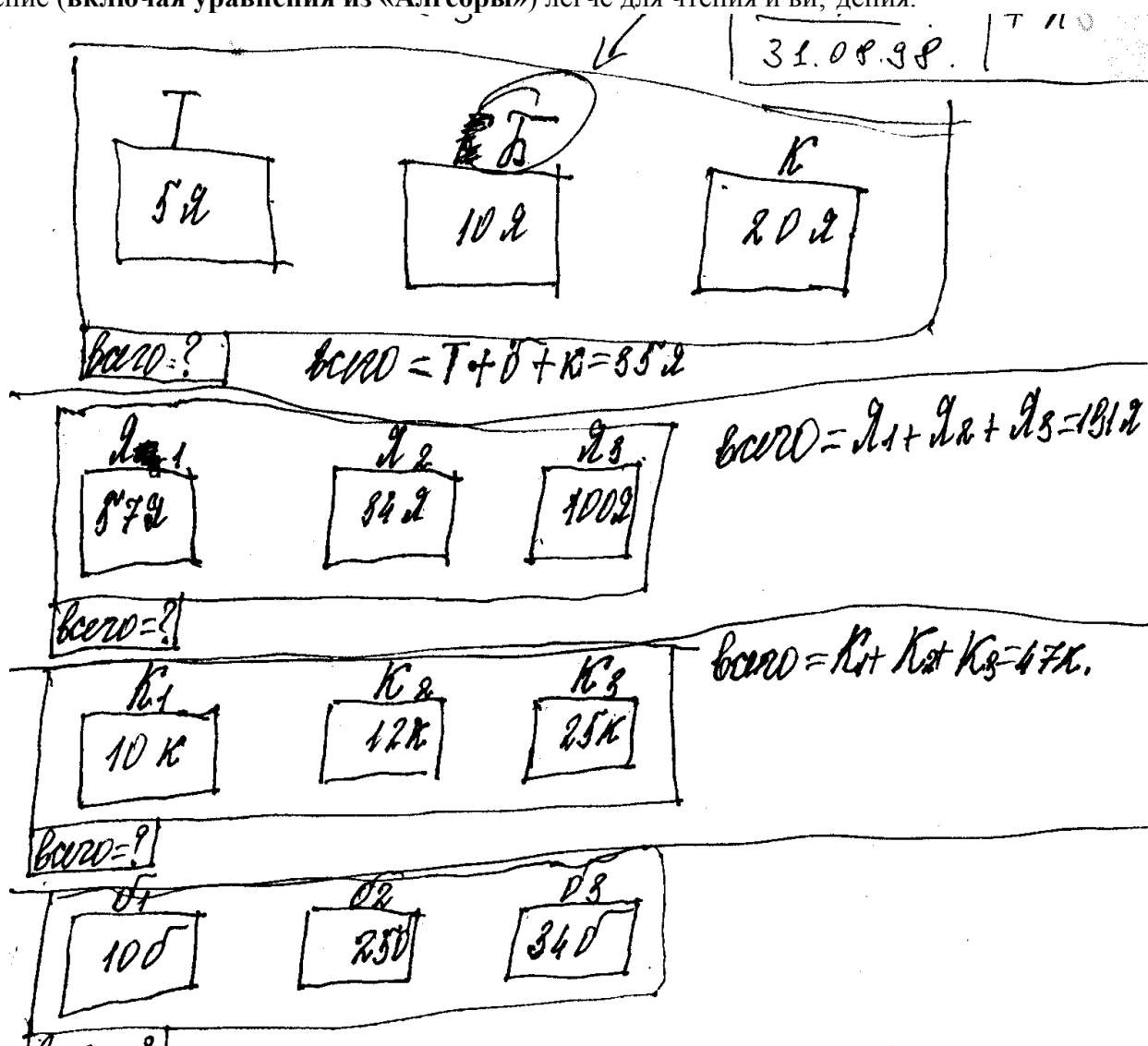
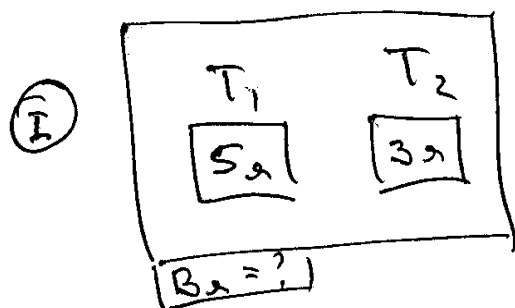


Рис. 12

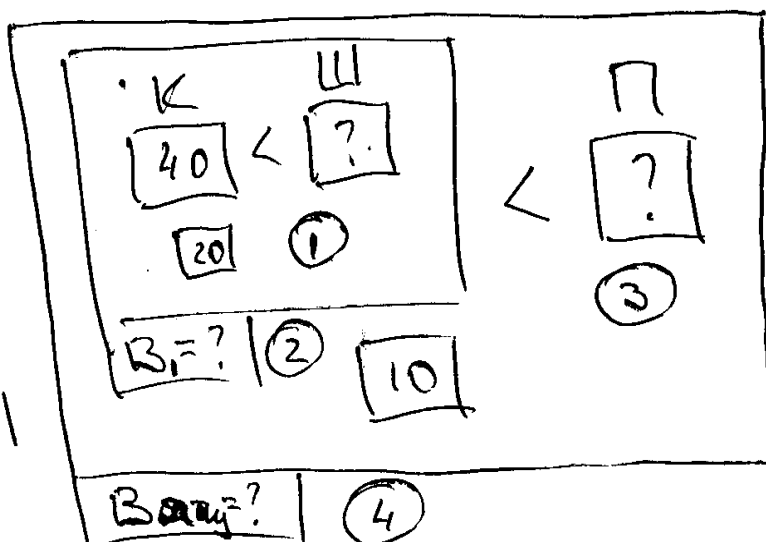
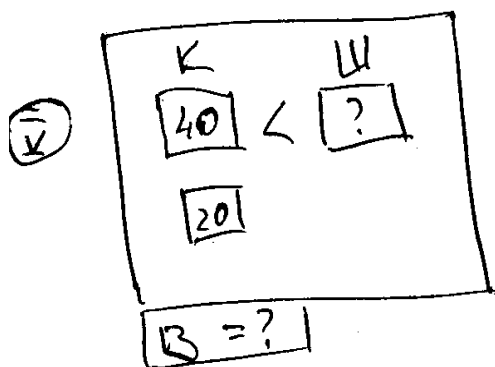
Заметьте, что задачи 7–8 даются сплошным текстовым потоком, т. е. слагаемые и вопрос уже не выделены на отдельных строках. К тому же, задачи явно стали многословнее. **Очень важно, чтобы к этому моменту первого занятия ребенок уже сразу ВИДЕЛ слагаемые!** Если вы не пропустите ни одной предыдущей задачи и **скрупулезно выполните все технологические рекомендации**, описанные в сценарии задачи 1, то для вашего ребенка это видение не составит проблем. Но в задачах 7–8 на первый план выходит нечто иное, чем видение двух слагаемых. После того, как на ваш вопрос: «ВИДИМ слагаемые?» — ребенок, **добросовестно прочитав весь текст**, скажет, что да, два слагаемых, как и прежде, — **обязательно** спросите его вот о чем: «Скажи, вот эта фраза «Маша поехала к бабушке в деревню» («После каникул Маша вернулась из деревни домой») **что-нибудь говорит нам?** Нужна она нам?..

А раз не нужна, то будем впредь просто «скользить глазами» по таким фразам. Для нас это будет **словесный мусор**, на который вообще **не стоит обращать внимание**. Мы же знаем, **что;** надо искать в задаче: **слагаемые и суммы!** Значит, читая задачу, мы ищем, прежде всего, числа — они опорные точки для нашего внимания. **Раз число, значит — слагаемое!»**



$$B = T_1 + T_2$$

$$B = 5_2 + 3_2 = 8_2$$



$$1) Ш = K + 20$$

$$2) B_1 = K + Ш$$

$$3) П = B_1 + 10$$

$$4) B = B_1 + П$$

$$1) Ш = 40 + 20 = 60_2$$

$$2) B_1 = 40 + 60 = 100_2$$

$$3) П = 100 + 10 = 110_2$$

$$4) B = 100 + 110 = 210_2$$

Рис. 13

Немного о рисовании

Обычно дети рисуют прямоугольнички сумм и слагаемых одним движением пера и прямоугольнички получаются кособокими и некрасивыми. Сразу приучайте ребенка рисовать отдельными линиями — отрезками. Пожалуй, лучше всего такая последовательность: левый вертикальный отрезок, верхний — под прямым углом, нижний и правый параллельно первым двум. Тогда легко будет получаться нечто подобное рис. 13. Кроме того, умение набрасывать прямоугольнички таким образом крайне пригодится на уроках геометрии.

Цикл II. Больше НА (задачи с 2 слагаемыми в одно действие, ГРАЭЛ(> на))

1. На одной тарелке 5 яблок,
на другой — на 3 яблока больше.
Сколько яблок на другой тарелке? (*)
2. В одной коробке 50 яблок,
в другой — на 30 яблок больше.
Сколько яблок в другой коробке? (*)
3. Одна машина привезла в магазин 500 ящиков конфет,
другая машина привезла на 300 ящиков больше.
Сколько ящиков конфет привезла в магазин вторая машина? (*)
4. У Саши было 100 копеек.
у Маши было на 150 копеек больше.
Сколько денег было у Маши? (*)
5. Один автобус проехал 88 км,
а другой автобус проехал на 102 км больше, чем первый.
Какое расстояние проехал второй автобус? (*)
6. За 3 часа путешественник дошел от реки до горы.
Чтобы дойти от горы до озера он потратил на 5 часов больше.
За какое время путешественник добрался от горы до озера? (*)

(удаляется графическая разбивка задачи)

7. Маша поехала к бабушке в деревню. Поездом она ехала до Ростова 3 часа, а от Ростова до деревни — автобусом на 2 часа дольше. Сколько времени Маша ехала от Ростова до деревни? (*)
8. После каникул Маша вернулась из деревни домой. До вокзала она доехала автобусом и проехала 120 километров. А затем на поезде она проехала на 1080 километров больше. Какое расстояние Маша проехала на поезде? (*)

Задачи с выражениями, синонимичными отношению Больше НА

9. Рубашка стоит 150 рублей, а джинсы — на 430 рублей дороже. Сколько стоят джинсы?
10. Сыну 8 лет. Отец старше сына на 22 года. Сколько лет отцу? (*)
11. Третьеклассница Саша делает уроки за 40 минут. Девятиклассница Маша сидит за уроками на 80 минут дольше. Сколько времени тратит на уроки Маша? (*)
12. До ближайшей к Солнцу звезды — α Центавра — 4 световых года. Самая яркая звезда — Сириус — на 3 световых года дальше от Солнца, чем альфа Центавра. Каково расстояние от Солнца до Сириуса?¹⁵ (*)

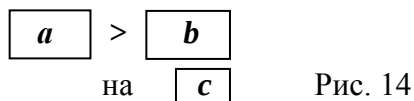
Дроби

13. В первый день турист проехал $\frac{5}{12}$ всего пути, а во второй — на $\frac{2}{15}$ больше. Какую часть пути турист проехал во второй день? (*)
- Ответы: 1) 8 я.; 2) 80 я.; 3) 800 я.; 4) 250 к.; 5) 190 км; 6) 8 ч.; 7) 5 ч.; 8) 1200 км; 9) 580 руб.; 10) 30 л.; 11) 120 м(инут); 12) 7 л (световых лет); 13) $\frac{11}{20}$.

¹⁵ Световой год — расстояние, которое свет пробегает за год $\sim 10^{16}$ м

Сценарий.

В этом цикле мы с вами рассмотрим второй логический элемент арифметики — отношение «Больше НА» (столько-то). Это первое (**и важнейшее**) из трех основных отношений. Ему будет соответствовать в ГрафАнализе графический элемент, который будем **называть** ГРАЭЛ отношения «Больше НА» или просто **ГРАЭЛ-(Больше НА)**. **Обозначать:** ГРАЭЛ-(> на). И **рисовать** так, как на рис. 14.



Сразу скажу, что понятие отношения «Больше НА» так же неопределимо, как и понятие суммы. В нем выражена идея упорядоченности, строгой последовательности ряда натуральных чисел, т. е. то, что число 2 следует за числом 1, число 3 — за числом 2 и т. д.¹⁶

Однако формальная неопределимость отношения «Больше НА» никоим образом не должна нас смущать. Ведь уже дошкольник может сказать, что больше — 3 яблока или 5 яблок, если только эти яблоки будут у него перед глазами.

Давайте поэтому по-прежнему опираться на интуитивно ясные ребенку понятия целого (суммы) и частей целого (слагаемые).

Цель этого цикла состоит в том, чтобы исходя из представления: **целое состоит из частей** — научить ребенка уверенно и безошибочно ВИДЕТЬ отношение «Больше НА». А поскольку «больше-меньше» — понятия относительные: если $a > b$ то $b < a$, и наоборот, **то твердо усвоив отношение «Больше НА», сводящееся к действию сложения**, в более сложном действии вычитания мы не будем испытывать никаких затруднений с понятиями «меньше на» и «на сколько больше-меньше».

Кратко как технологический принцип: в арифметике мы не знаем, что такое «меньше» — только «больше»!

Самую суть отношения «Больше НА» составляют, как я уже сказал, понятия целого и частей. Что означает фраза «5 яблок БОЛЬШЕ, чем 3 яблока»? То, что **целое** — 5 яблок (ВСЕГО) — можно разбить **на две части**: 3 яблока и 2 яблока. Аналогично по отношению к высказыванию «число 5 больше числа 3» мы можем сказать, что сумма — число 5 — состоит из двух слагаемых — чисел 3 и 2.

Вот, собственно, и все, что мы должны уяснить. Предельно просто. Но вы сами, читатель, к концу этой главы, увидите, каких удивительных результатов в решении задач можно добиться, опираясь только на ГРАЭЛ-(Суммы) и ГРАЭЛ-(Больше НА).

Приступаем к работе.

Задача 1

1. Скажите ребенку, что сегодня вы покажете ему вторую — очень важную — логическую детальку почти всех сложных задач. Что это опять будут для него не задачки, а просто один из элементов задач, и что через 2–3 дня он сам увидит, как легко из двух основных деталек (ГРАЭЛов) конструировать решения задач.

¹⁶ В математической логике опираются на отношение, выражаемое термином «предшествует» («В теории множеств... отношение $x < y$... называется отношением порядка. Для элементов, находящихся в отношении порядка $x < y$, иногда употребляется выражение « x предшествует y ») [13, с. 133]. К сожалению, — для методики! — арифметика, опираясь на отношение порядка, приходит к тому, что центральным становится отношение «меньше на» (столько-то). Когда в арифметике говорят о равенстве и неравенстве натуральных чисел, то центральным неравенством определяют неравенство «меньше на»: «Если же А есть правильная часть множества В, то говорят: число a меньше числа b — и пишут: $a < b$ » [11, с. 11]. Такое формальное следование за математической логикой нас совершенно не устраивает, так как порождает трудноустраняемые проблемы у ребенка с дифференциацией понятий «больше-меньше».

2. Пусть он прочтет задачу 1 (разумеется, вслух!). И опять он сразу скажет ответ — 8 яблок. Но вы просто **предложите**: «Давай **по-настоящему** разберемся с тем, что значит: на другой тарелке **на 3 яблока больше**, чем на первой. И научимся **правильно рисовать** это «больше».

3. **Говорите**: «Как ты узнал, что на другой тарелке 8 яблок... Ты просто прибавил к 5я ЕЩЕ 3я, верно? А если записать, то будет:

$$5я + 3я = 8я$$

то есть получается, что 8 яблок состоят **из двух частей**: 5 яблок и 3 яблока. И просто число 8 — это сумма двух слагаемых: 5 и 3, то есть:

$$5 + 3 = 8 \quad (1)$$

8 яблок **больше** 5 яблок? Число 8 **больше** числа 5?.. Правильно.

Для слова «больше» в математике есть специальный **знак «>»**, ты этот знак «>» (больше) **с 1-го класса знаешь**. И мы **вместо фразы** «8 больше 5» можем написать **отношение**: $8 > 5$ (читается: восемь больше пяти). **Отношение** — это просто **какая-то связь** двух «предметов», — **поясняете вы мимоходом**. — Наши числа **связаны друг с другом**?.. Конечно, одно из них больше другого. Мы их сравниваем. Вот мы и говорим: **отношение «Больше НА»**.

А теперь давай **не просто** напомним $8 > 5$, а как в нашей задаче — там ведь сказано, что «больше на 3 яблока». Вот и напишем:

$$8 > 5 \text{ на } 3 \quad (2)$$

Взгляни на нашу сумму (1). Что получается, видишь?..

А то, что сказать: $8 > 5$ на 3 и написать: $8 = 5 + 3$ — это **ОДНО И ТО ЖЕ!**

То есть самое важное то, что **неравенство**¹⁷ (2) и **равенство** (1) означают, что 8 «**состоит**» из 5 и 3.

Но с неравенством мы не знаем, что делать, а вот с равенством обращаться умеем — можем посчитать.

Давай поэтому договоримся навсегда: **как только** мы видим, что одно число ***a* больше** другого числа ***b* на сколько-то единиц *c***, то **сразу пишем неравенство** (3), подобное неравенству (2):

$$a > b \text{ на } c \quad (3)$$

А такое неравенство, как мы выяснили «на числах», мгновенно переводится в равенство:

$$a = b + c \quad (4)$$

То есть если число ***a* больше** числа ***b* на *c* единиц**, то это будет означать, что число ***a* «состоит»** из чисел ***b* и *c***.

Внимание!

Если — и почти наверняка! — вы увидите «**по глазам**» ребенка, что (3) и (4) для него непонятны, слишком абстрактны, — сразу же приведите несколько числовых примеров. Например, **скажите**: «Давай конкретно, на числах. У нас есть два числа: 4 и 6. Какое из них **больше**?.. Правильно, **6 больше 4**. **На сколько** больше?.. Верно, **на 2**. Значит, можем записать **отношение «Больше НА» как неравенство**:

$$6 > 4 \text{ на } 2 \quad (5)$$

А сколько будет 4 и 2?.. Можем написать **сумму (ВСЕГО) как равенство**:

¹⁷ Если строго, то (2) в виде неравенства нужно писать: $8 > 5$. Но нам удобно будет говорить: неравенство по отношению к форме (2).

$$6 = 4 + 2 \quad (6)$$

Правильно мы с тобой написали? (**Прочитываете вслух** (5) и (6)).

Так значит (5) и (6) — ОДНО и ТО ЖЕ?

Сравни-ка с нашими «буквами» (показываете на (3) и (4)): буква **a** — это наше число 6, буква **b** — число 4, буква **c** — число 2. Верно?»

Если понадобится, несколько раз проведите всю цепочку рассуждений, идущих после «Внимание!»

Предупреждение!

В зависимости от возраста ребенка и его меры восприятия будьте осторожны. Не добивайтесь, так сказать, «абсолютного» понимания, «**сразу**». В дальнейшем, при любой заминке в записи отношения «Больше НА» «в буквах» — сразу приводите числовой пример, сопоставляемый с буквенным.

4. Рисунок ГРАЭЛ(> на).

Говорите: «А теперь, смотри, как мы будем **рисовать** то, что одно число больше другого наше отношение «Больше НА». Прямо по нашей задаче.

Что мы ВИДИМ?.. — Две тарелки. Ну и рисуем их быстренько, это мы умеем».

Рисуете (рис. 15):

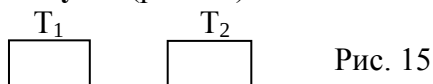
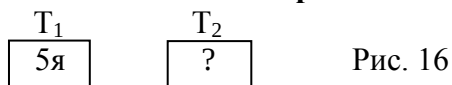


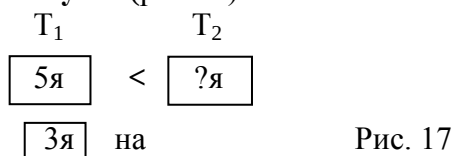
Рис. 15

Говорите: «На первой тарелке **T₁** — 5 яблок. Это мы нарисовали. А вот на второй тарелке **T₂**, мы **не знаем** сколько яблок. Это еще нужно узнать, посчитать. Давай **внутри «квадратика» поставим вопросик** — «?» (рис. 16):



«Теперь **нарисуем** то, что на второй тарелке **T₂** НА 3 яблока БОЛЬШЕ, чем на первой».

Рисуете (рис 17):



Внимание!

Ребенок может сказать, что вы неправильно нарисовали знак «больше». Что на самом деле вы нарисовали знак «меньше». Кстати, подобная ошибка восприятия является стандартной у школьников.

Связано это вот с чем.

Обычно, в школе пишут **знак «больше»** острием, **вершинкой ВПРАВО**. Например:

$$8 > 5$$

А **знак «меньше»** — острием **ВЛЕВО**. Например:

$$3 < 7$$

На нашем рис. 17 знак «больше» (ведь **T₂** больше, чем **T₁**) нарисован острием ВЛЕВО. Вот ребенок и делает вывод, что вы нарисовали знак «меньше».

Этот пример — яркая иллюстрация того, что ребенок не понимает самой сути отношения «Больше НА», того, что **большее** число «**состоит**» из **меньшего** числа и ЕЩЕ «**чего-то**» и не может увязать свое «понимание» с математической символикой.

Нарисуйте рядом с рис. 17 еще один — рис. 18, расположив «слагаемые» так, чтобы знак «больше» был обращен **острием ВПРАВО**:

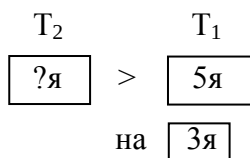


Рис. 18

Скажите: «А сейчас — правильно?..» Он, конечно же, ответит «да». **Продолжайте:** «Давай посмотрим на оба рисунка. Что значит, что T_2 больше T_1 на 3, помнишь?.. Это значит, что T_2 «состоит» из T_1 (5я) и еще 3я. У нас на рис. 18 как раз и ВИДНО: с одной стороны (слева) — T_2 , а с другой стороны (справа) $T_1 = 5я$ и ЕЩЕ 3я.

Знак «больше» своим **острием** как раз и **показывает, из чего «состоит» T_2 .**

Сравни с рис. 17.

Опять, с одной стороны (теперь уже справа) — T_2 , а с другой стороны (теперь уже слева) $T_1 = 5я$ и ЕЩЕ 3я.

И знак «<» опять же **острием показывает, из чего «состоит» T_2 .**

Вывод какой?.. А тот, что я правильно нарисовал знак «больше» в **обоих случаях**. То есть нужно смотреть **не на то** — вправо или влево направлено острие знака «больше», а запомнить, что **со стороны «раструба» находится большее число, а со стороны острия — меньшее.**

Внимание!

Напомните ребенку, что в арифметике мы «не знаем», что такое «меньше». Мы знаем только «больше»!!!

5. Наконец, вы **говорите:** «А теперь нарисуем все вместе — «Графику», «Алгебру» и «Арифметику». И воспроизводите рис 19:

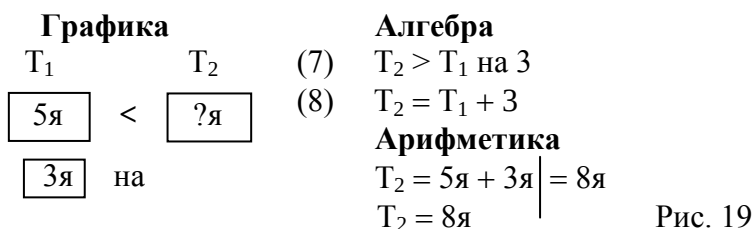


Рис. 19

Внимание!

Последовательность «ввода» всех трех блоков:

1. Нарисовав «Графику», вы **говорите:** «Переведем «Графику» в «Алгебру». — После этого вы выписываете неравенство (7) в «Алгебре» и добавляете: — Посмотри на «Алгебру», неравенство, которое я написал (7). Четко видно, что это знак «больше» острием ВПРАВО, как обычно в школе.

Сравни с «Графикой». На «Графике» наш знак — острием ВЛЕВО.

Но все равно это знак «больше», хоть и выглядит как знак «меньше», т. к. T_2 больше, чем T_1 .

Теперь ты уже не спутаешь знаки. **ВИДНО, что из чего состоит** — большее число находится со стороны «раструба», а меньшее — со стороны острия».

2. **Продолжаете:** «Мгновенно неравенство переводим в равенство».

Пишете равенство (8).

3. **Говорите:** «Ну вот, нам все знакомо — осталось в «Арифметике» подставить содержимое T_1 и посчитать».

Остальные задачи этого цикла построены на том же ГРАЭЛ(> на).

Задачи 1–8 дословно повторяют аналогичные задачи цикла I, только вместо суммы мы рисуем отношение «Больше НА». Сделано это для того, чтобы ребенок закрепил умение автоматически выбирать имена слагаемых.

Все технологические пояснения к циклу I используются и в цикле II. Ребенок должен уже уметь относительно быстро набросать «Графику» с графэлементом «Больше НА».

Сосредоточиваемся на:

ВИ; ДЕНИИ отношения «Больше НА». Достигается это направляющими вопросами, типа: что видим?.. видим «Больше НА»? (перемежая полным вопросом: видим отношение «Больше НА»?).. что больше чего?..

В «Алгебре» **обязательно пишем сначала неравенство** (см. рис. 19, (7)) **и только потом равенство** (8).

В «Графике» и «Алгебре» **постоянно следим за ПРАВИЛЬНЫМ** написанием знака «больше».

В «Графике» **обязательно пишем** предлог «на».

Неторопливо стремимся к тому, чтобы расположение всех 3 блоков решения на листе было четким и компактным (но не тесным). За образец берем рис. 19 **и ваш собственный опыт решения задач средствами ГРАН. — Ведь вы сами, читатель, нарисовали ВСЕ задачи?!**

При малейшей заминке, неточности, сомнении — сразу говорите: «А что больше?.. Что из чего состоит?.. Напиши сначала неравенство с «Графики», а потом переведи в равенство». — **Как технологический прием.**

Стандартная ошибка в рисовании ГРАЭЛ(> на) (рис. 20)

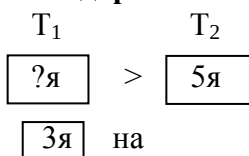


Рис. 20

Смысл ошибки ясен из рис. 20. Она **отражает непонимание** ребенком того факта, что **большее** число (T_2) **состоит** из **меньшего** числа (слагаемое T_1) и ЕЩЕ «чего-то» (слагаемое 3я).

Ликвидируется уже знакомыми **направляющими вопросами**: «Что из чего состоит? Тарелка-1 из Тарелки-2 и ЕЩЕ 3-х яблок или Тарелка-2 — из Тарелки-1 и 3я? **Что больше чего?** По тексту у нас T_2 больше T_1 , так? Значит, T_2 **состоит** из...»

Как избежать путаницы «больше-меньше», которая возникает при поверхностном восприятии знаков «>» или «<», когда ребенок ориентируется не на смысл отношения, а на «направление острия» знака (право-лево), мы с вами обсудили выше.

Далее. Обратите внимание на задачи 9–13. Тексты задач специально перегружены «словесным мусором» Это уже не должно (почти) составлять какую-либо трудность для ребенка. Задачи служат той цели, чтобы ребенок **ВИДЕЛ** отношение «Больше НА» в ряду **синонимичных** выражений: дороже (на), старше (на), дольше (на), выше (на), дальше (на). Синонимы, в конечном итоге, не должны становиться препятствием в процессе осмысления задачи.

Резюме Циклов I и II.

Мы узнали, что **действие сложения**, выросшее из счета, — первично, неопределимо.

С ним неразрывно связаны первичные понятия суммы и слагаемых, в которых и выражается действие сложения. Для суммы мы ввели **первый** из графических элементов — **ГРАЭЛ-(Σ)**.

Отношение «Больше НА», отражающее упорядоченность ряда натуральных чисел, также является первичным. Оно углубляет понятие суммы. Для него введен второй графэлемент — ГРАЭЛ(> на).

С точки зрения ГрафАнализа, для нас наиболее важным является вот что. **Большее** число в отношении «Больше НА» есть СУММА двух слагаемых. Тем не менее, вы, наверное, обратили внимание на то, что сумма (ВСЕГО) и «Больше НА» рисуются совершенно по-разному: два **разных** ГРАЭЛа. **Большее** число в «Больше НА» рисуется **не как сумма, а как слагаемое**. И это не случайно. В дальнейшем вы убедитесь в том, что большее число в ГРАЭЛ(> на) практически всегда выступает в роли слагаемого, а не суммы. Более того, сумма тоже часто является слагаемым. Поэтому мы с вами постоянно будем пользоваться «вопросами ви;’дения»: «Видим слагаемые?.. Сколько их?..»

Вы заметили, несомненно и то, как подробно — может показаться на первый взгляд, что до утомительности подробно — я расписываю каждый ваш шаг: «скажите», «нарисуйте» и т. п. На самом деле вы, разумеется, не должны учить наизусть все технологические фразы. Но рисуя задачи «пошагово», вы сами почувствуете дух ГрафАнализа, и сами **увидите**, что **на первых порах** ничего нельзя пропускать. Два первых — важнейших! — ГРАЭЛа нужно вводить только последовательно, обращая внимание ребенка на все «мелочи». Конечно же вы будете говорить «своими словами», но цель — научить ребенка ВИДЕТЬ ГРАЭЛы — будет основной и ее достижение возможно только на уровне технологических приемов.

В последующем мои комментарии будут кратки, поскольку я буду опираться на знание и усвоенность технологических приемов первых 2-х циклов.

И последнее. Не будьте **слишком серьезны** во время занятия. 40 минут проходят быстро, но они наполнены интенсивнейшей работой. Смейтесь, шутите. У вас наверняка найдется в запасе пара-другая реплик, типа: «Ну, ты даешь!», «Шестью восемь — сорок два? — Великолепно! Новое слово в математике!» и т. п. Однако ни в коем случае не подавляйте ребенка фразами, сводящимися к тому, что он «дубина» и им подобными.

Занятие должно быть для ребенка источником радости и зарождающейся уверенности в собственных силах. — **Об этом я говорю как об одном из важнейших технологических приемов!**

Глава III Вычитание

Цикл I. Известны сумма и одно слагаемое. Найти второе слагаемое (ГРАЭЛ-(Δ))

1. На блюдо с 2-х тарелок положили 8 яблок.

Причём с одной тарелки положили 5 яблок.

Сколько яблок положили с другой тарелки? ☐

2. В бочку из 2-х коробок положили 80 яблок.

Причём из одной коробки положили 30 яблок.

Сколько яблок положили из другой коробки? ☐

3. В магазин две машины привезли 800 ящиков конфет. Причём одна машина привезла 500 ящиков конфет. Сколько ящиков конфет привезла вторая машина? ☐

4. Саша и Маша купили упаковку спичек за 250 копеек. У Саши было 100 копеек. Сколько денег добавила ей Маша? ☐

5. Два автобуса проехали 190 километров. Один автобус проехал 102 километра. Какое расстояние проехал другой автобус? ☐

6. От реки до озера путешественник дошёл за 8 часов. Сначала он добрался до горы за 5 часов. Сколько времени ему понадобилось, чтобы дойти затем от горы до озера? ☐

7. За две недели завод выполнил $\frac{13}{20} (\frac{25}{36})$ заказа, причём за первую неделю было выполнено

$\frac{5}{20} (\frac{5}{48})$. Какую часть заказа завод выполнил за вторую неделю? ☐

Ответы: 1) 3 я.; 2) 50 я.; 3) 300 я.; 4) 150 к.; 5) 88 км; 6) 3 ч.; 7) $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ — 5-й класс ($\frac{85}{144}$ —

6-й класс)

Сценарий.

Пояснения общего характера.

Прочитайте вместе с ребенком (от 3-го класса и старше) пункт «Немного о вычитании».

Особенно обратите его внимание на то, что хотя ГРАС-1 (рис. 1) и ГРАС-2 (рис. 2) совпадают — по внешней форме это ГРАЭЛ-(Суммы); совпадает и «Алгебра»: $B = T_1 + T_2$, но в (1) известны слагаемые **и неизвестна сумма**, а в (2) — известны сумма, одно слагаемое **и неизвестно другое слагаемое**.

(Вы все время будете спрашивать ребенка: «Что неизвестно: сумма или слагаемое?... А раз неизвестно слагаемое — действие вычитания».)

Само собой разумеется, — вы скажете ему, что задачи первых трех циклов решаются в уме, но действие вычитания **очень коварно**: стоит **чуть усложнить** задачу, немного невнимательности — и готовенькая ошибка!

Вычитание — гораздо сложнее, чем сложение (как деление гораздо сложнее умножения: ведь умножение — это сложение). Но мы вовсе не по этой причине предпочитаем рисовать суммы, и ГрафАнализ «**прямым экспериментом**» подтверждает это. «Графика» **сама рисуется** в виде сумм именно потому, что в «арифметике только одно действие — сложение».

Обратите внимание ребенка на этот важнейший факт! ГрафАнализ — не нечто искусственное, придуманное. Только потому ГРАН и является столь мощным и легкодоступным инструментом, что он отражает реальную логику арифметики, построенную на счете, на сложении, на суммах и слагаемых.

Исторически арифметика возникала как первый раздел математики (раньше геометрии) из счета. Потом, по мере усложнения практических задач человека, нужно было научиться не только считать — «сколько всего?» (присчитывать), но и — «сколько останется» (отсчитывать).

Однако: «присчитываем» ли мы, «отсчитываем» ли — работаем только с суммами и слагаемыми. Нужды нет, что в вычитании **сумма называется** уменьшаемым, **одно из слагаемых** — вычитаемым, а **другое слагаемое** — разностью. Это всего лишь следствие развития математики **как языка**: для более тонкого и полного отражения физической реальности необходимо расширение словарного запаса, усложнение грамматики и синтаксиса.

А суть остается та же: суммы и слагаемые!

Посмотрите сами, читатель:

слагаемые			сумма	
3	+	5	=	8
8	–	5	=	3
8	–	3	=	5

уменьшаемое вычитаемое разность
сумма слагаемое слагаемое

Видим: уменьшаемое — это сумма, вычитаемое и разность — это слагаемые.

Вот почему в ГрафАнализе — **хотим мы того или не хотим!** — в «Графике» у нас только суммы и слагаемые.

Внимание.

Вы должны очень глубоко **прочувствовать** сей факт, читатель. Только тогда у вас начнут появляться **сами** какие-то «мелкие» дополнения, реплики, замечания, которые явятся для ребенка тем вовремя сказанным нужным словом, без которого невозможно живое общение, «учительство», и которые в принципе невозможно (да и не нужно) предусмотреть даже в **технологии** обучения.

В цикле I вводится **четвертый** графический элемент — **ГРАЭЛ-(Вычитания)** или **ГРАЭЛ-(Разности)**.

Обозначение: ГРАЭЛ-(Δ)¹¹.

Рисовать будем так, как на рис. 4.

Графика

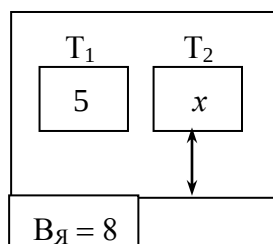


Рис. 4

Алгебра

$$B = T_1 + T_2$$

Арифметика

$$\begin{aligned} (5) \quad & 8 = 5 + x \\ (6) \quad & x = 8 - 5 \\ (7) \quad & x = 3 \end{aligned}$$

Переходим к работе.

Задача 1

¹¹ «... по латыни разность называется *differentia*; но так как буквой *d* в дифференциальном исчислении обозначается ... «дифференциал»,... то для обозначения приращения (т. е. разности. — В. Х.) переменной берется буква Δ — «дельта» греческого алфавита, соответствующая латинскому *d*» [21, с. 34].

Поскольку вы прочитали с ребенком пункт «Немного о вычитании», в котором идея вычитания иллюстрируется как раз на задаче 1, то попросите его просто быстренько воспроизвести рис. 3 (с текста задачи, разумеется, а не перерисовывая рис. 3).

Когда в «Арифметике» он напишет $8 = 5 + x$ — остановите его и **скажите**: «Посмотри, что мы написали. Слева у нас число, справа — число и буква (алгебраическое выражение). Левая и правая части **соединены знаком «=»**. Такая конструкция называется **равенство**. Если равенство **числовое**¹², то мы можем посчитать слева и справа и посмотреть: верное оно или неверное.

Но **наше равенство не числовое**, т. к. справа есть еще и буква x — неизвестная величина (мы же **договорились** содержимое **неизвестного слагаемого** обозначать буквой x).

Такое **равенство**, содержащее **неизвестную величину**, называют **уравнением**.

Как решать его — мы с тобой уже знаем: раз нужно найти неизвестное слагаемое, значит — по определению! — действие вычитания».

И **пишете** вслед за уравнением $8 = 5 + x$ **его решение**: $x = 8 - 5$.

Продолжаете: «А уж вычесть 5 из 8!.. Само собой — 3».

Пишете окончательное **решение**: $x = 3$ (я).

У вас получится «Арифметика» рис. 4.

Обратите внимание на некоторую вольность, которую я себе позволил, называя решением уравнения и $x = 8 - 5$ и $x = 3$.

Если строго, то решением уравнения (5) является только (7), т. к. **решить уравнение** (5) — значит **найти те значения x** , которые удовлетворяют равенству (5), т. е. при подстановке — **обращают уравнение в верное числовое равенство** (при $x = 3 \Rightarrow 8 = 5 + 3 \Rightarrow 8 = 8$ — верное числовое равенство).

То есть решение уравнения — это число (если совсем строго).

Но в более широком смысле решить какую-либо задачу означает **написать равенство**, в котором, скажем так, слева — неизвестная, искомая величина, а справа какое-либо алгебраическое или числовое выражение, которое **уже можно посчитать** (конечно неизвестная может быть и справа)! Например, **решением** физической задачи на определение скорости **будет формула** (равенство) $V = V_0 + a \cdot t$, полученная простейшими преобразованиями из определения ускорения, **при условии**, что V_0 , a и t нам известны (т. е. подставив значения этих величин в формулу скорости, мы сможем **посчитать** искомую скорость).

Строгость математической лексики отрабатывается годами, а для нас сейчас — при первом появлении уравнения — важно под его решением понимать **действие**, которым уравнение решается. В записи $x = 8 - 5$ (которую нужно — прежде всего! — твердо помнить и, в меру доступности для ребенка, — понимать) отражается как смысл действия вычитания (на котором построено решение уравнения $8 = 5 + x$), так и само решение «в общем виде» (в виде «формулы»).

В дальнейшем так и будем говорить: а ну-ка напиши решение простейшего уравнения, подразумевая «формулу» его решения (об этом — в п. «Немного об уравнениях»).

Внимание.

Не питайте никаких иллюзий, читатель, **относительно понимания** смысла действия вычитания!

Ребенок не поймет глубинного смысла вычитания ни в 5-м, ни в 6-м классах (за редким исключением), не говоря уж о 3-м или 2-м (в конце которого вводится понятие — нет, не

¹² «Числовое выражение — это запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий... Два числовых выражения, соединенные знаком «=» образуют числовое равенство. Если значения левой и правой частей равенства — одно и то же число, то равенство называется верным» [22, с. 4–5].

уравнения; уравнение только называется: « $x + 6 = 15$ — это уравнение» [18, с. 196] — решения уравнения: «Решить уравнение значит найти неизвестное число» (там же)¹³. Единственное, что мы можем (и должны) сделать: «впечатать в память» решения простейших уравнений (решения — несколько тавтологически — как формулы решений) и «пунктирное» восприятие того, что вычитание — поиск неизвестного слагаемого. Трудно объяснить точный смысл фразы «глубинное понимание». Во всяком случае, легкость владения формальными преобразованиями зачастую скрывает факт непонимания смысла арифметических действий, что влечет за собой далеко идущие последствия.

Пожалуй, читатель, лучше всего опереться на ваше собственное первое прочтение «Немного о вычитании». Кое-что, наверняка, явилось для вас (для большинства из вас, как я полагаю исходя из практики) довольно неожиданным. Но вам хватило пары страничек для того, чтобы столь «знакомое» вычитание улеглось на сей раз ясным пониманием. Не забывайте однако: вы — взрослый человек, вы этих уравнений (и не только простейших) перерешали в свое время немерянно. Вы к ним **привыкли** давным-давно. И стоило чуть-чуть вскрыть первооснову...

Вспомните свое прочтение, и вы согласитесь: не стоит добиваться невозможного — глубинного понимания, до 6-го класса включительно. Только «впечатывание в память» и полунтуитивное восприятие форм решения простейших уравнений.

Однако, продолжим задачу 1.

Может показаться, что об уравнениях стоило б рассказать в соответствующем месте. Но нам с вами придется все время сталкиваться с первым уравнением типа $8 = 5 + x$ и вы, читатель, уже сейчас должны быть готовы, по мере возможности, отвечать на вопросы ребенка, и — гораздо важнее! — понимать значимость того, что вы делаете, осваивая с ребенком ГРАЭЛ-(Разности).

Итак, вернемся к рис. 4.

Вы объяснили ребенку блок «Арифметики» (разумеется, не путем дословного пересказа всего вышеизложенного, а лишь в той мере, в которой он воспринимает. В конце концов все вышесказанное, на самом деле, больше предназначено для вас, для вашей минимальной вооруженности. А ребенку, в большинстве случаев, вначале окажется достаточным знать — просто «знать», помнить, — что (5) и (6) — это одно и то же, и что (6), как решение уравнения (5), получается по смыслу действия вычитания.

1. Обратите внимание ребенка на стрелочку в «Графике». Она соединяет неизвестное слагаемое T_2 («с иском») и нижнюю границу известной суммы (Всего, В).

Стрелочка рисуется обязательно!

Она уже в «Графике» показывает, что ищется неизвестное слагаемое.

2. Ни в коем случае не позволяйте обходиться без блока «Алгебры»! Ведь наша основная цель: **сумму с «Графики» считать в сумму же в «Алгебре».**

3. «Арифметика» цикла I должна **расписываться полностью**, т. е. уравнение (5) — в виде суммы, его решение (6) — в виде разности (формулы решения), его окончательное (математическое) решение (7) — как число, которое при подстановке обращает уравнение (5) в верное числовое равенство ($8 = 8$). Обязательно проверяйте подстановкой в (5) — правильно ли посчитали, получается ли **верное числовое равенство** (т. е. является ли найденный x корнем уравнения).

4. Тем более ни в коем случае (объединяя п. 2 и п. 3) **не позволяйте** записывать решение **всей** задачи «школьным арифметическим способом»: $8 - 5 = 3$! Сначала — только «Алгебра», **только сумма**.

¹³ А впервые уравнение $3 + x = 9$ появляется уже в первой половине 1-го класса [1, стр. 62].

Напомните ребенку, что речь идет не о том, чтобы «в уме посчитать» простейшую задачу 1-го класса, а чтобы научиться **не раздумывая и безошибочно** рисовать логическую детальку — графэлемент вычитания. Все время повторяйте, что самое важное в этом элементе — **видеть** в «Графике» и «Алгебре» **вычитание в виде сложения**.

Обосновывайте это тем, что:

- при сложении гораздо труднее ошибиться, чем при вычитании;
- в арифметике, как он уже знает, есть только сложение;
- и что он убедится **в «безошибочности сумм»** и **«в коварстве вычитания»** чуть погодя, как только задачи, после цикла III, начнут усложняться.

Вот, пожалуй, и все, что нам требуется для цикла I.

Как видите, тексты задач и данные дословно повторяют цикл I, главы II. Поэтому ни об именах слагаемых, ни о «размерностях» не стоит и говорить: все давно знакомо. А вот постоянно повторять вслух (в каждой задаче): «Видим, что x — неизвестное слагаемое?... Значит (пауза 1–2 секунды в ожидании ответа ребенка)... Верно, действие вычитания (6)».

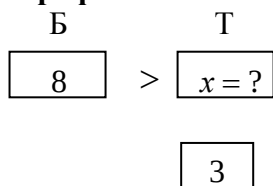
Цикл II. Меньше НА

1. На блюде лежит 8 яблок.
На тарелке на 3 яблока меньше.
Сколько яблок лежит на тарелке? (•)
 2. В одной коробке лежит 80 яблок.
В другой коробке на 30 яблок меньше.
Сколько яблок в другой коробке? (•)
 3. В магазин одна машина привезла 800 ящиков конфет, а другая на 500 ящиков меньше.
Сколько ящиков конфет привезла вторая машина? (•)
 4. У Саши было 25 рублей, а у Маши на 10 рублей меньше. Сколько денег было у Маши? (•)
 5. Один автобус проехал 190 километров, а другой на 102 километра меньше чем первый.
Какое расстояние проехал другой автобус? (•)
 6. От реки до горы путешественник дошёл за 8 часов. Чтобы дойти от горы до озера ему понадобилось на 5 часа меньше. Сколько времени он шёл от горы до озера? (•)
 - 7). В банку налили $3\frac{8}{25}$ кг мёда. Масса пустой банки на $\frac{7}{25}(1\frac{4}{15})$ кг меньше массы мёда. Определите массу банки. (•)
- Ответы: 1) 5 я; 2) 50 я; 3) 300 я; 4) 15 р; 5) 88 км; 6) 3 ч; 7) $3\frac{1}{25}$ кг — 5-й класс ($2\frac{4}{75}$ кг — 6-й класс).

Задача 1

В цикле II, как следует из названия, рассматривается понятие «меньше на». Однако это понятие реализуется давно нам знакомым основным **отношением** «Больше НА» (рис. 5).

Графика



Алгебра

$$\begin{aligned} B &> T \text{ на } 3 \\ B &= T + 3 \end{aligned}$$

Арифметика

Рис. 5

$$\begin{array}{l|l} 8 = x + 3 & \\ x = 8 - 3 & = 5 \end{array}$$

Поясните ребенку, что если одно число **меньше** другого на сколько-то, то второе число **больше** первого на столько же (в этом проявляется **относительность** понятий «больше-меньше»).

Сказать: 8я БОЛЬШЕ 5я НА 3я означает **совершенно то же**, что сказать: 5я МЕНЬШЕ 8я НА 3я.

Поэтому — **и самое важное!** — скажите ему, что как только он встретит в задаче «меньше», то сразу же должен **переформулировать** для себя «меньше» в «больше», т. е. спросить себя: «А что; больше чего?» — поскольку «что такое меньше мы не знаем»!

И... все.

Да-да, все, читатель. Стоит только научиться ребенку, встречая «меньше», говорить себе: «А что больше?» — и он навсегда избавлен от ошибок, **провоцируемых с первого класса**

понятием «меньше на» (ведь слагаемые, связанные отношением «Больше НА», он превосходит видит)!

Несколько замечаний.

1. В каждой задаче цикла спрашивайте его: «Скажи — **вслух!** — **что больше?**»
2. Задача, как на рис. 5, рисуется полностью: «Графика», «Алгебра», «Арифметика». **Пояснение для ребенка:** цель та же, что и в ГРАЭЛ-(Разности) — быстро, четко, правильно, одним словом автоматически, рисовать «меньше» в виде ГРАЭЛ-(Больше НА), и писать не задумываясь решение простейшего уравнения («набить руку»).
3. Как и в цикле I, **ни в коем случае не позволяйте** ему сразу писать разность в арифметической форме ($x = 8 - 3$) — только сумма, только «Алгебра» сначала. Если он не доведет **до автоматизма перевод** «меньше» в «Больше НА», рисование сумм в «Алгебре» (соблазнившись простотой задачек), то **весь ГрафАнализ пойдет прахом**. Как только задачи начнут усложняться (а они, вы помните, **в принципе** построены на суммах), попытка **сразу** писать разности (**по школьной привычке**) неизбежно повлечет ошибки.

Иными словами: стремление миновать «Алгебру» в виде сумм и «считывать» с «Графики» сумму в разность в «Арифметике» — это **нарушение технологических требований ГрафАнализа**.

Вы, читатель, разумеется, знаете, чем чревато нарушение технологии — **браком**. Но в данном случае бракованную деталь не выкинешь. Этим «браком» (крайне трудноустраняемым) окажется ваш ребенок!

В любом случае проведите сопоставление задачи 1, цикла II, главы II (рис. 6) и задачи 1 данного цикла (рис. 7).

ГРАС-1		$T_2 = T_1 + 3$
T_1	T_2	$T_2 = 5 + 3$
5	$<$?	

3

Рис. 6

ГРАС-2		$B = T + 3$
T	B	$8 = x + 3$
$x = ?$	$<$ 8	$x = 8 - 3$

3

Рис. 7

Еще и еще раз — пусть он услышит: на рис. 6 — отношение «Больше НА» (на Тарелке-2 НА 3я БОЛЬШЕ, чем на Тарелке-1).

На рис. 7 — **то же самое отношение** «Больше НА», хотя в задаче используется **понятие** «меньше на» (на Тарелке НА 3я МЕНЬШЕ, чем на Блюде).

Но стоит нам **переформулировать**: если на Тарелке **меньше**, чем на Блюде, то **значит** на Блюде **больше**, чем на Тарелке, — и **мгновенно рисуем** ГРАЭЛ-(Больше НА) — рис. 7.

Цикл III. На сколько БОЛЬШЕ/МЕНЬШЕ — разностное сравнение

1. На блюде лежит

8 яблок.

На тарелке

5 яблок.

На сколько яблок на блюде больше, чем на тарелке?

(*)_Б

2. В одной коробке лежит

80 яблок.

В другой коробке

30 яблок.

На сколько яблок в другой коробке меньше, чем в первой?

(•)_М

3. В магазин одна машина привезла 800 ящиков конфет, а другая 500 ящиков. На сколько ящиков конфет меньше привезла вторая машина?

(•)_М

4. У Саши было 25 рублей, а у Маши 15 рублей. На сколько больше у Саши денег, чем у Маши?

(*)_Б

5. Один автобус проехал 190 километров, а другой 102 километра. На сколько километров меньше проехал другой автобус?

(•)_М

6. От реки до горы путешественник дошёл за 8 часов. Чтобы дойти от горы до озера ему понадобилось 3 часа. На сколько дольше он шёл от реки до горы?

(*)_Б

Задачи с синонимичными выражениями.

7. Пять книг по математике стоят 150 рублей, а три килограмма бананов — 65 рублей. Что дороже и насколько?

(*)_Б

8. Котенку Леве 7 месяцев от роду, а коту Егору — 36 месяцев. Кто из них младше и на сколько?

(•)_М

9. Зимой, в южной части неба, мы можем видеть красивейшее созвездие Ориона. Две его главные звезды называются Бетельгейзе и Ригель. Астрономы выяснили, что расстояние от Солнца до Бетельгейзе 300 световых лет, а до Ригеля — 540 световых лет. Какая из звезд ближе к Земле и на сколько?

(•)_М

10. Если африканский лев встанет на задние лапы, то его рост будет 250 см. А вот рост котенка Левы — 58 см. Кто выше, и на сколько?

(*)_Б

11. Самая большая планета солнечной системы — Юпитер — движется по орбите со скоростью 13 км/с. Самая близкая к Солнцу планета — Меркурий — бежит по орбите со скоростью 49 км/с. Какая из планет быстрее летит по своей орбите и на сколько?

(•)_М

Примечание: можно было бы еще добавить синонимы шире, толще и т. п. как синонимичные выражения для «Больше НА», но вряд ли стоит стремиться объять необъятное.

12. Миша поймал две рыбки. Масса одной $3\frac{7}{10}$ кг, а другой — $1\frac{9}{10}(1\frac{3}{8})$ кг. На сколько масса второй рыбки меньше, чем первой?

(•)_М

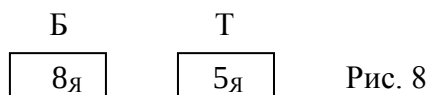
Ответы: 1) 3 я.; 2) 50 я.; 3) 300 я.; 4) 10 р.; 5) 88 км; 6) 5 ч.; 7) на 85 р. (книги дороже); 8) на 29 м (котенок младше); 9) на 240 св. лет (Бетельгейзе ближе); 10) на 192 см (лев выше); 11) на 36 км/с (Меркурий быстрее); 12) $1\frac{8}{10} = 1\frac{4}{5}$ кг — 5-й класс ($2\frac{13}{40}$ кг — 6-й класс).

Сценарий.

В цикле рассматривается так называемое разностное сравнение, т. е. решается задача: выяснить **на сколько больше** или **меньше** одно число, чем другое. Мы с вами убедимся, что ничего кроме отношения «Больше НА» нам не понадобится.

Задача 1

По условию известны два слагаемых: Б(людо) и Т(арелка). Нарисуем их (рис. 8).



Видим, что на Б(люде) БОЛЬШЕ яблок, чем на Т(арелке) — 8 яблок **больше**, чем 5 яблок.

Из непосредственного сравнения двух чисел (**содержимого** слагаемых: $B = 8я$ и $T = 5я$) **сам собой**, автоматически возникает **верный знак** «>» (больше) между самими слагаемыми:

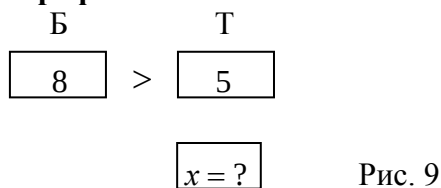
$$B > T$$

А поскольку мы уже привыкли, что не просто $B > T$, а «Больше НА», то есть:

$$B > T \text{ на } \boxed{\text{сколько-то}}$$

и договорились обозначать неизвестное слагаемое буквой «х», то можем без труда нарисовать нашу задачу, используя все тот же ГРАЭЛ-(> на) (рис. 9).

Графика



В «Алгебру» «считываем» неравенство из «Графики» знакомым образом:

$$B > T \text{ на } x \Leftrightarrow B = T + x.$$

И если теперь подставим значения **Б** и **Т**, то получим «Арифметику» совершенно тождественную той, которая возникала в предыдущих двух циклах:

$$8 = 5 + x \text{ — уравнение}$$

$$x = 8 - 5 \text{ — решение уравнения.}$$

Обратите внимание ребенка на то, что если бы вопрос задачи был: «На сколько яблок на тарелке **меньше**, чем на блюде?», то переформулировав его, т. е. сказав себе: «Раз на тарелке **меньше**, то на блюде — **больше**», — мы мгновенно получаем ту же самую Графику (рис. 9).

Итак, «на сколько больше» или «на сколько меньше» для нас реализуется одним и тем же отношением «Больше НА».

Внимание.

Хоть мы и договорились в цикле I через «х» обозначать содержимое неизвестного слагаемого, но на самом деле только здесь, в разностном сравнении, у нас впервые возникла **реальная необходимость** в «иксе»: т. к. у слагаемого «на сколько больше-меньше» **нет имени** — мы просто **вынуждены** дать слагаемому имя, являющееся одновременно и содержимым этого слагаемого.

Однако введение «икса» в цикле I преследовало цель не только иллюстративную. Поскольку появилось первое уравнение $8 = 5 + x$, следующее из $B = T_1 + T_2$ (рис. 4), то:

1. надо **подготовить** ребенка **к ви; дению** этого уравнения и его решения;
2. **максимально уменьшить разрыв** между содержательно прозрачной «Алгеброй» и стандартной школьной «Арифметикой» (с **безликими «иксами»**), так сказать — создать фоновое, алгебраически содержательное, наполнение «икса»;
3. **мимоходом** «впечатывать в память» решение уравнения.

Еще раз внимание.

С этого момента у нас появляется возможность изменить наш блок «Алгебры»: мы **действительно** можем начать записывать решение уравнения **в общем виде**, в виде формулы. Ведь $x = 8 - 5$ — это «псевдоформула», формула с уже подставленными значениями, это полностью блок «Арифметики», хотя и участвует буква «х». Посмотрите, читатель:

Алгебра		Арифметика	
$B = T + x$	(1)	$8 = 5 + x$	(1')
$x = B - T$	(2)	$x = 8 - 5$	(2')
Решение уравнения (1) в общем виде, по смыслу вычитания		арифметическое «числовое» решение по смыслу вычитания	

Рис. 10

В циклах I–II мы научились в «Арифметике» свободно записывать решение уравнения (1') в числовой форме (2'). Небольшое «усилие восприятия» — и ребенок так же свободно будет писать решение уравнения (1) в общем виде (2). Во всяком случае, как показывает практика, начиная с 3-го класса дети легко переходят на запись (2).

Поэтому с задачами данного цикла мы работаем следующим образом:

1. Нарисовав «Графику» в виде ГРАЭЛ(> на) (рис. 9), вы **пишете** первую строку:

Алгебра		Арифметика	
$B = T + x$	(1)	$8 = 5 + x$	(1')

и **говорите** ребенку, что здесь для него все ясно.

2. Затем **спрашиваете**: «Умеем мы решать уравнение (1')?.. Ну еще бы, после первых-то двух циклов!» И **пишете в «Арифметике»** вторую строчку — решение уравнения (**не забывая вслух проговаривать** — это должно идти «автоматом»: «Неизвестное слагаемое? — Значит, вычитание»):

Алгебра		Арифметика	
$B = T + x$	(1)	$8 = 5 + x$	(1')
		$x = 8 - 5$	(2')

3. **Говорите**: «Посмотри, мы умеем не задумываясь решать уравнение «в числах» (2'). Разве мы не можем то же самое сделать с «буквами»? Как бы ты записал решение уравнения (1) «в буквах»?.. «х» — что такое?.. Верно, неизвестное слагаемое. Значит...» **Почти наверняка** ребенок **сам** напишет в «Алгебре» во второй строке $x = B - T$. Ну а если (что крайне маловероятно) возникнут затруднения, то вы сами допишете решение так, как на рис. 10. **Обязательно** попросите ребенка сравнить «Алгебру» и «Арифметику» рис. 10. Сравнить — в смысле: все ли понятно? **видит ли** он действие вычитания «в буквах», т. е. (2)?

Задача 7

Лишние данные: пять книг, три килограмма.

Задачи 7–11

Цель использования задач с синонимичными выражениями та же, что и в главе II, цикл II.

О букве «х».

Реальная необходимость в «иксе» возникает у нас только в разностном сравнении (на сколько больше-меньше). Однако в главе «Вычитание» мы будем использовать букву «х» еще и для обозначения содержимого последнего — искомого — слагаемого.

В «Графике» всегда будет **видно** это слагаемое (оно же будет фиксироваться в вопросе задачи). А поскольку вводя действие вычитания мы пришли к первому уравнению, то мне кажется разумным для содержимого неизвестных слагаемых, включая промежуточные суммы, по-прежнему использовать знак «?», а для искомого слагаемого — букву x . Причем не только для того, чтобы подчеркнуть действие вычитания (например, цикл V, задача 2 — действие вычитания используется трижды), но и для того, чтобы видеть в «Графике»: что именно надо найти. Буква «х» в качестве содержимого искомого слагаемого будет **зримо указывать нашу цель** в процессе решения. «Выход» же на букву x в нужном слагаемом будет осуществляться автоматически. Вы, читатель, разумеется **уже привыкли** к тому, чтобы рисуя «Графику» поэлементно, в виде последовательности ГРАЭЛов, сразу же заполнять слагаемые ГРАЭЛов: известно — вписываем число, неизвестно — ставим знак «?».

Замечание.

Поскольку «Ветвь математики, занимающаяся уравнениями, называется алгеброй» [23, с. 83], то может возникнуть вопрос: почему на рис. 10 уравнение (1) я отношу к «Алгебре», а уравнение (1') — к «Арифметике». Уравнение (1) М. Я Выгодский относит к буквенным, а (1') — к числовым и считает, что «четкое различие между решением числового и решением буквенного уравнения... важно и с научной и с педагогической точки зрения» [10, с. 157].

Я полностью разделяю этот взгляд, особенно с учетом того, насколько важно в дальнейшем в любой прикладной области умение решать уравнения в общем виде (т. е. буквенные).

Резюме циклов I–III.

1. ГрафАнализ не является чем-то искусственным и надуманным по той причине, что он отражает **реальную логику** арифметики, построенную на счете, сложении, на суммах и слагаемых. Вследствие этого «Графика» **сама рисуется** в виде сумм.

2. С точки зрения «Графики» и сложение, и вычитание реализуются **одним и тем же** ГРАЭЛ-(Суммы). Разница проявляется далее — в «Алгебре», да и то **лишь после того**, как мы первоначально «считали» **сумму**. ГРАЭЛ-(Разности) — ГРАЭЛ-(Δ) как отдельный графический элемент вводится лишь «для удобства счета». Он позволяет естественным и предельно наглядным, предметным образом (экспериментальным путем) ввести логический элемент арифметики — **действие вычитания как нахождение неизвестного слагаемого** и получить решение первого уравнения из определения действия вычитания.

3. **Один** ГРАЭЛ-(Больше НА) реализует **четыре логических элемента арифметики**: больше на, меньше на, на сколько больше?, на сколько меньше?, экспериментально подтверждая тем самым утверждение: «в арифметике мы **не знаем** что такое «меньше», только — «больше».

4. Буква x как обозначение неизвестной величины в уравнении **необходимым** образом возникает только в разностном сравнении для обозначения как имени, так и содержимого «безымянного» слагаемого «на сколько меньше-больше».

5. **Помнить**, что считывать «Графику» сразу в разность — **нарушение технологических требований ГрафАнализа** (цикл II, задача 1, п. 3)!

Совет.

Постоянно, «в фоновом режиме», должна выполняться задача **по отработке** («впечатыванию в память») **математической лексики**.

В сложении

$$8 = 5 + x$$

$$Б = Т + x$$

В вычитании

$$x = 8 - 5$$

$$x = Б - Т$$

Необходимо периодически **требовать** от ребенка **произнесения вслух** соответствующих математических терминов. То есть, после того, как написано решение уравнения типа $x = 8 - 5$ (в «числовом» виде) или $x = Б - Т$ (в общем виде) вы должны **мимоходом** спрашивать его (**и добиваться ответа!**): как называются элементы уравнения.

Встречая уравнения (сложение) или их решения (вычитание) нужно вслух **проговаривать**:

8 (или **Б**) — **сумма** или?.. — **верно, уменьшаемое**;

5 (или **Т**) — **известное слагаемое** или?.. — **вычитаемое**;

x — **неизвестное слагаемое** или?.. — **разность**.

И это — как технологический прием!

Примечание.

«... вычитание применяется при решении задач в трех случаях:

1). Когда по сумме двух слагаемых и одному из них находят другое слагаемое (по целому и его части — другую часть);

2). Когда данное число надо уменьшить на несколько единиц (несколькими единицами);

3). Когда надо узнать на сколько единиц одно число больше или меньше другого (разностное сравнение)» [11, с. 41].

Глава IV Умножение

Цикл I. Умножение — как СЛОЖЕНИЕ нескольких РАВНЫХ чисел (ГРАЭЛ-(⊗))

1. На 1 тарелке

5 яблок.

Сколько яблок на 6 таких тарелках?

⊗

2. В 1 ящике

20 книг.

Сколько книг в 8 таких ящиках?

⊗

3. В 1 пачке

1000 рублей.

Сколько денег в 5 пачках?

⊗

4. Школьники поехали на экскурсию на 10 автобусах. Сколько школьников поехало на экскурсию, если в каждый автобус село 35 школьников?

⊗

5. Маша, Саша и Аня пошли на спектакль. За каждый их билет мама заплатила по 70 рублей. Сколько денег потратила мама на билеты?

⊗

6. В парке посадили розы в четыре ряда. Сколько роз посадили в парке, если в каждом ряду было 20 роз?

⊗

7. Купили 4 метра ткани по 120 рублей за метр. Сколько денег заплатили за всю ткань?

8. Самолёт пролетает 920 километров за час. Каково расстояние от Москвы до Парижа, если самолёт летел 4 часа?

⊗

Ответы: 1) $T_6 = 30$ я.; 2) $Y_8 = 160$ кн.; 3) $P_5 = 5000$ руб.; 4) $A_{10} = 350$ шк.; 5) $B_3 = 210$ руб.; 6) $P_4 = 80$ р; 7) $M_4 = 480$ руб.; 8) $S_4 = 3680$ км.

Сценарий.

Как всегда, прочитайте с ребенком пункт «Немного об умножении». Просто для того, чтобы освежить в памяти действие умножения. А для 6–7-классников (для большинства из них) еще и для того, чтобы на сей раз понять суть действия. Как ни странно, чем младше дети, тем лучше они помнят, что умножение — сложение равных слагаемых. Но вот уже к 7-му классу большинство забывают это и начинается путаница с умножением как сложением и возведением в степень как умножением равных множителей.

Как я и говорил, эта глава будет самой короткой и легкой (не считая главы VI). Однако наши арифметические возможности она расширит неизмеримо (особенно, памятуя о том, что «деления мы не знаем» Да-да, полный аналог с вычитанием и сложением. Но подробнее с принципом «деления мы не знаем» мы познакомимся далее, в главе V.).

А пока что, читатель, замечу, что я, рассчитывая на вашу (и вашего ребенка) квалификацию, сосредоточу внимание на технологических рекомендациях, относящихся исключительно к умножению. Их будет немного.

Переходим к работе.

Задача 1

На рис. 1 задача реализована в виде сложения.

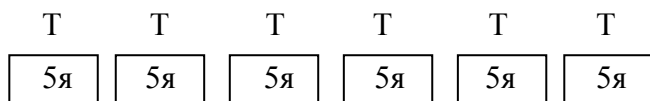


Рис. 1

«Алгебру» и «Арифметику» сложения и умножения мы могли бы записать, как на рис. 2.

	Сложение	Умножение
Алгебра	$T + T + T + T + T + T =$	$T \cdot 6$
Арифметика	$5я + 5я + 5я + 5я + 5я + 5я =$	$5я \cdot 6 = 30я$

6 раз

Рис. 2

Обратите внимание на то, что я «нарушил» основной принцип обозначений — их однозначность: все шесть слагаемых у меня имеют одно и то же имя **Т**. Разумеется, если бы это была задача на сложение, то подобная запись была бы недопустимой. Но мы-то имеем дело с переводом суммы **равных** слагаемых в умножение, и нам нужно ввести графэлемент умножения и удобные — для этого действия — обозначения.

Будем **называть** графический элемент умножения — ГРАЭЛ-(Умножения) или ГРАЭЛ-(Произведения) и **обозначать**: ГРАЭЛ-($\otimes$). А рисовать так, как на рис. 3.

Графика	Алгебра
T_1 T_6	$T_6 = 6 \cdot T_1$
5я 6•T ₁	Арифметика
	$T_6 = 6 \cdot 5я = 30я$

Рис. 3

Замечание.

1. Имена слагаемых (как стандартные индексные) совершенно прозрачны: «на одной тарелке» — значит имя T_1 . Но в данном случае подразумевается, в отличие от сложения, **не на первой тарелке, а на каждой из шести одинаковых тарелок**. Так как всего имеем 6 тарелок, то имя слагаемого — результата умножения (произведения) — T_6 (указываем в имени значение **множителя**).

2. **Множитель** в произведении **ставим на первое место**¹⁴, т. е. пишем произведение не так, как на рис. 2 — $T \cdot 6$ (по определению умножения), а так, как на рис. 3 — $6 \cdot T_1$. Связано это с тем, что в алгебре принято записывать числовой множитель (коэффициент) на первом месте. Никаких особых затруднений у ребенка это не должно вызвать.

3. Знак умножения в виде $\cdot$ или $\times$ (лучше точка) ставим до тех пор, пока формула типа $T_6 = 6 \cdot T_1$ не станет автоматически восприниматься в виде $T_6 = 6T_1$ (без знака умножения, как в алгебре).

А теперь посмотрите на содержимое слагаемого T_6 (произведение) на рис. 3 и сравните его с «Алгеброй»: $T_6 = 6 \cdot T_1$.

Вы видите, читатель, что в «Графике» мы имеем **готовую формулу**, готовое **действие** для «Алгебры»! Вы в полной мере сможете оценить это удобство в циклах III и IV, не говоря уж о главе V («Деление»).

¹⁴ Такая перестановка допустима только тогда, когда хорошо усвоена содержательная разница между множимым и множителем (вряд ли имеет смысл это делать ранее 5-го класса). Именно поэтому мы и пишем в «Арифметике» 5я, подчеркивая, что в условиях данной задачи это множимое.

Далее. Вы видите, что я опять вернулся к тому, чтобы как в «Графике», так и в «Арифметике» писать **«размерность»** слагаемого (множимого) — 5 я(блок).

Потом мы, разумеется, не будем этого делать (оставляя «размерность» только в одном месте, например, для **В**(сего)). Но сейчас все задачи цикла должны быть расписаны с указанием «размерности». Цель одна: «бойтесь просто чисел». Хотя в Алгебре-7 для нас основным термином становится термин: множители, т. к. одним из основных технических умений является умение разложить на множители и поэтому содержательная разница между множимым и множителем затушевывается и исчезает, но в физике (которая как раз и начинает изучаться в 7-м классе) именно понятие размерности (уже без кавычек) играет огромную роль. Арифметически же это проявляется как содержательная разница между множимым — **что;** складываем (умножаем) и множителем — **сколько раз** складываем (**на что;** умножаем).

Конкретно о задачах.

Задачи 1–3 реализуют предметный смысл умножения «в лоб»: на 1 (одной) тарелке, в 1 (одном) ящике, в 1 (одной) пачке.

В **задачах 4–7** действие умножения выражено **ключевыми словами**: «каждый», «по». Эти ключевые слова расширяют средства АИД — алгоритма извлечения данных (глава II, п. Резюме главы II). Встречая в тексте ключевые слова, мы мгновенно должны видеть ГРАЭЛ- (Умножения).

В **задаче 5** нужно выделить из текста множитель. Так как 3 человека (Маша, Саша и Аня), то имеем, следовательно, 3 билета.

Задача 8

Формально задача решается средствами ГРАН, но только потому, что «задача в одно действие», без условий связи. На самом деле это задача «на движение», требующая использования уравнения равномерного движения $S = V \cdot T$.

Класс задач «на движение» выходит за рамки ГрафАнализа.

Обозначения.

Имена слагаемых-результатов (произведения) приведены в ответах.

И последнее.

Разумеется, нет нужды разрисовывать полномасштабное решение задач этого цикла, как на рис. 3. Все должно идти быстро, в хорошем легком темпе.

Покажу полную роспись решения на примере задачи 5 (рис. 4).

$$\begin{array}{cc} B_1 & B_3 \\ \boxed{70p} & \boxed{3 \cdot B_1} \end{array} \quad B_3 = 3 \cdot B_1 = 3 \cdot 70p = 210p$$

Рис. 4

Никаких названий блоков, типа «Графика» и т. п. нет нужды использовать. Правда, при этом необходимо, чтобы ребенок помнил, что для школы решением будет арифметическая часть ($3 \cdot 70p = 210p$) и умел ее четко выделять.

Цикл II. В РАЗ БОЛЬШЕ (ГРАЭЛ-($\otimes_B$))

1. В маленьком ящике

20 книг.

В большом ящике

в 6 раз больше.

Сколько книг в большом ящике?

$\otimes_B$

2. В пачке

1000 рублей.

В сумке

в 5 раз больше.

Сколько денег в сумке?

$\otimes_B$

3. В один вагон село 50 пассажиров, а на весь поезд в 12 раз больше. Сколько пассажиров село на поезд?

$\otimes_B$

4. Мама хотела потратить на рынке 30 рублей, а потратила в 4 раза больше. Сколько денег потратила мама?

$\otimes_B$

5. От Москвы до Парижа самолёт летел 4 часа, а от Парижа до Гонконга в 4 раза дольше. Сколько времени самолёт летел от Парижа до Гонконга?

$\otimes_B$

6. У кошки Мурки было три котенка, а у кошки Шпульки в два раза больше. Сколько котят было у кошки Шпульки?

$\otimes_B$

Ответы: 1) Б = 120 кн.; 2) С = 5000 руб.; 3) П = 600 п.; 4) П = 120 р.; 5) $S_T = 16$ ч.; 6) Ш = 6 к

Сценарий

Цель данного цикла состоит в том, чтобы увидеть, как, естественным образом, возникает понятие «Больше В» (больше в несколько раз) — **второе важнейшее отношение** из трех основных отношений арифметики (первое — отношение «Больше НА» глава II, цикл II, задача 1; третье — отношение «Равенства» глава II, цикл VI, задача 3) и навсегда усвоить для себя эквивалентность неравенства «Больше В» и равенства в виде умножения.

Задача 1

Эта задача появляется из практики следующим образом: нам нужно переслать 120 книг шести различных жанров, например, фантастика, детектив, сказки и т. п., причем у нас ровно **по 20 книг** каждого жанра. Для удобства мы упаковываем книги каждого жанра в 6 **одинаковых** малых ящиков (**М**), а все 6 малых ящиков — в один большой (**Б**). А уже большой ящик отсылаем по почте.

Посмотрите на рис. 5а.

Б		
М	М	М
М	М	М

М
20

Б		
20	20	20
20	20	20

Рис. 5а

Рис. 5б

Большой ящик (**Б**) разбит на 6 **равных** частей. **Каждая** из этих частей — это малый ящик **М** (все **М** — **одинаковы**). И каждый малый ящик **М** вмещает **одинаковое** число книг — 20 книг.

Естественным образом возникает задача: сколько в большом ящике **Б** всего книг (именно книг, а не малых ящиков **М**)?

Заменим на рис. 5а каждый малый ящик **М** его содержимым (20 книг) и получим рис. 5б.

Теперь задача совершенно знакома — это задача сложения равных слагаемых, т. е. задача умножения из цикла I: $20\text{кн} \cdot 6 = 120\text{кн}$.

Вот здесь-то и появляется понятие (отношение) «Больше В».

Мы **видим** (рис. 5а, 5б):

1. В **Б**(ольшом) ящике книг **больше**, чем в **М**(алом).
2. В каждом **М**(алом) ящике — **равное** число книг (20 книг).
3. Все **М**(алые) ящики **одинаковы**, т. е. **Б**(ольшой) ящик состоит из нескольких **равных** частей (разбит на несколько равных частей).

Чтобы описать эту ситуацию:

- **Больше**
- **Равное** число книг (содержимое М)
- **Несколько равных** частей

мы вводим (определяем) понятие «Больше В»: сказать, что в **Б**(ольшом) ящике **в 6 раз больше** книг, чем в **М**(алом), означает то же, что взять содержимое **М**(алого) ящика (20 книг) 6 раз слагаемым, т. е. **умножить** 20 книг на 6.

Иначе это можно сформулировать так: **увеличить в 6 раз** содержимое **М**.

Будем называть графический элемент отношения «Больше В» — ГРАЭЛ-(Больше В) и **обозначать**: ГРАЭЛ-($\otimes_B$)¹⁵. Рисовать так, как на рис. 6

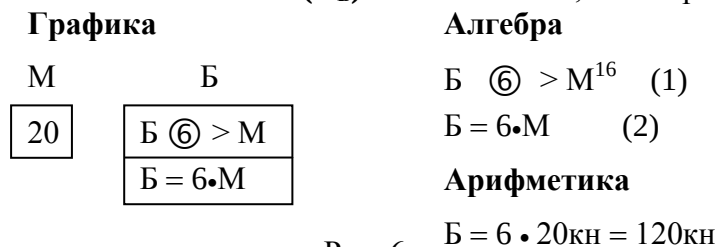


Рис. 6

Все основное, сказанное по поводу отношения «Больше НА» (глава II, цикл II, задача 1) можно практически дословно повторить в связи с отношением «Больше В», а именно:

1. В арифметике мы не знаем, что такое «меньше», только «больше».
2. Неравенство (1) и равенство (2) (рис. 6) — это одно и то же (в том же смысле, как их аналоги в отношении «Больше НА».
3. С неравенством (1) мы не знаем, что делать, а вот с равенством обращаться умеем (можем посчитать).
4. В «Алгебре» обязательно пишется сначала неравенство $B \textcircled{6} > M$, а потом равенство $B = 6 \cdot M$.

Пусть «Графика» ГРАЭЛ-(Больше В) на рис. 6 не кажется вам, читатель, громоздкой. Конечно же, мы с вами будем ограничиваться только «квадратиком» слагаемым **Б** и его содержимым — формулой (точнее, частью формулы) $6 \cdot M$, как на рис. 3 слагаемое (произведение) T_6 .

Но в этом цикле ребенок должен разрисовывать задачи полностью, как на рис. 6, и понятно почему: навсегда «впечатать» в память эквивалентность неравенства (1) и равенства (2) и при этом **обязательно проговаривать** неравенство (1): **Б** в 6 раз больше **М**.

Внимание.

Пусть ребенок **обязательно сравнит** два отношения: «Больше НА» и «Больше В»:

«Больше НА» $15 > 12 \text{ на } 3 \Leftrightarrow 15 = 12 + 3$

«Больше В» $15 \textcircled{3} > 5 \Leftrightarrow 15 = 5 \cdot 3 \quad (= 5 + 5 + 5).$

¹⁵ Произносится: «ГРАЭЛ-(Больше В)».

¹⁶ Неравенство произносится: «**Б** в 6 раз больше **М**».

Пусть еще раз увидит, что «Больше В» как умножение — это сумма **равных** слагаемых ($5 + 5 + 5$), в то время как «Больше НА» только в редких случаях будет суммой равных слагаемых (например, $6 > 3$ на $3 \Leftrightarrow 6 = 3 + 3$).

«Больше НА» всегда сумма **только 2-х** слагаемых, что, в свою очередь, совсем не обязательно для умножения — отношения «Больше В».

И главное, пусть он обратит внимание на разную роль **одного и того же числа 3** в обоих отношениях: в «Больше НА» 3 — это слагаемое (одно), в «Больше В» 3 — это множитель (число равных слагаемых). Иначе можно сказать, забегая вперед: в «Больше В» число 3 (множитель) показывает на сколько равных частей можно было бы разбить целое, равное 15 — на 3 равных части, каждая из которых равна 5.

Обозначения.

Обратите внимание на принципиальное отличие в обозначениях, по сравнению с циклом I. При работе с умножением нам были **удобны** индексные обозначения, поскольку имена слагаемых-результатов (произведений) совпадали с именами слагаемых множимых (1 ящик — 8 ящиков, 1 билет — 3 билета и т. д.).

Сейчас же имена произведений отличаются от имен множимых (пачка — сумка, хотела — потратила и т. д.), поэтому индексные обозначения нам ни к чему.

Привожу все 6 уравнений «Алгебры», чтобы вы увидели, что в «Больше В» мы работаем в привычной системе обозначений: 1) $B = 6 \cdot M$; 2) $C = 5 \cdot П$; 3) $П = 12 \cdot В$; 4) $П = 4 \cdot X$; 5) $S_I = 4 \cdot S_{II}$; 6) $Ш = 2 \cdot M$.

Замечание.

Читатель, на сей раз, в отличие от сложения, вы вполне можете объединить в одно 40-минутное занятие оба цикла (если, конечно, ваш ребенок не в 3-м классе, а постарше). Но, как всегда будьте осторожны.

И как всегда, **все** задачи обоих циклов должны быть расписаны («набить руку»).

Резюме циклов I-II.

Введены графэлементы умножения — **ГРАЭЛ-(⊗)** и второго важнее отношения «Больше В» — **ГРАЭЛ-(⊗_В)**.

Действие умножения, как правило, характеризуется **ключевыми словами**: каждый, по.

«Умножение применяется при решении задач в следующих случаях:

Когда по смыслу задачи данное число надо повторить слагаемым несколько раз, т. е. найти сумму нескольких равных чисел... Можно сказать, что... **по величине одной из равных частей** целого и **числу частей** требуется найти целое.

Когда данное число надо **увеличить в несколько раз**» (все выделено мной. — В. Х. [11, с. 51]).

Глава V Деление

Цикл I. Деление на равные части. Уменьшить в несколько раз (ГРАЭЛ-(:)р)

Деление на равные части

1. На 6 тарелках

30 яблок.

Сколько яблок на одной тарелке? (:)р

2. В 8 ящиках

160 книг.

Сколько книг в каждом ящике? (:)р

3. 350 школьников поехали на экскурсию на 10 автобусах. Сколько школьников село в каждый автобус? (:)р

4. В парке посадили восемьдесят роз в четыре ряда. Сколько роз было посажено в каждом ряду? (:)р

5. (346₇₇) 27 кг желудей упаковали поровну в 3 пакета. Сколько килограммов желудей было в каждом пакете? (:)р

6. (383 (1)₈₅) 18 морковок девочка раздала поровну 9 кроликам. По сколько морковок она дала каждому кролику? (:)р

7. (389₈₆) Из 14 м ткани сшили 7 одинаковых детских пальто. Сколько метров ткани расходовали на 1 пальто? (:)р

8. (390 (1)₈₆) 12 девочек и мальчиков разделились поровну на две команды. Сколько детей было в каждой команде? (:)р

9. (447 (1)₁₀₁) Магазин продал 8 одинаковых портфелей и получил за них 32 р. Сколько стоит один портфель? (:)р

10. (454₁₀₃) В трех одинаковых ящиках 21 кг апельсинов. Сколько килограммов апельсинов в каждом ящике? (:)р

11. (460 (1)₁₀₄) Из куска ткани длиной 24 м сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько метров ткани пошло на каждый костюм? (:)р

12. (467₁₀₅) Из 12 мотков шерсти получается 3 одинаковых детских свитера. Сколько мотков шерсти израсходовали на каждый свитер? (:)р

13. (471₁₀₆) За 2 карандаша по одинаковой цене уплатили 8 к. Сколько стоил один карандаш? (:)р

14. (472₁₀₆) В 6 банок поровну разложили 12 кг варенья. Сколько килограммов варенья положили в каждую банку? (:)р

15. (478 (1)₁₀₇) В 9 банок поровну разлили 27 л сока. Сколько литров сока налили в каждую банку? (:)р

16. (22₁₁₅) Десяток пуговиц стоит 90 к. Сколько стоит одна пуговица? (:)р

Ответы: 1) $T_1 = 5$ я.; 2) $Y_1 = 20$ кн.; 3) $A_1 = 35$ шк.; 4) $P_1 = 20$ роз; 5) $П_1 = 9$ кг; 6) $K_1 = 2$ м.; 7) $П_1 = 2$ м; 8) $K_1 = 6$ дет.; 9) $П_1 = 4$ р.; 10) $Y_1 = 7$ кг; 11) $K_1 = 3$ м; 12) $C_1 = 4$ мот.; 13) $K_1 = 4$ к.; 14) $B_1 = 2$ кг; 15) $B_1 = 3$ л; 16) $П_1 = 9$ к.

Сценарий.

Общие замечания.

Если в физике понятие размерности нужно для того, чтобы указать, в каких единицах мы измеряем ту или иную величину, поскольку без указания единиц измерения число (числовое значение величины) не имеет смысла, то в арифметике понятием «размерность» (в кавычках) я пользуюсь, прежде всего, для того, чтобы отчетливо, предельно наглядно выявить разницу между двумя формами деления: делением на равные части и делением по содержанию.

Определение физической величины содержит указание способа ее измерения¹⁷. В арифметике мы работаем не только с именованными числами (см. сноска 10, п. «Немного о дробях» глава III), выраженными в метрических мерах как числами с наименованием какой-либо единицы измерения, но и с числами с наименованием единицы счета. Но если при сложении и вычитании наименование числа нам нужно лишь для того, чтобы не сложить случаев яблоки и тракторы (с этого мы начинали) и, в общем-то, понятием «размерность» можно было бы и не пользоваться, то при делении ситуация существенно меняется.

При сложении и вычитании мы работаем с однородными именованными числами (т. е. с числами, являющимися размерами одной и той же величины): кг ± кг, тракторы ± тракторы и т. п. При делении же приходится работать и с неоднородными именованными числами (т. е. с числами, являющимися размерами значений разных величин, например 5 м и 5 кг (см. [29, с. 190], а также конец п. «Немного о делении»).

Именно это, как мне кажется, и является основной трудностей при работе с действием деления в текстовых задачах. Именно это и **вынудило** меня воспользоваться физическим понятием размерности в применении к арифметике. Указывая в графэлементах деления наименование величин (что; на что; делим), мы четко разграничиваем две формы деления и, тем самым, углубляем понимание задачи, ее арифметического смысла, как бы проста она ни казалась, и уменьшаем вероятность ошибки.

Переходим к работе.

Суть деления на равные части сводится, как мы видели, к «физическому» смыслу деления — к нахождению **содержимого единицы делителя**. В текстах задач данного цикла это отражено прежде всего в вопросах задач: сколько... в каждом ящике, ряду, пакете? на каждый костюм, свитер? расходовали на 1 пальто? стоит один карандаш?...

Но, естественно, такие задачи будут являться всего лишь элементами более сложных задач. И там уже более важным для выявления деления на равные части являются **ключевые слова** типа: упаковали поровну, раздали поровну, разделились поровну, поровну разложили, поровну разлили и т. п. Слова — разложили, разлили, раздали... в сочетании со словом «поровну» сразу говорят о делении на равные части.

В задачах 7, 9, 10, 11, 12, 13 **ключевым** является слово — **одинаковый** (одинаковый — синоним равный). Сказать: «В трех одинаковых ящиках 21 кг апельсинов» (задача 10) — означает то же самое что: 21 кг апельсинов **разложили поровну** в 3 ящика. Или «Из 14 м ткани сшили 7 **одинаковых** детских пальто» (задача 7) — означает то же, что: 14 метров ткани **распределили поровну** на 7 пальто.

Все вышесказанное отражено в текстах задач выделением жирным шрифтом.

Подчеркиванием выделены **два разных объекта** (две величины, участвующие в делении), например, книги — ящики, морковки — кролики, ткань — пальто, банки — сок. Из этих ве-

¹⁷ «Физическое понятие, отражающее какое-либо свойство тел и явлений и выражаемое числом (или несколькими числами) в процессе измерения, называется физической величиной...»

Обратим внимание на слова «в процессе измерения». Это означает, что в определении (толковании) физической величины должны содержаться сведения о процедуре ее измерения, о приборах, о единицах измерения» [28, с. 32].

личин мы будем извлекать их «размерности» (либо использовать общепринятые наименования и сокращения: м — метр, кг — килограмм, л — литр, к. — копейка, р. — рубль)

Задачи 5–16 взяты из учебника Математика-2 (см. [17]). Точнее, они являются частью задач учебника.

После номера задачи в скобках указан номер задачи в учебнике, а нижний индекс указывает страницу учебника.

Числовые значения стоимости оставлены без изменения.

Итак, основная цель цикла — научиться **видеть** деление на равные части «с первого взгляда», опираясь **на ключевые слова**: поровну раздали и т. п., одинаковый, каждый, один.

Чтобы правильно **технически** реализовать деление на равные части, нужно не только уметь выделять объекты, величины, участвующие в задаче, но и видеть **что; именно делится** (разбивается, распределяется) **на равные части**. При этом, надо отчетливо понимать: то, что; делим — это давно знакомое нам **ВСЕГО** (известное произведение). Посмотрите: 30 яблок (задача 1) — подразумевается: **всего** 30 яблок на 6 тарелках. Или — из 14 м ткани (задача 7) — т. е. **всего** 14 метров ткани распределяем и т. д. И крайне важно научиться, сталкиваясь с вышесказанным, видеть и деление на равные части, не путать его с делением по содержанию. В этом нам поможет графический элемент деления, который будем называть — **ГРАЭЛ-(Деления)** и обозначать: **ГРАЭЛ-(:)**.

На рис. 4а изображена так называемая «пустотка» этого графэлемента.

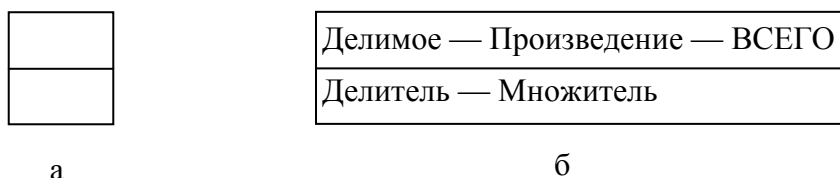


Рис. 4

Конкретизироваться «пустотка» графэлемента деления будет при рассмотрении соответствующих форм деления подобно тому, как на рис. 4б.

Поскольку для задачи (это даже не задача, а просто вопрос), состоящей из одного логического элемента деления на равные части, всегда указаны числовые значения обеих величин, то в этом случае блок «Алгебры» отсутствует. Заполнив «пустотку», мы превратим ее в графический элемент деления на равные части, который обозначается так: **ГРАЭЛ-(:)_р**¹⁸ (индекс «р» как раз и говорит о том, что используется форма деления на равные части).

Задача 1

На рис. 5 изображен ГРАЭЛ-(:)_р задачи 1.

Графика

Арифметика

30я
6(т)

$$= T_1 \text{ я/т}^{19} \quad T_1 = 30 : 6 = 5 \text{ (я)}$$

Рис. 5

Крайне важно писа;ть в «пустотке» «размерности» величин: **я** (яблоки), **т** (тарелки).

Поскольку главным является то, что яблоки распределяются по тарелкам и нас интересует сколько **именно яблок** на тарелке, то «размерность» делителя указана в скобках — 6 (т).

¹⁸ Произносится: ГРАЭЛ, графэлемент деления на равные части.

¹⁹ «Размерность» у имен (букв) будем писать в виде буквенного индекса.

А теперь, не менее важный момент — **имя** данного слагаемого (напоминаю, что все графэлементы в конечном итоге являются всего лишь элементами «Графики» более сложной задачи — слагаемыми).

Здесь мы опираемся не столько на действие умножения, сколько на смысл действия деления на равные части. Тем не менее, читатель, имеет смысл посмотреть на рис. 3 цикла I, главы IV, который изображает прямую задачу умножения по отношению к нашей обратной — задаче деления на равные части и прочесть еще раз «Замечание», п. 1.

Раз **на одной** тарелке, то имя T_1 , причем, как и при умножении, подразумевается: не на первой тарелке, а на одной тарелке (одной из нескольких одинаковых).

Индекс я/т, как сказано в п. «Немного о делении» — это сокращенная запись: яблок **на одной** тарелке.

В силу огромной значимости вышесказанного, я приведу сейчас примерный монолог-объяснение решения еще одной задачи, который вы произносите вслух.

Задача 5

1. Что мы видим? Какие **разные** объекты (величины, предметы...)? — Верно, желуди и пакеты.

2. «Упаковали поровну» — значит действие деления. Какого деления? — Деления на равные части. Об этом же говорит и вопрос задачи: сколько килограммов **в каждом** пакете (упаковали поровну, в каждом — ключевые слова действия деления на равные части).

3. Что; делится на что; что распределяется? — 27 кг желудей распределяем по 3 пакетам.

Нарисуйте «пустотку» и частично заполните ее (рис. 6а).

<table><tr><td>27</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	27	3	<table><tr><td>27кг</td></tr><tr><td>3(п)</td></tr></table>	27кг	3(п)	<table><tr><td>27кг</td></tr><tr><td>3(п)</td></tr></table>	27кг	3(п)	= Π _{1 кг/п}
27									
3									
27кг									
3(п)									
27кг									
3(п)									
а	б	в							

Рис. 6

4. **Спросите:** «27 и 3 чего?» (Или иначе: какая «размерность» у желудей и пакетов?). С пакетами ясно — раз пакеты, то «размерность» [п]. А вот для желудей «размерность» будет не [ж], а [кг], недаром в вопросе задачи говорится: сколько **килограммов** желудей... Дописываете «размерность» (рис. 6б).

5. А теперь, имя слагаемого. — Какое дадим?... Верно, раз содержимое одного пакета (иначе, содержимое единицы делителя; 3 пакета — делитель: на что; делим, в чем именно распределяем), то имя Π_1 . А как обозначим что; на что; делим? Верно — кг/п (или килограммов в 1 пакете). Дописываете, и получаете рис. 6в.

А теперь, читатель, на рис. 7 посмотрим на полное решение задачи. Ведь на самом деле рис. 6а-в показывает только последовательность создания «Графики».

Графика

Арифметика

<table><tr><td>27кг</td></tr><tr><td>3(п)</td></tr></table>	27кг	3(п)	$= \Pi_1 \text{ кг/п}$	$\Pi_1 = 27 : 3 = 9 \text{ (кг)}$
27кг				
3(п)				

Рис. 7

Обратите внимание.

В «Арифметике» мы пишем решение стандартным школьным способом: делимое и делитель — просто числа, для частного в скобках указываем наименование (кг), а не (кг/п)²⁰. Это

²⁰ Если речь идет о начальной школе, то необходимо посмотреть оформление школьных решений.

и понятно. Ведь мы имеем все же дело с арифметикой, а не с физикой. И то, что я называю «размерностью», т. е. кг/п (кг/в 1-м пакете) — это не столько размерность в смысле физики (как единица измерения величины), сколько «физический» смысл деления на равные части — найти содержимое единицы делителя (9 килограммов в одном пакете). Поясните это ребенку в меру его восприятия. Однако смысл деления на равные части на минимальном уровне он должен усвоить: 9 кг — это что? что посчитали? И он должен уметь ответить: 9 кг (железудей) **в одном** пакете.

Далее. «Арифметику» для детей постарше конечно же лучше писать с дробной чертой (имеется в виду действие деления)

$$П_1 = \frac{27}{3} = 9 \text{ (кг)}.$$

Во всяком случае, начиная с 6-го класса в ГрафАнализе стоит это делать (не забывая, что оформляя решение для школы, надо использовать обычный знак деления — двоеточие, т. к. дробная черта для обозначения действия деления до 7-го класса не употребляется²¹).

Примерный монолог-объяснение должен проговариваться вами вслух, читатель, не только на паре задач, когда вы вводите ГРАЭЛ(:)р, а на протяжении 5–6 первых задач, когда ребенок уже сам рисует задачу. Благодаря этому, через 5–6 задач ребенок будет **мгновенно видеть** (чего мы и добиваемся в этом цикле!) деление на равные части, т. е. что;’ на что;’ делится, «размерности» величин, имя слагаемого-частного.

Все время спрашивайте ребенка о смысле результата, т. е. о смысле деления на равные части: «Так что получили? Как запишем «размерность» результата в «Графике»?

В таблице 1 даны решения всех задач.

Таблица 1		
№ з-чи	Графика	Арифметика
1	30я 6(т) = Т₁ я/т (яблок на 1-й тарелке)	T ₁ = 30 : 6 = 5 (я)
2	160кн 8(я) = Я₁ кн/я (книг в 1-м ящике)	Я ₁ = 160 : 8 = 20 (кн)
3	350шк 10(а) = А₁ shk/a (школьников в 1-м автобусе)	A ₁ = 350 : 10 = 35 (шк)
4	80роз 4(ряд) = Р₁ роз/ряд (роз в 1-м ряду)	P ₁ = 80 : 4 = 20 (роз)

²¹ По-видимому, это обусловлено тем, что для числовых дробей деление превращается в умножение, и «много-этажные» числовые дроби неудобны и не нужны.

5	<table><tr><td>27кг</td></tr><tr><td>3(п)</td></tr></table> = П ₁ кг/п (килограммов (желудей) в 1-м пакете)	27кг	3(п)	П ₁ = 27 : 3 = 9 (кг)
27кг				
3(п)				
6	<table><tr><td>18м</td></tr><tr><td>9(к)</td></tr></table> = К ₁ м/к (морковок 1-му кролику)	18м	9(к)	К ₁ = 18 : 2 = 9 (м)
18м				
9(к)				
7	<table><tr><td>14м</td></tr><tr><td>7(п)</td></tr></table> = П ₁ м/п (метров (ткани) на 1-но пальто)	14м	7(п)	П ₁ = 14 : 7 = 2 (м)
14м				
7(п)				
8	<table><tr><td>12дет</td></tr><tr><td>2(ком)</td></tr></table> = К ₁ дет/ком (детей в 1-й команде)	12дет	2(ком)	К ₁ = 12 : 2 = 6 (дет)
12дет				
2(ком)				
9	<table><tr><td>32руб</td></tr><tr><td>8(п)</td></tr></table> = П ₁ руб/п (рублей за 1-н портфель)	32руб	8(п)	П ₁ = 32 : 8 = 4 (р.)
32руб				
8(п)				
10	<table><tr><td>21кг</td></tr><tr><td>3(я)</td></tr></table> = Я ₁ кг/я (килограммов (апельсинов) в 1-м ящике)	21кг	3(я)	Я ₁ = 21 : 3 = 7 (кг)
21кг				
3(я)				
11	<table><tr><td>24м</td></tr><tr><td>8(к)</td></tr></table> = К ₁ м/к (метров (ткани) за 1-н костюм)	24м	8(к)	К ₁ = 24 : 8 = 3 (м)
24м				
8(к)				
12	<table><tr><td>12мот</td></tr><tr><td>3(с)</td></tr></table> = С ₁ мот/с (мотков на 1-н свитер)	12мот	3(с)	С ₁ = 12 : 3 = 4 (мот)
12мот				
3(с)				
13	<table><tr><td>8коп</td></tr><tr><td>2(кар)</td></tr></table> = К ₁ коп/кар (копеек за 1-н карандаш)	8коп	2(кар)	К ₁ = 8 : 2 = 4 (к.)
8коп				
2(кар)				
14	<table><tr><td>12кг</td></tr><tr><td>6(б)</td></tr></table> = Б ₁ кг/б (килограммов варенья в 1-й банке)	12кг	6(б)	Б ₁ = 12 : 6 = 2 (кг)
12кг				
6(б)				

15	27л 9(б) $= B_1 \text{ л/б}$ (литров (сока) в 1-й банке)	$B_1 = 27 : 9 = 3 \text{ (л)}$
16	90коп 10(п) $= П_1 \text{ коп/п}$ (копеек за 1-ну пуговицу)	$П_1 = 90 : 10 = 9 \text{ (к.)}$

Комментарий к таблице 1.

1. В «Графике» под ГРАЭЛ-(:)_р дается расшифровка «размерности» результата, т. е. как раз смысл деления на равные части. Как я уже говорил, вы должны проговаривать его **вслух**, а через несколько задач после начала добиваться, чтобы ребенок сам его формулировал.

2. Обратите внимание на мнемонику (удобные сокращения) «размерностей». Она подчинена идее наибольшего опредмечивания «просто чисел». В задачах 2, 3 не **к** и **ш**, а **кн** (книги) и **шк** (школьники). В задачах 8, 12 — **дет** (детей) и **мот** (мотков). А вот, скажем, в задаче 6 — **м** (морковки) вполне достаточно. В задаче 4 — **роз/ряд**, т. к. совпадающие первые буквы. Особо стоит отметить задачи 9, 13, 16: **руб** (рубли) и **коп** (копейки). Употребляемые в Математике-2 обозначения-сокращения (см. [17]): **р.** и **к.** — буква с точкой. Но конечно же **руб** и **коп** гораздо мнемоничней. И поскольку «Графика» — для нашего внутреннего употребления, то мы и выбираем максимально опредмечивающую мнемонику. А результат в «Арифметике» пишем, как и положено, — **р.** и **к.**

3. Еще раз **обратите внимание** ребенка на имена результатов: **Т₁**, **Я₁**, **А₁** (задачи 1, 2, 3) и т. д. Поскольку деление на равные части — это нахождение содержимого единицы делителя («в чем» содержатся 5 яблок, 20 книг, 35 школьников? — в одной тарелке, в одном ящике, в одном автобусе), то делителем и определяются имена.

Предупреждение.

Первоначально задачи главы V создавались по основному принципу — одно известное слагаемое (а значит и одна известная величина) и, желательно, одна графсхема; расстановка действий — от известного слагаемого. Задачи циклов I, II, IV, V (мои задачи, без включения задач из Математики-2) опробовались сначала на 5–6-и классниках. И для 5–6-го классов, как вы, читатель, увидите в главе VII, этого было вполне достаточно, поскольку, как ни парадоксально, но в 5-м и, особенно, в 6-м классах действие деления используется очень мало, причем — в подавляющем большинстве случаев — только один из двух вариантов деления на равные части — уменьшить в несколько раз (в несколько раз меньше).

Затем, по мере все большего осознания автором того, что все трудности с математикой уходят своими корнями в начальную школу, потребовалось провести позадачный анализ учебников математики 1, 2 и 3-го классов с точки зрения ГрафАнализа. Выяснилось, что во 2–3-м классах очень много задач, в которых «Графика» представляет собой набор графсхем (ГРАС), причем по принципу: графэлемент — графсхема. Частично мы увидим это в цикле III, а частично в главе VII. ГрафАнализ показывает, что чем больше графсхем составляют «Графику» задачи, тем сложнее задача для восприятия, а плюс к тому же и трудности с формами и видами действия деления. И все это падает на 2–3-й классы, когда идет только первичное знакомство с действием деления и его освоение. Но уж если с вычитанием сложно, то что говорить о делении!

Одним словом, начиная с 5-го класса все, что включено в циклы задач из учебников Математики-2, 3 (реализованное средствами ГРАН) осваивается детьми. Однако сам я ниже конца 3-го класса не погружался (и это было без включенных теперь в ГРАН задач Математики-2, 3).

Я полагаю, что материал циклов I–III окажется, на данный момент, более полезен для вас, читатель, чтобы вы четче видели структуру задач и освоили общий подход, чтобы вы были в состоянии помочь ребенку (имеются в виду 2–3-й классы).

Все это связано с наличным дидактическим материалом Математики-2, 3.

Мне кажется, что ГрафАнализ наглядно выявляет необходимость значительной перестройки курса математики начальной школы в силу возрастных особенностей детей (разумеется, они еще не готовы в полной мере воспринять формы деления, и работать с «Графикой», состоящей из нескольких ГРАЭЛов в качестве графсхем. Вообще удивительно, что часть детей «прорывается» через математику 2–3-го классов).

В главе VII анализ дидактических материалов 5–6-го классов наглядно (в «нотной» записи) показывает, как мало уделяется внимания действию деления, четкой дифференциации и **практической освоенности** его форм. Видимо, **подразумевается**, что во 2–3-м классах деление освоено. Практика же показывает обратное. Но этот вопрос требует совершенно особой теоретико-экспериментальной работы и вряд ли может быть решен усилиями одного человека. Поэтому, читатель, будьте предельно осторожны с действием деления (если, повторяю, речь идет о начальной школе). Возможно, почти все (за исключением, пожалуй, цикла IV) будет использоваться вами как иллюстративно-пояснительное средство при разборе школьных задач.

Уменьшить в несколько раз

17. На блюде

30 яблок,

а на тарелке

в 6 раз меньше.

Сколько яблок на тарелке?

(:)PM

18. В шкафу

160 книг,

а на столе

в 4 раза меньше.

Сколько книг на столе?

(:)PM

19. В поезде было 350 пассажиров, а вагоне в 10 раз меньше. Сколько пассажиров было в вагоне?

(:)PM

20. В парке посадили восемьдесят роз, а в саду в четыре раза меньше. Сколько роз посадили в саду?

(:)PM

21. (349₇₈) Попугаев 6, а голубей в 3 раза меньше. Сколько голубей?

(:)PM

Ответы: 17) T = 5 я.; 18) C = 40 кн.; 19) B = 35 пас.; 20) C = 20 роз; 21) Г = 2 шт.

Общие замечания.

Рассмотрим следующую ситуацию. На блюде лежит 30 яблок. Мы **разделяем** эти 30 яблок на 6 **равных частей** (групп, кучек) и пять частей из шести убираем. Спрашивается, сколько яблок останется на блюде?

Очевидно, что мы осуществили деление на равные части — $30\text{я(блок)} : 6$, — а содержимое каждой (одной) из частей равно 5 я(блок).

Обратите внимание, были яблоки **на блюде** и остались яблоки **на блюде** же. То есть в отличие от деления на равные части мы имеем дело не с двумя объектами (величинами) типа яблоки-блюда (несколько), а с одной величиной — количеством яблок.

Соответственно с «размерностью» дело обстоит совсем иначе, нежели при делении на равные части. В данном случае мы не распределяем объект одного вида — яблоки («размерная» величина) — по одинаковым представителям объекта другого вида, скажем, тарелкам или ящикам (тоже «размерные» величины), а делим на равные **безразмерные** части и берем содержимое одной из таких частей — 5 яблок.³⁰

Вот такое действие — разделить известное ВСЕГО на несколько равных частей (безразмерных) и взять содержимое одной из этих частей будем называть: **уменьшить в несколько раз** (или иначе — **меньше в несколько раз** или просто «**меньше в**»).

Значит, нашу вспомогательную задачу мы могли бы сформулировать так: на блюде 30 яблок. **Уменьшим** это количество **в 6 раз**. Сколько яблок останется на блюде?

Теперь от этой вспомогательной задачи перейдем к задаче 1.

В чем отличия? Да только в одном — не на блюде 30 яблок уменьшаем в 6 раз, а говорим, что на тарелке в 6 раз меньше яблок, чем на блюде.

Вроде бы, появился другой, помимо яблок, объект — тарелка. Вроде бы она даже одна. Тем не менее, мы никак не можем сказать, что ищем содержимое единицы делителя, как при делении на равные части. Это довольно тонкий момент, читатель, и в то же время — достаточно очевидный. В самом деле, мы не раскладываем, не распределяем 30 яблок **по 6-и одинаковым** тарелкам. Мы, фактически, делим 30 яблок, лежащих на блюде, на 6 равных частей

³⁰ Не правда ли, читатель, вы узнаете знакомый процесс получения дроби путем деления нечто целого на равные части («Две стороны дроби», п. «Немного о дробях», глава III).

(безразмерных), убираем с блюда 5 из этих частей, а содержимое одной части переносим на одну тарелку (всего лишь **одну имеющуюся, а отнюдь не на одну из 6 одинаковых!**).

Таким образом, можно было бы сказать, что в понятии «меньше в» деление на равные части реализуется «в чистом виде» — мы действительно просто делим ВСЕГО на несколько равных частей и берем содержимое одной из этих частей.

Отсюда же — наглядная связь типа «одно и то же» (одна и та же математическая модель) со вторым основным отношением «Больше В» (см. конец п. «Внимание», цикла II, главы IV). То есть, вместо того, чтобы спрашивать: где меньше? — мы можем спросить: где больше? — и заменить действие деления умножением так же, как мы это делали с понятием «меньше на» (цикл II, глава III). Вообще-то, читатель, как вы понимаете, мы можем любую форму и вид деления заменить умножением, поскольку вывели деление из умножения. Но, в отличие от вычитания, нам выгоднее (легче, удобнее) на сей раз работать именно с ГРАЭЛом деления, лишь иногда заменяя его умножением. Вы это увидите в главе VII, например, на задаче 53 или задаче 119 из дидактических материалов для 5 класса.

Когда мы с вами занимались делением на равные части, я ограничился действием деления, поскольку самым важным было закрепить вид деления на равные части и его смысла. Теперь же добавится умение записывать деление в виде умножения (таблица 2, третий столбец — «Алгебра» «Больше В»). И хотя такое умение в этой главе нам еще не понадобится, тем не менее, пришла пора связывать деление и умножение в восприятии ребенка в неразрывное целое.³¹

Переходим к работе.

Задача 17

Используем уже известный нам ГРАЭЛ-(:)р. **Разница — в именах и «размерностях».** Что касается имен слагаемых, то индексные обозначения нам ни к чему (сравните с именами в «Больше В» — п. «Обозначения», цикл II, глава IV). А «размерность» та же, что у делимого, поскольку, как мы выяснили, уменьшить в несколько раз — это деление на равные части «в чистом виде» (делитель — безразмерен). На рис. 8 в «Графике» изображен графэлемент деления на равные части, относящийся к понятию «меньше в».

Графика Алгебра Арифметика

Бя	= Т _я	$T = \frac{Б}{6} =$	$\frac{30}{6} = 5 \text{ (я)}^{32}$
6			

Рис. 8

«Графика» требует пояснений.

В самом начале мы с вами, читатель, договорились, что с текста все должно быть внесено в «Графику», и после этого с текстом уже не работаем. Но все дело в том, что деление в виде

Т	«меньше в» само по себе вообще нам встречаться в дальнейшем не будет, а будет являться слагаемым — в чистом виде — более сложных задач (см. циклы IV–V), точно так же, как это было с тремя предыдущими арифметическими действиями. То есть, нам не просто будет удобно, а мы вынуждены будем записывать «меньше в» в алгебраической форме.
Бя	Рис. 9
6	

Да и как иначе мы сможем нарисовать «меньше в», если оно будет дано в тексте более сложной задачи такой, например, фразой: а на тарелке в 6 раз меньше... чем на блюде? — Только так, как на рис. 9 — в виде отдельного слагаемого с именем Т(арелка).

³¹ Еще и еще раз повторяю — если речь не идет о начальной школе.

³² С этого момента, читатель, я не буду особо оговаривать употребление того или иного знака деления (двоеточие или дробная черта). Вы же выбирайте тот знак, который вам нужен.

Что касается «размерности», то этот вопрос мы уже обговорили: на **Б**(люде) — яблоки, и на **Т**(арелке) тоже яблоки (напоминаю, что «размерность» у имен слагаемых будем писать в виде индекса (см. рис. 8–9), так, как ранее мы поступали в «Графике» с буквой **В**(сего)).

Теперь, относительно умножения.

Стоит только задать себе вопрос: если на тарелке в 6 раз **меньше**, чем на блюде, то **где;** **больше?** Ясно, что на **Б**(люде) — в 6 раз **больше**, чем на **Т**(арелке), и мы спокойно рисуем отношение «Больше В» (рис. 10, полная форма «Больше В» — с неравенством).

Б ⑥ > Т
Б = 6•Т

Рис. 10

В таблице 2 приведены решения всех задач с использованием «меньше в».

Таблица 2							
№ з-чи	Графика		Алгебра «меньше в»	Арифметика	Алгебра «Больше В»		
17	<table><tr><td>Б_я</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	Б _я	6	= Т _я	$T = \frac{Б}{6} =$	$\frac{30}{6} = 5(я)$	Б ⑥ > Т Б = 6•Т
Б _я							
6							
18	<table><tr><td>Ш_{кн}</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	Ш _{кн}	4	= С _{кн}	$C = Ш : 4 =$	$160 : 4 = 40 (кн)$	Ш = 4•С
Ш _{кн}							
4							
19	<table><tr><td>П_{пас}</td></tr><tr><td>10</td></tr></table>	П _{пас}	10	= В _{пас}	$B = \frac{П}{10} =$	$\frac{350}{10} = 35(п)$	П ⑩ > В П = 10•В
П _{пас}							
10							
20	<table><tr><td>П_{роз}</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	П _{роз}	4	= С _{роз}	$C = П : 4 =$	$80 : 4 = 20 (роз)$	П = 4•С
П _{роз}							
4							
21	<table><tr><td>П_{шт}</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	П _{шт}	3	= Г _{шт}	$\Gamma = \frac{П}{3} =$	$\frac{6}{3} = 2(шт)$	П ③ > Г П = 3•Г
П _{шт}							
3							

Комментарий к таблице 2.

1. Сначала (для всех возрастов) все задачи выполняются так: «Графика», «Алгебра» — «меньше в», «Арифметика» (как на рис. 8).

2. Затем, опять начиная с задачи 1, выполняется «Алгебра» (она практически совпадает с «Графикой» «Больше В») — «Больше В» (полная запись — с неравенством — чередуется с короткой — в виде уравнения так, как у меня). При этом запись идет на отдельном листе и **предваряется вопросом** ребенку: «А давай попробуем наше «меньше в» — деление записать в виде «Больше В», то есть в виде умножения». Если вы видите, читатель, что для ребенка это не представляет труда, то усложните задачу. **Скажите** примерно следующее: «В уравнении $Б = 6•Т$ что; нам неизвестно? **Произведение Б** или **множитель Т?**.. А раз **неизвестный множитель**, то решение запишем в виде деления: $Т = Б : 6$ (уже 5-классник в состоянии перейти от умножения к делению в алгебраической форме, поскольку за плечами

большой опыт работы с «Алгеброй» с буквенными обозначениями, а если речь идет о 3-класснике, то, думается, и для него это не окажется слишком большой трудностью).

3. Оба знака деления я употребляю с той целью, чтобы вас, читатель не смущала проблема выбора знака.

Цикл II. Деление по содержанию.

Во сколько раз БОЛЬШЕ-МЕНЬШЕ — кратное сравнение (ГРАЭЛ-(:)с)

Деление по содержанию

1. 30 яблок разложили **по 5 яблок** на тарелке. Сколько понадобилось **тарелок**? (:)с
2. 160 книг упаковали **по 20 книг** в ящик. Сколько для этого понадобилось **ящиков**? (:)с
3. 350 школьников поехали на экскурсию. Сколько для этого понадобилось **автобусов**, если в каждом автобусе поместилось 35 школьников? (:)с
4. В парке посадили восемьдесят роз по двадцать штук в ряду. Сколько **рядов** роз посадили в парке? (:)с
5. (345₇₇) Таня купила на 24 к. открыток **по 3 к.** за штуку. Сколько **открыток** купила Таня? (:)с
6. (383 (2)₈₅) 18 морковок девочка связала в пучки **по 9 морковок** в каждом. Сколько получилось **пучков**? (:)с
7. (435₉₉) В магазин привезли 90 кубиков по 10 штук в пакете. Сколько **пакетов** с кубиками привезли в магазин? (:)с
8. (471₁₀₆) Карандаш стоит 4 к. Сколько таких **карандашей** можно купить на 32 к.? (:)с
9. (472₁₀₆) В банку можно положить 2 кг варенья. Сколько надо таких **банок**, чтобы разложить 24 кг варенья? (:)с
10. (478 (1)₁₀₇) Сколько надо одинаковых **банок**, чтобы разлить 18 л сока, если в каждую банку можно налить 3 л сока? (:)с
11. (22₁₁₅) Одна пуговица стоит 9 к. Сколько таких **пуговиц** можно купить на 36 к.? (:)с
12. (16₉₄) 40 стульев расставили в ряды **по 10 стульев** в каждом. Сколько **рядов** стульев поставили? (:)с

Ответы: 1) $N_T = 6$ тарелок; 2) $N_{\text{я}} = 8$ ящиков; 3) $N_A = 10$ автобусов; 4) $N_P = 4$ ряда; 5) $N_O = 8$ открыток; 6) $N_{\Pi} = 2$ пучка; 7) $N_{\Pi} = 2$ пакета; 8) $N_K = 8$ карандашей; 9) $N_B = 12$ банок; 10) $N_B = 6$ банок; 11) $N_{\Pi} = 4$ пуговицы; 12) $N_P = 4$ ряда.

Сценарий.

Общие замечания.

В п. «Немного о делении» мы с вами ввели деление по содержанию следующим образом. Пусть у нас неизвестен множитель (множитель в арифметическом смысле, — как количество равных слагаемых). Тогда мы получим уравнение $5\text{я(блок)} \cdot x = 30\text{я(блок)}$, а решение этого уравнения: $x = 30\text{я(блок)} : 5\text{я(блок)}$. Возник вопрос: а что же такое x ? Какова его «размерность»? Я сказал, что x — это количество тарелок. И действительно, если мы сформулируем следующую содержательную задачу: 30 яблок разложили **по 5 яблок** на несколько **одинаковых** тарелок. Сколько тарелок для этого понадобилось? — то в виде умножения сразу запишем приведенное выше уравнение так: $5\text{я} \cdot x(\text{т}) = 30\text{я}$. Думаю, читатель, для вас это уже очевидно. Мы имеем — **В(сего) = 30я(блок)**, 5я(блок) — это одно из нескольких **равных** слагаемых, **несколько** тарелок — это число (**неизвестное**) равных слагаемых. — Очевидная задача

умножения, которую мы и записали нашим уравнением. А решение этого уравнения, если выразить словами, вроде бы можно было бы записать так: 30 яблок делим на 5 яблок и получаем 6 тарелок, верно?

Нет, неверно!

Вдумайтесь, читатель, какую чепуху я сейчас сказал: яблоки поделить на яблоки и получим тарелки! Ну, скажите на милость, каким это образом **из яблок** вдруг **получаются тарелки**?! — Чудеса, да и только. А чего стоит фраза: яблоки поделить на яблоки! — Это как?

Тем не менее, высказывание: 30 разделить на 5 — получим 6, где 30, 5 и 6 просто числа, никаких возражений не вызывает. Ведь 6 — это всего лишь, по определению деления, найденный неизвестный множитель.

Как же все это увязать друг с другом?

Дело в том, читатель, что именно здесь, в делении по содержанию, как мне кажется, наиболее ярко проявляется разница между абстрактным характером математики, ее логической, языковой сущностью, с одной стороны, и совершенно конкретными приложениями к конкретным, предметно-содержательным задачам (вспомните: математика как язык природы), с другой. Но это различие — всего лишь оборотная сторона единства. Не могу не привести, в связи с этим, несколько строк из книги «Я — математик» крупного математика и одного из создателей кибернетики Норберта Винера: «Ведь высшее назначение математики как раз и состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает... Так у меня впервые появилась мысль, что абстрактные математические теории, которые я изучал, имеют непосредственное отношение к описанию природы. Отсюда было уже недалеко до убеждения, что природа, в широком смысле этого слова, может и должна служить не только источником задач, решаемых в моих исследованиях, но и подсказывать аппарат, пригодный для их решения» [30, с. 27].

Однако, вернемся к арифметике, к первооснове всего дальнейшего развития математики.

Действие деления, как мы помним, появилось из реальной задачи — распределить поровну. Но, читатель, рассматривая деление на равные части, я нигде не говорил, что мы 30 яблок **делим** на 6 тарелок и получаем 5 яблок. В задаче у нас участвовали два **разнородных** объекта — яблоки и тарелки. Точно так же, как — с содержательной, предметной точки зрения — абсурдно говорить, что, деля яблоки на яблоки, мы получаем тарелки, точно также абсурдно говорить и то, что мы можем поделить яблоки на тарелки. Мы договорились всего лишь **обозначать** результат деления на равные части через 5я/т сокращение — 5 яблок на одной тарелке для того, чтобы максимально опредметить арифметическую задачу и для того, чтобы выявить «физический» смысл деления на равные части: частное — содержимое единицы делителя. То есть мы не осуществляли какое-то мифическое деление яблок на тарелки. Физически, материально мы могли только **распределить** (разложить) поровну, — и в этом смысле разделить — 30 яблок по 6 тарелкам. А вот с точки зрения математики, мы можем работать только с числами (так называемыми отвлеченными числами, числами без наименования). Как только появляются наименования (именованные числа), — это означает, что в математику в той или иной степени вторгается реальный мир, физика в самом широком смысле слова. И на пересечении этих двух реальностей — абстрактной, идеальной, математики как языка и конкретной, материальной — окружающей действительности и рождаются все трудности применения языка математики к описанию внешнего мира. И самое первое столкновение, противостояние и единство Языка и Вселенной происходит в... да, да, именно так, читатель, в прозаической, будничной и столь привычной арифметике и, прежде всего, в текстовых задачах, и, прежде всего, при работе с действием деления.

Мне хотелось одновременно и максимально опредметить, «материализовать» сущность основных арифметических действий и понятий, и в то же время, наиболее ясным и простым образом выявить их идеальную, логическую суть. Без первого невозможно воспринимать математику как совершенно естественную и необходимую каждому область знаний, возник-

шую из очень простых и всем понятных нужд человека, без второго — свободное и уверенное владение языком природы.

Переходим к работе

Задача 1

Предметно задача сводится к тому, что мы разбиваем 30 яблок на группы по 5 яблок, т. е. на **несколько равных частей** (в каждой части 5 яблок). Но если при делении на равные части мы находили **содержимое одной части**, то **сейчас находим число частей**. Мы по-прежнему делим 30 яблок поровну, но на сей раз это иное «поровну», нежели при делении на равные части. Содержимое одной из равных частей (в нашем случае 5 яблок) и число частей (в нашем случае 6) — совершенно разные вещи.

Деление по содержанию как раз и **сводится к нахождению числа частей**, на которые мы разбиваем некоторое количество предметов так, что в каждой части содержится равное количество предметов.

Поскольку математически это задача деления (распределить поровну), то воспользуемся все той же «пустоткой» ГРАЭЛа деления (рис. 4). Будем заполнять «пустотку» аналогично тому, как мы это делали в задаче 5 цикла I (рис. 6).

Привожу примерный монолог-объяснение.

1. Что мы видим? Какие **разные** объекты (величины, предметы...)? — Верно, яблоки и тарелки.

2. «разложили по» — значит действие деления (пока не уточняем какого деления).

3. Что; что делится на что; что, что распределяется? — 30 яблок. **Как** распределяем яблоки? — По 5 яблок.

Внимание.

На сей раз нас интересует **не то, где;** именно раскладываем яблоки (по тарелкам), **а то как;** каким образом распределяем яблоки (**по 5 яблок** на тарелке).

Нарисуйте «пустотку» деления и частично заполните ее (рис. 10а).

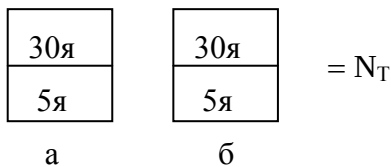


Рис. 10

4. А теперь, имя слагаемого... Какое дадим?

Прежде, чем вы продолжите, читатель, необходимы кое-какие пояснения для вас.

Вспомните, мы с вами изначально договорились четко различать имена слагаемых и их содержимое. Не поленимся вернуться к задачам цикла I главы II. «На одной тарелке 5 яблок...» (задача 1): **Т**(арелка) — имя слагаемого, а 5 я(блок) — его содержимое. Или «У Саши было 100 копеек...» (задача 4): **С**(аша) — имя слагаемого, а 100 к(опеек) — его содержимое.

Что мы ищем в нашей задаче? — Ищем **количество** тарелок, **а не содержимое** одной тарелки (сравните с задачей 1 цикла I). Ищем **число равных частей**, а не содержимое одной части (сравните с задачей 17 цикла I). Поэтому имя **Т**(арелка) нам никак не подходит.

Наиболее близким к вопросу задачи — число, количество тарелок — будет английское слово number (число, количество). Вот и возьмем для слагаемого прописную латинскую букву **N** (произносится: эн).

Теперь — к вопросу о «размерности». Основная трудность при объяснении деления по содержанию, на мой взгляд, связана именно с этим, с «размерностью».

Когда мы рассматривали деление на равные части, то писали «размерность» результата — **я/т** — в виде индекса по нескольким причинам. Прежде всего, для уяснения и закрепления

«физического» смысла деления на равные части. Затем — для сохранения единообразия обозначений (указание «размерности» в виде индекса только «у букв»).

И еще для того, чтобы четко отделить арифметику от физики. Мы не могли в «Арифметике» написать наименование величины в виде физической размерности, например, кг/п (задача 5, п. Обратите внимание, цикл I) хотя бы потому, что дети не знакомы с понятием физической размерности. В той же задаче 5 результат мы записывали в виде 9 (кг). **Наименованием** результата были килограммы (кг), а не килограммы в одном пакете (кг/п), хотя в задаче спрашивалось именно это — сколько килограммов было в каждом (одном) пакете. При делении на равные части подобная неувязка не являлась для ребенка препятствием в понимании задачи. И мы смело могли ему говорить, что распределяя 27 килограммов по 3 пакетам, мы получаем 9 килограммов. И только потом добавлять необязательное с точки зрения арифметики пояснение: где 9 кг? — в одном пакете. **Килограммы распределили на 3 равные части, — килограммы же и получили.** Все нормально, все ясно.

Но вот как быть с делением по содержанию? Да, мы опять распределяем поровну. Но только теперь 30 яблок распределяем на несколько равных частей по 5 яблок в каждой части, и в результате деления получаем 6 равных **частей**. По рис. 10а можно записать $30я : 5я = 6$. Однако в задаче спрашивается, сколько понадобилось **тарелок** (а не безразмерных частей), в задаче участвуют две «размерные» величины — **я**(блоки) и **т**(арелки).

Как, каким образом мы от яблок переходим к тарелкам? Я прихожу к убеждению, что без понятия физической размерности ответить удовлетворительным, не формальным, интуитивно ясным образом на заданный вопрос невозможно. А вот использование этого понятия сразу проясняет суть дела.

Разумеется, мои пояснения, по необходимости, будут кратки и рассчитаны на ваше понимание, читатель, а отнюдь не на понимание ребенка (если только этот ребенок не является старшеклассником). Мне хотелось бы, чтобы вы уяснили **для себя**, как физика вторгается в арифметику, а не остались в недоумении относительно того, как все-таки из яблок возникают тарелки.

В физике мы отдельно работаем с числами (числовые значения величин) и отдельно — с единицами измерений (с размерностями) этих величин. Арифметические операции с размерностями позволяют нам получить правильную размерность результата, если, конечно, мы правильно решаем задачу.

Чтобы напомнить вам, как это делается, я приведу часть решения задачи на вычисление пути при равноускоренном движении из книги Г. Роуэлла и С. Герберта «Физика» (это учебник физики для средних школ, который является стандартом образования в Англии) [31, с. 16].

$$s = ut + \frac{at^2}{2}$$

формула

$$s = 0 + 10 + \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot (10)^2 \text{ с}^2$$

подстановка

$$s = 0 + 3 \cdot 100 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{с}^2$$

подсчет

$$s = 300 \text{ м}$$

обозначение единиц измерения в ответе

Исходные данные: $u = 0 \text{ м/с}$, $t = 10 \text{ с}$, $a = 6 \text{ м/с}^2$ (м — метр, с — секунда).

Посмотрите на третью сверху строку, читатель. Вы видите, что в ней отдельно вычисляется численное значение пути и отдельно — работают с размерностями. Секунда в минус второй степени и секунда во второй степени сокращаются и остается, как и должно быть, размерность пути m (метры).

Обычно работа с размерностями осуществляется отдельно:

$$\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2 \right] = [\text{м}]$$

Применим тот же подход к нашей задаче. У нас имеется две величины — яблоки и тарелки. Хотя мы и записали в «пустотке» деления, что 30 я(блок) делим на 5 я(блок), т. е. размерность вроде бы одна и та же — [я] (яблоки), на самом деле это не так. В задаче говорится, что не просто разложили по 5 яблок, а по 5 яблок **на тарелке** (на каждой). То есть 5 яблок — это **содержимое одной** из нескольких одинаковых тарелок. А значит «размерность» числа 5 — я/т. Запишем: $30\text{я}:5\text{я}/\text{т}=6\text{я}\square\text{т}/\text{я}=6\text{т}$.

Мы получили, как и должно быть, «размерность» [т]. Мы получили в ответе именно 6 тарелок.

Разумеется, читатель, подобный подход несколько необычен и с точки зрения строгой математики способен вызвать ряд нареканий. Но на мой взгляд вышесказанное — не формальные выкрутасы, не игра с символами, а отражение того глубокого факта, что именно в действии деления физика вторгается в арифметику, поскольку мы работаем с двумя неоднородными («разноразмерными») величинами.

Конечно же и речи не может быть о том, чтобы преподносить деление в начальной школе с точки зрения размерностей. Но вот в 6-м классе, когда дети познакомятся с понятием сокращения, с действиями деления и умножения дробей, пожалуй, можно попробовать прочитать с ребенком то, о чем мы с вами сейчас говорили.

В конечном счете, если вы, читатель, не испытываете теперь дискомфорта «деля» яблоки на яблоки и получая тарелки, то моя цель достигнута. Ваше внутреннее «приятие» действия деления позволит вам, как мне кажется, чувствовать себя уверенней, находить какие-то неожиданные слова, образы, сравнения, объясняя ребенку деление.

Вот теперь, читатель, вы можете дорисовать «пустотку» так, как на рис. 10б.

Заполнив «пустотку» деления, мы превратим ее в графический элемент деления по содержанию, который обозначается так: ГРАЭЛ-(:)_с³³ (индекс «с» как раз и говорит о том, что используется форма деления по содержанию).

А вернувшись к п. 4 — ...имя слагаемого. — Какое дадим? — вы продолжаете монолог-объяснение тем, что поясняете, почему мы берем имя N (находим число равных частей, как я об этом говорил выше). О «размерности» — индекс Т — ссылаетесь на то, что ищем количество тарелок.

На рис. 11 изображен ГРАЭЛ-(:)_с задачи 1.

Графика

Арифметика

30я
5я

= N_Т

N_Т = 30 : 5 = 6 (т)

Рис. 11

Самое главное, чтобы в «Графике» ребенок усвоил, что если 30 яблок **разделить по 5** яблок, то получим **число N_Т**, равное количеству тарелок.

А в «Арифметике» мы можем говорить: 30 разделить на 5 равно 6 (количество тарелок равно 6). В скобках указана «размерность» (т) в нашем арифметическом смысле, как наименование — тарелки.

Только что сказанное достаточно близко к обычным школьным объяснениям при первоначальном знакомстве с действием деления (например, см. учебное пособие Н. Б. Истоминой [7, с. 78].

Наша же основная цель в этом цикле — научиться видеть деление по содержанию «с первого взгляда».

В таблице 3 приведены решения всех задач.

³³ Произносится: ГРАЭЛ, графэлемент деления по содержанию.

Если вы посмотрите «Графику» всех задач в таблице 3, то увидите, что характернейшей деталью является то, что и делимое, и делитель — однородные величины («одноразмерные»): яблоки «делим» на яблоки, книги — на книги и т. п. В текстах задач эта деталь отражена подчеркиванием. Выделено жирным шрифтом то, что ищем.

«Арифметика» в форме умножения считается по ключевым словам умножения: по, каждый, такой (синоним — одинаковый, один, каждый). Например, задача 5: купила на 24 к(опейки) — видим ВСЕГО. **По 3 к(опейки) за штуку** — видим равные слагаемые, а вот их число — неизвестно, значит, появляется буква x , значит, появляется действие умножения., т. е. имеем уравнение $3x \cdot x_0 = 24x$.

Букву x выгоднее, привычнее использовать в данном случае умножения, добавляя только «размерность» в виде индекса. Не забывайте, читатель, что ГрафАнализ хоть и мощный, но все же вспомогательный инструмент для изучения школьной математики. И он нужен нам не для того, чтобы мы просто рисовали задачи, а для того, чтобы мы глубже вникли в суть арифметических действий, научились «чувствовать» их, научились, благодаря этому, более свободному владению техникой. Впрочем, почему бы не писать уравнение без «размерностей»: $3 \cdot x = 24$? Никто не запрещает нам это делать. Но мне кажется, что все же лучше, предметнее так, как у меня, убирая «размерности» только в решении (в столбце «Арифметика» в форме умножения приведены и решения уравнений через букву x).

Таблица 3						
№ 3-чи	Графика		Арифметика деления	Арифметика умножения		
1	<table><tr><td>30я</td></tr><tr><td>6я</td></tr></table>	30я	6я	= N _Т	$N_T = \frac{30}{6} = 5(т)$	$6я \cdot x_T = 30я$ $x_T = \frac{30}{5}$
30я						
6я						
2	<table><tr><td>160кн</td></tr><tr><td>20кн</td></tr></table>	160кн	20кн	= N _Я	$N_Я = 160 : 20 = 8 (я)$	$20кн \cdot x_я = 160кн$ $x_я = 160 : 20$
160кн						
20кн						
3	<table><tr><td>350шк</td></tr><tr><td>35шк</td></tr></table>	350шк	35шк	= N _А	$N_A = \frac{350}{35} = 10(а)$	$35шк \cdot x_A = 350шк$ $x_A = \frac{350}{35}$
350шк						
35шк						
4	<table><tr><td>80шт</td></tr><tr><td>20шт</td></tr></table>	80шт	20шт	= N _Р	$N_P = 80 : 4 = 20 (ряд)$	$20шт \cdot x_p = 80шт$ $x_p = 80 : 20$
80шт						
20шт						
5	<table><tr><td>24коп</td></tr><tr><td>3коп</td></tr></table>	24коп	3коп	= N _О	$N_O = \frac{24}{3} = 8(о)$	$3коп \cdot x_O = 24коп$ $x_O = \frac{24}{3}$
24коп						
3коп						
6	<table><tr><td>18м</td></tr><tr><td>9м</td></tr></table>	18м	9м	= N _П	$N_{П} = 18 : 9 = 2 (п)$	$9м \cdot x_{П} = 18м$ $x_я = 18 : 9$
18м						
9м						
7	<table><tr><td>90шт</td></tr><tr><td>10шт</td></tr></table>	90шт	10шт	= N _П	$N_{П} = \frac{90}{10} = 9(п)$	$10шт \cdot x_{П} = 90шт$ $x_{П} = \frac{90}{10}$
90шт						
10шт						

8	$\frac{32\text{коп}}{4\text{коп}}$	$= N_{\text{КАР}}$	$N_{\text{КАР}} = 32 : 4 = 20 \text{ (кар)}$	$4\text{коп} \cdot x_{\text{КАР}} = 32\text{коп}$ $x_{\text{КАР}} = 32 : 4$
9	$\frac{24\text{кг}}{2\text{кг}}$	$= N_{\text{Б}}$	$N_{\text{Б}} = \frac{24}{2} = 12 \text{ (б)}$	$2\text{кг} \cdot x_{\text{Б}} = 24\text{кг}$ $x_{\text{Б}} = \frac{24}{2}$
10	$\frac{18\text{л}}{3\text{л}}$	$= N_{\text{Б}}$	$N_{\text{Б}} = 18 : 3 = 6 \text{ (б)}$	$3\text{л} \cdot x_{\text{Б}} = 18\text{л}$ $x_{\text{Б}} = 18 : 3$
11	$\frac{36\text{коп}}{9\text{коп}}$	$= N_{\text{П}}$	$N_{\text{П}} = \frac{36}{9} = 4 \text{ (п)}$	$9\text{коп} \cdot x_{\text{П}} = 36\text{коп}$ $x_{\text{П}} = \frac{36}{9}$
12	$\frac{40\text{ст}}{10\text{ст}}$	$= N_{\text{Р}}$	$N_{\text{Р}} = 40 : 10 = 4 \text{ (р)}$	$10\text{ст} \cdot x_{\text{Р}} = 40\text{ст}$ $x_{\text{Р}} = 40 : 10$

Комментарий к таблице 3.

1. Последовательность выполнения задач такая же, какая указана в комментарии к таблице 2.
2. Запись задачи в форме умножения показана выше.

Во сколько раз БОЛЬШЕ-МЕНЬШЕ

(кратное сравнение)

13. На тарелку положили

5 яблок,

а на блюдо

30 яблок.

Во сколько раз **больше** яблок положили на блюдо, чем на тарелку? (Во сколько раз **меньше** положили яблок на тарелку, чем на блюдо?) $(:)\text{СБ} ((:)\text{СМ})$

14. В шкафу было 160 книг,

а на полке

20 книг.

Во сколько раз **меньше** было книг на полке, чем в шкафу? (Во сколько раз **больше** было книг в шкафу, чем на полке?) $(:)\text{СМ} ((:)\text{СБ})$

15. В вагоне помещается 51 пассажир. А в поезде 612 пассажиров. Во сколько раз **больше** пассажиров в поезде, чем в вагоне? (Во сколько раз **меньше** пассажиров в вагоне, чем в поезде?) $(:)\text{СБ} ((:)\text{СМ})$

16. В парке посадили восемьдесят роз, а в саду двадцать роз. Во сколько раз **больше** роз посадили в парке, чем в саду? (Во сколько раз **меньше** роз в саду, чем в парке?) $(:)\text{СБ} ((:)\text{СМ})$

Задачи с синонимичными выражениями.

17. Килограмм яблок стоит пятнадцать рублей, а килограмм апельсинов тридцать рублей. Во сколько раз килограмм яблок **дешевле** килограмма апельсинов? (Во сколько раз килограмм апельсинов **дороже** килограмма яблок?) $(:)\text{СМ} ((:)\text{СБ})$

18. Котенку Лева шесть месяцев от роду, а коту Егору тридцать шесть месяцев. Во сколько раз котенок **младше** кота? (Во сколько раз кот **старше** котенка?) $(:)\text{СМ} ((:)\text{СБ})$

19. От Ростова до Каменска нужно ехать четыре часа, а от Ростова до Москвы двадцать часов. Во сколько раз **дольше** ехать до Москвы, чем до Каменска? (Во сколько раз **меньше** ехать до Каменска чем до Москвы?) $(:)\text{СБ} ((:)\text{СМ})$

Ответы: 13) $x = 6$; 14) $x = 8$; 15) $x = 12$; 16) $x = 4$; 17) $x = 2$; 18) $x = 6$; 19) $x = 5$.

Общие замечания.

Задача 1 этого цикла (деление по содержанию) предметно сводилась к тому, что мы 30 яблок раскладывали поровну по 5 яблок, т. е. разбивали 30 яблок на несколько равных частей под названием тарелки и нашли, что понадобится 6 тарелок.

Пусть наши 30 яблок лежат на блюде. На рис. 12а видно, что содержимое Б(люда) распределено поровну по 5 я(блоку), а на рис. 12б видно, что для этого понадобится 6 Т(арелок).

Б		
5я	5я	5я
5я	5я	5я

Т
5я

Б		
Т	Т	Т
Т	Т	Т

Рис. 12а

Рис. 12б

И теперь можно сказать, что 30 яблок не просто разбиты на несколько равных частей, а конкретно **на 6 равных частей**. То есть можно записать в виде умножения $\text{Б} = 6 \cdot \text{Т}$. А вспоминая отношение «Больше В» (цикл II, глава IV), можно сказать, что на Б(люде) **в 6 раз больше** яблок, чем на Т(арелке). Или в виде неравенства $\text{Б} \textcircled{>} \text{Т}$. А отсюда уже совершен-

но естественным образом формулируется такой вопрос: **во сколько раз больше** яблок на блюде, чем на одной тарелке? То есть мы **сравниваем** содержимое блюда и одной тарелки в том смысле, что узнаем сколько раз надо повторить слагаемым 5 яблок (содержимое одной тарелки), чтобы получить 30 яблок (содержимое блюда). «Разы», в отличие от тарелок, — **безразмерная** величина. Если бы мы **не знали** во сколько раз на блюде яблок больше, чем на тарелке, то отношение «Больше В» должны были бы записать так, как на рис. 13.

$$Б \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} > Т \text{ или } Б = x \cdot Т$$

Рис. 13

И произносили бы: **Б** в **х раз** больше **Т**.

В только что приведенном уравнении мы видим, что x — неизвестный множитель, а значит, действие деления: $x = Б : Т$.

Вывод: ответ на вопрос «во сколько раз больше?» получается **действием деления** большего числа на меньшее.

И уже понятно, что существует и вопрос «во сколько раз меньше?» — На блюде в 6 раз больше, значит на тарелке в 6 раз меньше. Или как выше (по рис. 13): **Б** в **х раз** больше **Т**, значит **Т** в **х раз** меньше **Б**. И поскольку «меньше мы не знаем», то вопрос «во сколько раз **Т** меньше **Б**?» мы мгновенно переводим в вопрос «во сколько раз **Б** больше **Т**», который записывается в виде уравнения $Б = x \cdot Т$, где x — число «разов» — одно и то же и для «меньше», и для «больше». Вот почему задача «во сколько раз?» и для «меньше», и для «больше» решается одним и тем же действием деления большего числа на меньшее.

О слове и понятии «отношение».

Стоит добавить, что узнавая делением, во сколько раз одно число больше другого (или какую часть одно число составляет от другого), мы находим **частное**, которое обычно называют **отношением** (6-й класс). Мы с вами, читатель, используем три понятия со словом «отношение»: отношение «Больше НА», отношение «Больше В» и отношение «Равенства». Поскольку ребенок давно уже привык к этим понятиям, то маловероятно, что он будет путать отношение — как частное, как математическое понятие и слово «отношение», составляющее часть наших трех понятий (во всяком случае после надлежащих объяснений в 6-м классе).

Переходим к работе.

Задача 1

Несмотря на то, что к делению мы пришли от умножения (как это делается начиная с 5-го класса), но вы, читатель, разумеется, уже заметили, что рисовать деление легче именно в виде графэлемента деления, вне зависимости от той или иной формы этого действия. Деление в виде умножения в задачах будет нам нужно не так уж часто. ГрафАнализ отнюдь не требует искусственно прибегать к принципу — «меньше мы не знаем» в случаях, когда это не оправдано сутью задачи. «Графика» задачи всегда должна быть максимально прозрачна и ясна с точки зрения видения арифметических действий и их практического использования. Чем дальше будет продвигаться ребенок в использовании ГРАН, тем более гибким образом он будет его использовать. Будут появляться собственные обозначения, собственный подход в рисовании «Графики», какие-то элементы будут опускаться и т. п. и т. п. Все, что дано в этой книге — всего лишь основа для применения ГрафАнализа. Если вы видите, что ребенку легче воспринять и нарисовать задачу немного иначе, нежели рекомендуется, то пусть и осуществляет свой вариант. Лишь бы при этом не нарушались технологические требования и не страдало понимание.

На рис. 14 в «Графике» изображен графэлемент деления по содержанию, относящийся к понятию «во сколько раз больше?».

«Графика» состоит из двух элементов. В первом столбце мы просто извлекаем данные из условия. **Это должно осуществляться автоматически**: видим в тексте число, можем дать имя? — мгновенно рисуем (и уж конечно же с «размерностью»). По вопросу задачи — во сколько раз больше? — **видим** деление, а конкретно — деление по содержанию (об этом же наглядно говорят и одинаковые «размерности» делимого и делителя **Б** и **Т**).

Таблица 4			
Графика		Алгебра	Арифметика
Т 5я	Б 30я	$x = \frac{30}{6} =$	$\frac{30}{6} = 6$
	$\frac{\text{Бя}}{\text{Тя}} = x$		
	$\frac{30\text{я}}{5\text{я}} = x$		$x = \frac{30}{6} = 6$

Обратите внимание на безразмерный x — «во сколько раз больше?». Ситуация с «иксом» совершенно аналогична разностному сравнению в вычитании — «на сколько больше-меньше?» (цикл III, глава III). Результат деления оказывается безымянным, поэтому используем x .

Во втором столбце «Графики» даны два варианта деления: верхний — «в буквах» и нижний — «в числах». Можно выбрать любой из них. Вариант «в числах» короче, не требует «Алгебры» (а для начальной школы, где ГрафАнализ, в том, что касается деления, на данном этапе будет больше выполнять иллюстративно поясняющую функцию, этот вариант, по-видимому, единственно возможный). Но начиная с 5-го класса нужно использовать вариант «в буквах». Не только потому, что мы привыкли работать с буквенными уравнениями, но и для соблюдения единой стилистики ГРАН. Ведь вопрос «во сколько раз больше?» может являться вопросом сложной задачи в несколько действий. А уж там уповать на арифметический способ решения стоит далеко не во всех случаях. Поэтому стоит чередовать варианты второго столбца «Графики» так, как показано в таблице 5, в которой приведены решения всех задач. Никаких особых пояснений таблица 4 не требует, кроме следующих:

1. Вопросы каждой задачи реализованы как в виде «во сколько раз больше», так и в виде «во сколько раз меньше». **Обязательно обращайтесь внимание ребенка на тот факт, что и графически, и арифметически решение одно и то же: большее число делится на меньшее.**

2. Ответы — безразмерны, например, **в 6 раз больше** (или меньше).

Таблица 5				
№ з-чи	Графика		Алгебра	Арифметика
13	Т 5я	Б 30я	$x = \frac{\text{Б}}{\text{Т}} =$	$\frac{30}{5} = 6$
		$\frac{\text{Бя}}{\text{Тя}} = x$		
14	Ш 160кн	П 20кн	$x = \frac{160\text{кн}}{20\text{кн}} =$	$x = 160 : 20 = 8$

15	В 51п	П 612п	$\frac{П}{В} = x$	$x = \frac{П}{В} =$	$\frac{612}{51} = 12$
16	П 80р	С 20р	$\frac{80р}{20р} = x$		$x = 80 : 20 = 4$
17	Я 15руб	А 30руб	$\frac{А_{руб}}{Я_{руб}} = x$	$x = \frac{А}{Я} =$	$\frac{30}{15} = 2$
18	Л 6м	Е 36м	$\frac{36м}{6м} = x$		$x = 36 : 6 = 6$
19	К 4ч	М 20ч	$\frac{М_{ч}}{К_{ч}} = x$	$x = \frac{М}{К} =$	$\frac{20}{4} = 5$

В таблице 6 решения всех задач реализованы в виде умножения, т. е. деление как поиск неизвестного множителя. Начиная с 5-го класса стоит провести решение всех задач и в этой форме, закрепляя смысл действия деления.

форме, записывая символ десятичной дроби.

Таблица 6				
№ з-чи	Данные из условия		Алгебра	Арифметика
13	Т 5я	Б 30я	$B = x \cdot T$ $x = \frac{B}{T} =$	$\frac{30}{5} = 6$
14	Ш 160кн	П 20кн	$Ш \cdot (x) > П$ $Ш = x \cdot П$ $x = Ш : П =$	$160 : 20 = 8$
15	В 51п	П 612п	$П = x \cdot В$ $x = \frac{П}{В} =$	$\frac{612}{51} = 12$
16	П 80р	С 20р	$П \cdot (x) > С$ $П = x \cdot С$ $x = П : С =$	$80 : 20 = 4$
17	Я 15руб	А 30руб	$A = x \cdot Я$ $x = \frac{A}{Я} =$	$\frac{30}{15} = 2$

18	Л 6м Е 36м	$B(x) > Л$ $B = x \cdot Л$ $x = B : Л =$	$36 : 6 = 6$
19	К 4ч М 20ч	$M = x \cdot K$ $x = \frac{M}{K} =$	$\frac{20}{4} = 5$

Замечание.

Впрочем, в своей книге «Методика обучения математике в начальных классах» Н. Б. Истомина формулируя следующее задание: сделай рисунок, к которому можно записать три выражения: а) $5 \cdot 4$, $20 : 4$, $20 : 5$; б) $4 \cdot 5$, $20 : 4$, $20 : 5$ пишет: «В процессе выполнения приведенных выше заданий учащиеся осознают связь действий умножения и деления, которая обобщается в виде правил, отражающих взаимосвязь компонентов и результатов умножения и деления. Эти правила формулируются в таком виде:

- Если значение произведения разделить на один множитель, то получим другой множитель.
- Если делитель умножить на значение частного, то получим делимое.
- Если делимое разделить на значение частного, то получим делитель» [7, с. 81–82].

Резюме циклов I–II.

Выяснили, что действие деления содержательно **распадается** на две совершенно разные формы: деление на равные части и деление по содержанию.

Смысл деления на равные части состоит в том, чтобы **найти содержимое единицы делителя** (п. «Немного о делении»).

Смысл деления по содержанию сводится к тому, чтобы **найти число равных частей**, на которые мы разбиваем некоторое количество предметов так, что в каждой части содержится равное количество предметов (задача 1, цикл II).

Однако обе формы деления **возникают из одной и той же задачи**: «распределить поровну». Обе формы деления **математически сводятся к одному и тому же: найти неизвестный множитель** (п. «Немного о делении»).

Деление на равные части выступает в **двух видах** (поэтому в одном цикле даны оба вида деления): деление на равные части как таковое (найти **содержимое** единицы делителя) и «меньше в несколько раз» (найти **содержимое** одной из равных частей).

Деление по содержанию выступает в **трех видах** (поэтому в одном цикле даны три вида деления): деление по содержанию как таковое (найти **число** равных частей) и **сравнение** — во сколько раз больше или меньше?

Тем самым **один** графэлемент деления реализует **пять логических элементов арифметики**: деление на равные части, уменьшить в несколько раз, деление по содержанию, во сколько раз больше?, во сколько раз меньше?

В силу принципиальной содержательной разницы вы делены как отдельные графические элементы **ГРАЭЛ-(:)_Р** (задача 1 цикл I) и **ГРАЭЛ-(:)_С** (задача 1 цикл II).

«... деление при решении задач употребляется в следующих случаях:

Когда данное число надо разделить на несколько равных частей или уменьшить его в несколько раз.

Когда надо узнать, сколько раз в данном числе содержится другое число, или определить во сколько раз одно число больше другого (найти отношение чисел» [11, с. 68]