Глава III
ВЫЧИТАНИЕ

Вычитание как формальное действие схватывается относительно легко. Легко возникает привычка, порождающую иллюзию понимания действия вычитания, — не раздумывая отвечать: 8 – 5 = 3.

Но уже труднее услышать ответ на вопрос: «А почему 8 – 5 = 3?» В большинстве случаев вы услышите: «А потому, что надо уменьшить 8 на 5, отсчитать 5 единиц от восьми или нечто подобное.

И уж совсем трудно будет услышать что-то вразумительное, если спросить, почему уравнение $x + 5 = 8$ решается: $x = 8 - 5$ (помните?).

И это противоречие — противоречие между формально легким владением вычитанием и неумением объяснить решение уравнения — должно было бы заставить нас, учителей, задуматься.

А на практике обследование показывает (вплоть до 11-го класса), что ребенок не только не может объяснить, почему $x = 8 - 5$, но и, зачастую, путается в чисто формальной записи решения простейших (и столь важных для дальнейшего) уравнений (особенно, в уравнении типа $8 - x = 5$, решение которого дважды опирается на определение действия вычитания).

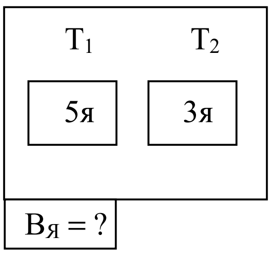
Немного о вычитании

Но мы с вами начнем, естественно, не с определения вычитания, а с действия сложения, тем сам самым подчеркнув, что в арифметике действительно есть только одно действие — сложение. Все остальные арифметические действия сводятся к сложению (первичному действию).

Шесть занятий тому назад мы начали с простейшей задачи (ГРАЭЛ-(Суммы)): «На одной тарелке 5 яблок, на другой — 3 яблока. Сколько всего яблок на обеих тарелках?»[1].

То есть, по известным слагаемым искали неизвестную сумму (рис. 1).

ГРАС-1



$В = T_1 + T_2 = 5 + 3 = 8$ (я)

Рис. 1

Предметно-арифметически мы писали:

$$5я + 3я = В_я = \boxed{?_я} \qquad (1)$$

известные слагаемые — **неизвестная** сумма

---

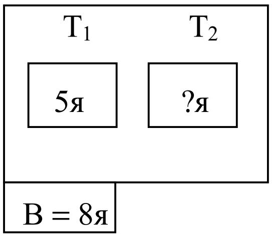
[1]Все первые задачи, вводящие ГРАЭЛы, взяты из «Арифметики» Чекмарева Я. Ф. и Тулинова Б. А. [11].

Теперь же у нас будет другая задача (обратная): «На блюдо ***с двух тарелок*** положили 8 яблок. ***С одной*** тарелки — 5 яблок. Спрашивается: сколько яблок положили ***с другой*** тарелки?»

Видим (уже умеем видеть!): нам известно Всего = 8я (т. е. **сумма**), известно **одно слагаемое** $Т_1$ = 5я. Неизвестно **второе слагаемое** $\mathbf{Т_2}$ (сколько яблок положили с другой тарелки).

Нарисовать «Графику» ничего не стоит: уж что-что, а **сумму** двух слагаемых (ГРАЭЛ-($\sum$)) мы рисовать умеем (рис. 2).

ГРАС-2 Блюдо



$$В = Т_1 + Т_2 = Т_1 + \boxed{?я}$$
$$8я = 5я + \boxed{?я} \qquad (2)$$

Рис. 2

Можем ли мы **посчитать**: сколько яблок на другой тарелке ($\mathbf{Т_2}$)? — Разумеется.

Начнем прибавлять по одному яблоку на $\mathbf{Т_2}$ и складывать с 5я на $\mathbf{Т_1}$ (ведь складывать-то мы умеем!):

$Т_1$ + $Т_2$ = В(сего),
5я + 1я = 6я,
5я + 2я = 7я.

И когда положим на $Т_2$ три яблока, то увидим, что задачу мы решили:

5я + 3я = 8я,
$Т_1$ + $Т_2$ = В.

Всего у нас было на блюде В = 8я. На $\mathbf{Т_1}$ было 5я. Раз мы, положив 3я на $\mathbf{Т_2}$, получили, как и до́лжно, 8я, значит мы верно решили задачу. Решили чисто **экспериментальным** путем, и пользуясь именно **действием сложения**.

Все это очевидно уже для первоклассника, как только он научился складывать в пределах первого десятка. Но не поленимся и выпишем (2) еще раз:

сумма		**слагаемые**			
В	=	$Т_1$	+	$Т_2$	
В	=	$Т_1$	+	$\boxed{?я}$	
8я	=	5я	+	$\boxed{?я}$	(3)
известная сумма		**известное** слагаемое		**неизвестное** слагаемое	

Что же мы делали?

Видим из (3): **по известной сумме** (В = 8я) **и известному слагаемому** ($Т_1$ = 5я) находили **неизвестное слагаемое** ($Т_2$ = 3я).

Вот это действие — поиск неизвестного слагаемого — и называется <u>вычитанием</u>.

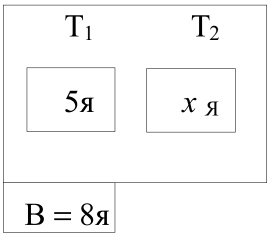
Теперь позаботимся об обозначениях.

<u>Во-первых</u>, **вместо знака** «?», давайте в качестве **содержимого** неизвестного слагаемого, будем писать **букву** «*x*» — этой буквой математики давным-давно договорились обозначать неизвестную величину. Да и просто произносить удобнее. Ну как сказать вслух в «Арифметике»: 8 = 5 + ? (восемь равно пять плюс вопрос)? А вот: $8 = 5 + x$ (восемь равно пять плюс x) — произносится легко.

(Конечно, вместо буквы x можно было бы использовать и другие буквы, например, y, z или даже греческую букву Ψ (пси), но они нам пока не понадобятся, т. к. у нас очень долго будет одна неизвестная величина, а значит, нам вполне хватит одной буквы.)

Таким образом наша задача целиком будет выглядеть так, как на рис. 3.

ГРАС-3



$В = T_1 + T_2$

$8 = 5 + x$

Рис. 3

<u>Во-вторых</u>, чтобы обозначить **само новое действие — вычитание** — мы будем вместо $8 = 5 + x$ писать $x = 8 - 5$ (произносится, мы знаем, восемь минус пять).

<u>В третьих,</u> — и самое главное! — мы всегда будем помнить, что

$8 = 5 + x$ и $x = 8 - 5$ (4),

это **одно и то же** (см. в конце данного пункта п. «О словах: «одно и то же»); просто две разные записи **одного и того же действия: по сумме и слагаемому найти x — неизвестное слагаемое** (так мы *определили* действие вычитания и *договорились так его обозначать*, — используя знак «–» минус).

Когда мы **складываем**, мы **присчитываем** единицы одного известного слагаемого к другому известному слагаемому.

Когда **вычитаем**, мы **отсчитываем** единицы известного слагаемого от известной суммы.

И все-таки самое важное, повторюсь, то, что **действие вычитания — это, прежде всего, действие сложения** известного слагаемого с неизвестным слагаемым (его можно найти подбором).

Можно спросить: а для чего нам два действия? И в самом деле: для чего?

Если посмотрим на наши две задачи ГРАС-1 и ГРАС-2, то увидим, что хоть мы и решаем их обе путем сложения, **но задачи-то разные**: получить и отдать, присчитать и отсчитать, увеличить и уменьшить. А разные задачи и решать удобнее бывает по-разному. Не будем же мы всякий раз писать $8 = 5 + x$ и присчитывать. Легче и удобнее сразу написать $x = 8 - 5$. И как мы запомнили таблицу сложения (ведь совсем не трудно было нам запомнить ее, чтобы не присчитывать каждый раз по единице), точно также — но уже **гораздо легче и быстрее!** — мы — для удобства счета — запомним и таблицу вычитания. Ее и запоминать-то нечего (**почти!**) — это та же таблица сложения (однозначных чисел). Но на первых порах: вычесть 5 из 8 (т. е. найти $x = 8 - 5$) — будем задавать себе вопрос: что надо прибавить к 5, чтобы получить 8 (ведь $x = 8 - 5$ и $8 = 5 + x$ — **это одно и то же по определению вычитания**)? Ну конечно же 3, ибо таблицу сложения мы превосходно знаем (**должны знать!**).

А складывать всегда легче, чем вычитать!

Общие замечания.

Итак, читатель, поскольку мы знакомы с понятием промежуточной суммы как слагаемым (глава II, цикл V, задача 5), вспомогательной графсхемой и вообще с алгоритмом извлечения данных (АИД, глава II, цикл VI, задача 3); рука и взгляд — натренированы почти до автоматизма в ви́дении сумм и слагаемых, то никакие неожиданности **принципиального** характера нам не грозят до главы V — «Деление».

Посему — сосредоточиваемся на действительно важных вещах идеологического плана: «в арифметике только одно действие — сложение» и «мы не знаем, что такое меньше, только — больше».

Конечно же, **в текстах задач** мы постоянно будем встречать фразы типа «меньше на столько то», «на сколько меньше?..», а в арифметических действиях — действие вычитания: ведь и сама глава носит название «Вычитание».

Обратите внимание: я сказал «в текстах задач» и «в арифметических действиях». А вот в «Графике» мы **в принципе ничего не увидим кроме сумм, слагаемых и отношения «Больше НА»**. И в «Алгебре» всегда первое уравнение, считанное с «Графики», будет суммой — суммой с неизвестным слагаемым, как об этом было сказано выше. Именно это и составляет предмет и цель первых трех циклов: **видеть сумму, и лишь затем — разность**. Именно это поможет нам **мимоходом** «впечатать» сначала в память, а впоследствии и в понимание, смысл действия вычитания как нахождение неизвестного слагаемого и решение простейшего уравнения типа $x + 5 = 8$.

Ну и последнее.

Исторически так сложилось, что все первые задачи арифметических действий (вводящие ГРАЭЛы) — 3 яблока, 5 яблок… — взяты из «Арифметики» Чекмарева Я. Ф и Тулинова Б. А. (см. [11], я уже упоминал об этом).

Вы, разумеется, заметили, что почти все циклы начинаются с «яблок». Как ни странно, оказывается, даже это нам с вами на руку. Начиная с ребенком циклы «с яблоками», **скажите** ему нечто вроде: «Да-да, несомненно, опять наши любимые яблоки».

Дело в том, что эти «яблоки» надоели и в школе, и в ГрафАнализе до такой степени, что даже третьеклассник оценит юмор ситуации в том смысле, что «ну не в яблоках же дело, не яблоками он занимается». А начать занятие с улыбки и уверенности в своих силах — великое дело!

Кроме того, повторяющиеся тексты, «размерности» (особенно в циклах, вводящих ГРАЭЛы) не отвлекают каждый раз ребенка сюжетной канвой (за исключением тех случаев, когда хитросплетение сюжета сознательно используется для затруднения восприятия задачи, как в цикле VI, главы II).

Важное замечание.

В этой главе, практически в каждом цикле я буду приводить одну-две задачи с дробями, в основном взятыми из учебников 5–6 классов или дидактических материалов (впрочем, в главе II я, забегая вперед, уже сделал это отчасти).

Вы увидите, читатель, что ребенок, владеющий базовой технологией ГрафАнализа на уровне «3 + 5 яблок» (т. е. на задачах в натуральных числах), с легкостью перенесет методы решения задач уровня 1–2-го классов на арифметические задачи 6-го класса.

И вот тут-то со всей очевидностью проявится основная задача школы (до 7-го класса, до Алгебры-7) — научить ребенка быстро и грамотно считать! Ведь логические скелеты задач 6-го класса будут те же, что для «3 + 5 яблок».

Вы увидите, что основной проблемой станет счет. Основной проблемой станет понимание смысла дроби, умение находить «дробь по числу», опираясь на смысл дроби.

Не имея возможности сколь-нибудь подробно останавливаться на теме дробей (второе знаниевое ядро математики), я, тем не менее, в этой главе и главе V «Деление» коснусь этой темы на уровне, достаточном для практического использования в 6-м классе.

О словах: «одно и то же».

Вычитание — первое из четырех обратных **арифметических** действий (вычитание, деление, извлечение корня, логарифмирование).

В превосходных учебниках алгебры Мордковича А. Г. об операциях извлечения корня и логарифмировании говорится следующее:

• «Говорят, что $\sqrt{a} = b$ и $b^2 = a$ — *одна и та же математическая модель* (одна и та же зависимость между неотрицательными числами a и b), но только вторая описана на более простом языке, чем первая (использует более простые символы)» [19, с. 88].

• Подчеркнем, что $\log_a b = c$ и $a^c = b$ — одна и та же математическая модель (одна и та же зависимость между числами a, b и c), но только вторая описана на более простом языке (использует более простые символы)» [20, с. 263].

Когда я говорю, о записи (4) — «это **одно и то же»**, то, разумеется, понимаю под «одним и тем же» **одну и ту же математическую модель**, пользуясь терминологией Мордковича А. Г. Но если в его учебниках алгебры понятие математической модели вводится **явным образом** с самого начала — в Алгебре-7, то в ГрафАнализе мы используем это понятие **неявно**, на уровне эмпирики, в силу возрастных особенностей детей.

Хотелось бы добавить, что говоря об одной и той же математической модели, предпочтительней, мне кажется, писать так: $\sqrt{a} = x$ и $x^2 = a$, $\log_a b = x$ и $a^x = b$, т. е. используя букву x, опять и опять акцентируя внимание на уравнениях. Так делает Мордкович А. Г., когда объясняет откуда появились понятия корня и логарифма — из необходимости решать уравнения $x^2 = a$ и $a^x = b$. Мой опыт работы в качестве «ликвидатора математической безграмотности» с несомненностью показывает, что стоит только заменить букву, т. е. сконцентрироваться на том, что мы решаем уравнение, и, что не менее важно, свести (как в действии вычитания) обратную операцию к прямой направляющими вопросами: какое число x возводим в квадрат, чтобы получить число a «под корнем» (под знаком корня)?; в какую степень x возводим основание a, чтобы получить число b «под логарифмом» (под знаком логарифма)? — и ребенок с легкостью схватывает самую сущность действия извлечения корня как нахождение неизвестного основания и логарифмирования как нахождение неизвестного показателя.

Цикл I. Известны сумма и одно слагаемое. Найти второе слагаемое (ГРАЭЛ-(Δ))

1. На блюдо с 2-х тарелок положили
8 яблок.
Причем с одной тарелки положили 5 яблок.
Сколько яблок положили с другой тарелки?

2. В бочку из 2-х коробок положили
80 яблок.
Причем из одной коробки положили 30 яблок.
Сколько яблок положили из другой коробки?

3. В магазин две машины привезли 800 ящиков конфет. Причем одна машина привезла 500 ящиков конфет. Сколько ящиков конфет привезла вторая машина?

4. Саша и Маша купили упаковку спичек за 250 копеек. У Саши было 100 копеек. Сколько денег добавила ей Маша?

5. Два автобуса проехали 190 километров. Один автобус проехал 102 километра. Какое расстояние проехал другой автобус?

6. От реки до озера путешественник дошел за 8 часов. Сначала он добрался до горы за 5 часов. Сколько времени ему понадобилось, чтобы дойти затем от горы до озера?

7. За две недели завод выполнил $\frac{13}{20}\left(\frac{25}{36}\right)$ заказа, причем за первую неделю было выполнено $\frac{5}{20}\left(\frac{5}{48}\right)$. Какую часть заказа завод выполнил за вторую неделю?

Ответы: 1) 3 я.; 2) 50 я.; 3) 300 я.; 4) 150 к.; 5) 88 км; 6) 3 ч.; 7) $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ — 5-й класс ($\frac{85}{144}$ — 6-й класс)

Сценарий.

Пояснения общего характера.

Прочитайте вместе с ребенком (от 3-го класса и старше) пункт «Немного о вычитании».

Особенно обратите его внимание на то, что хотя ГРАС-1 (рис. 1) и ГРАС-2 (рис. 2) совпадают — по внешней форме это ГРАЭЛ-(Суммы); совпадает и «Алгебра»: $B = T_1 + T_2$, но в (1) известны слагаемые **и неизвестна сумма**, а в (2) — известны сумма, одно слагаемое **и неизвестно другое слагаемое**.

(Вы все время будете спрашивать ребенка: «Что неизвестно: сумма или слагаемое?.. А раз неизвестно слагаемое — действие вычитания».)

Само собой разумеется, — вы скажете ему, что задачки первых трех циклов решаются в уме, но действие вычитания **очень коварно**: стоит **чуть усложнить** задачу, немного невнимательности — и готовенькая ошибка!

Вычитание — гораздо сложнее, чем сложение (как деление гораздо сложнее умножения: ведь умножение — это сложение). Но мы вовсе не по этой причине предпочитаем рисовать суммы, и ГрафАнализ «**прямым экспериментом**» подтверждает это. «Графика» **сама рисуется** в виде сумм именно потому, что в «арифметике только одно действие — сложение».

Обратите внимание ребенка **на этот важнейший факт**! ГрафАнализ — не нечто искусственное, придуманное. Только потому ГРАН и является столь мощным и легкодоступным инструментом, что он отражает реальную логику арифметики, построенную на счете, на сложении, на суммах и слагаемых.

Исторически арифметика возникала как первый раздел математики (раньше геометрии) из счета. Потом, по мере усложнения практических задач человека, нужно было научиться не только считать — «сколько всего?» (присчитывать), но и — «сколько останется?» (отсчитывать).

Однако: «присчитываем» ли мы, «отсчитываем» ли — работаем только с суммами и слагаемыми. Нужды нет, что в вычитании **сумма <u>называется</u>** уменьшаемым, **одно из слагаемых** — вычитаемым, а **другое слагаемое** — разностью. Это всего лишь следствие развития **математики <u>как языка</u>**: для более тонкого и полного отражения физической реальности необходимо расширение словарного запаса, усложнение грамматики и синтаксиса.

А суть остается та же: суммы и слагаемые!

Посмотрите сами, читатель:

слагаемые				**сумма**
3	+	5	=	8
8	–	5	=	3
8	–	3	=	5
уменьшаемое		**вычитаемое**		**разность**
сумма		**слагаемое**		**слагаемое**

Видим: уменьшаемое — это сумма, вычитаемое и разность — это слагаемые.

Вот почему в ГрафАнализе — **хотим мы того или не хотим!** — в «Графике» у нас только суммы и слагаемые.

Внимание.

Вы должны очень глубоко **прочувствовать** сей факт, читатель. Только тогда у вас начнут появляться **сами** какие-то «мелкие» дополнения, реплики, замечания, которые явятся для ребенка тем вовремя сказанным нужным словом, без которого невозможно живое общение, «учительство», и которые в принципе невозможно (да и не нужно) предусмотреть даже **в технологии** обучения.

В цикле I вводится **четвертый** графический элемент — **ГРАЭЛ-(Вычитания)** или **ГРАЭЛ-(Разности)**. **Обозначение**: **ГРАЭЛ-(Δ)**[2].

Графика

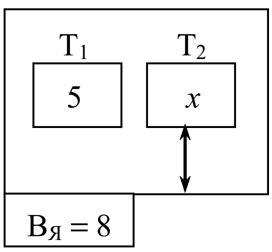


Рис. 4

Алгебра

$B = T_1 + T_2$

Арифметика

(5) $8 = 5 + x$

(6) $x = 8 - 5$

(7) $x = 3$

[2] «… по латыни разность называется *differentia*; но так как буквой *d* в дифференциальном исчислении обозначается … «дифференциал»,.. то для обозначения приращения (т. е. разности. — В. Х.) переменной берется буква **Δ** — «дельта» греческого алфавита, соответствующая латинскому *d*» [21, с. 34].

Рисовать будем так, как на рис. 4 изображена Графика (на этом рисунке фактически дано полное решение задачи 1).

Переходим к работе.

Задача 1

Поскольку вы прочитали с ребенком пункт «Немного о вычитании», в котором идея вычитания иллюстрируется как раз на задаче 1, то попросите его просто быстренько воспроизвести рис. 3 (с текста задачи, разумеется, а не перерисовывая рис. 3).

Когда в «Арифметике» он напишет $8 = 5 + x$ — остановите его и **скажите**: «Посмотри, что мы написали. Слева у нас число, справа — число и буква (алгебраическое выражение). Левая и правая части **соединены знаком «=»**. Такая конструкция называется **равенство**. Если равенство **числовое**[3], то мы можем посчитать слева и справа и посмотреть: верное оно или неверное.

Но **наше равенство не числовое**, т. к. справа есть еще и буква x — неизвестная величина (мы же **договорились** содержимое **неизвестного слагаемого** обозначать буквой x).

Такое **равенство**, содержащее **неизвестную величину**, называют **уравнением**.

Как решать его — мы с тобой уже знаем: раз нужно найти неизвестное слагаемое, значит — по определению! — действие вычитания».

И **пишете** вслед за уравнением $8 = 5 + x$ **его решение**: $x = 8 - 5$.

Продолжаете: «А уж вычесть 5 из 8!.. Само собой — 3».

Пишете окончательное **решение**: $x = 3$ (я).

У вас получится «Арифметика» рис. 4.

Обратите внимание на некоторую вольность, которую я себе позволил, называя решением уравнения и $x = 8 - 5$ и $x = 3$.

Если строго, то решением уравнения (5) является только (7), т. к. **решить уравнение** (5) — значит **найти те значения** x, которые удовлетворяют равенству (5), т. е. при подстановке — **обращают уравнение в верное числовое равенство** (при $x = 3 \Rightarrow 8 = 5 + 3 \Rightarrow 8 = 8$ — верное числовое равенство).

То есть решение уравнения — это число (если совсем строго).

Но в более широком смысле решить какую-либо задачу означает **написать равенство**, в котором, скажем так, слева — неизвестная, искомая величина, а справа какое-либо алгебраическое или числовое выражение, которое **уже можно посчитать** (конечно неизвестная может быть и справа)! Например, **решением** физической задачи на определение скорости **будет формула** (равенство) $V = V_0 + a{\bullet}t$, полученная простейшими преобразованиями из определения ускорения, **при условии**, что V_0, a и t нам известны (т. е. подставив значения этих величин в формулу скорости, мы сможем **посчитать** искомую скорость).

Строгость математической лексики отрабатывается годами, а для нас сейчас — при первом появлении уравнения — важно под его решением понимать **действие**, которым уравнение решается. В записи $x = 8 - 5$ (которую нужно — прежде всего! — твердо помнить и, в меру доступности для ребенка, — понимать) отражается как смысл действия вычитания (на котором построено решение уравнения $8 = 5 + x$), так и само решение «в общем виде» (в виде «формулы»).

В дальнейшем так и будем говорить: а ну-ка напиши решение простейшего уравнения, подразумевая «формулу» его решения (об этом — в п. «Немного об уравнениях»).

[3] «Числовое выражение — это запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий… Два числовых выражения, соединенные знаком «=» образуют числовое равенство. Если значения левой и правой частей равенства — одно и то же число, то равенство называется верным» [22, с. 4–5].

Внимание.

Не питайте никаких иллюзий, читатель, **относительно понимания** смысла действия вычитания!

Ребенок не поймет глубинного смысла вычитания ни в 5-м, ни в 6-м классах (за редким исключением), не говоря уж о 3-м или 2-м (в конце которого вводится понятие — нет, не уравнения; уравнение только называется: «$x + 6 = 15$ — это уравнение» [18, с. 196] — решения уравнения: «Решить уравнение значит найти неизвестное число» (там же)[4]. Единственное, что мы можем (и должны) сделать: «впечатать в память» решения простейших уравнений (решения — несколько тавтологически — как формулы решений) и «пунктирное» восприятие того, что вычитание — поиск неизвестного слагаемого. Трудно объяснить точный смысл фразы «глубинное понимание». Во всяком случае, легкость владения формальными преобразованиями зачастую скрывает факт непонимания смысла арифметических действий, что влечет за собой далеко идущие последствия.

Пожалуй, читатель, лучше всего опереться на ваше собственное первое прочтение «Немного о вычитании». Кое-что, наверняка, явилось для вас (для большинства из вас, как я полагаю исходя из практики) довольно неожиданным. Но вам хватило пары страничек для того, чтобы столь «знакомое» вычитание улеглось на сей раз ясным пониманием. Не забывайте однако: вы — взрослый человек, вы этих уравнений (и не только простейших) перерешали в свое время немерянно. Вы к ним **привыкли** давным-давно. И стоило чуть-чуть вскрыть первооснову…

Вспомните свое прочтение, и вы согласитесь: не стоит добиваться невозможного — глубинного понимания, до 6-го класса включительно. Только «впечатывание в память» и полуинтуитивное восприятие форм решения простейших уравнений.

Однако, продолжим задачу 1.

Может показаться, что об уравнениях стоило б рассказать в соответствующем месте. Но нам с вами придется все время сталкиваться с первым уравнением типа $8 = 5 + x$ и вы, читатель, уже сейчас должны быть готовы, по мере возможности, отвечать на вопросы ребенка, и — гораздо важнее! — понимать значимость того, что вы делаете, осваивая с ребенком ГРАЭЛ-(Разности).

Итак, вернемся к рис. 4.

Вы объяснили ребенку блок «Арифметики» (разумеется, не путем дословного пересказа всего вышеизложенного, а лишь в той мере, в которой он воспринимает. В конце концов все вышесказанное, на самом деле, больше предназначено для вас, для вашей минимальной вооруженности. А ребенку, в большинстве случаев, вначале окажется достаточным знать — просто «знать», помнить, — что (5) и (6) — это одно и то же, и что (6), как решение уравнения (5), получается по смыслу действия вычитания.

1. Обратите внимание ребенка на стрелочку в «Графике». Она соединяет неизвестное слагаемое T_2 («с иксом») и нижнюю границу известной суммы (Всего, В).

Стрелочка рисуется обязательно!

Она уже в «Графике» показывает, что ищется неизвестное слагаемое.

2. Ни в коем случае не позволяйте обходиться без блока «Алгебры»! Ведь наша основная цель: **сумму** с «Графики» считать **в сумму же** в «Алгебре».

3. «Арифметика» цикла I должна **расписываться полностью**, т. е. уравнение (5) — в виде суммы, его решение (6) — в виде разности (формулы решения), его окончательное

---

[4] А впервые уравнение $3 + x = 9$ появляется уже в первой половине 1-го класса [1, стр. 62].

(математическое) решение (7) — как число, которое при подстановке обращает уравнение (5) в верное числовое равенство (8 = 8). Обязательно проверяйте подстановкой в (5) — правильно ли посчитали, получается ли **верное числовое** равенство (т. е. является ли найденный *x* корнем уравнения).

4. Тем более ни в коем случае (объединяя п. 2 и п. 3) **не позволяйте** записывать решение **всей** задачи «школьным арифметическим способом»: 8 – 5 = 3! Сначала — только «Алгебра», **<u>только сумма</u>**.

Напомните ребенку, что речь идет не о том, чтобы «в уме посчитать» простейшую задачку 1-го класса, а чтобы научиться **не раздумывая и безошибочно** рисовать логическую детальку — графэлемент вычитания. Все время повторяйте, что самое важное в этом элементе — **видеть** в «Графике» и «Алгебре» **вычитание в виде сложения**.

Обосновывайте это тем, что:

- при сложении гораздо труднее ошибиться, чем при вычитании;
- в арифметике, как он уже знает, есть только сложение;
- и что он убедится **в «безошибочности сумм»** и **«в коварстве вычитания»** чуть погодя, как только задачи, после цикла III, начнут усложняться.

Вот, пожалуй, и все, что нам требуется для цикла I.

Как видите, тексты задач и данные дословно повторяют цикл I, главы II. Поэтому ни об именах слагаемых, ни о «размерностях» не стоит и говорить: все давно знакомо. А вот постоянно повторять вслух (в каждой задаче): «Видим, что *x* — неизвестное слагаемое?.. Значит (пауза 1–2 секунды в ожидании ответа ребенка)… Верно, действие вычитания (6)».

Цикл II. Меньше НА

1. На блюде лежит
8 яблок.
На тарелке
на 3 яблока меньше.
Сколько яблок лежит на тарелке? (•)

2. В одной коробке лежит
80 яблок.
В другой коробке
на 30 яблок меньше.
Сколько яблок в другой коробке? (•)

3. В магазин одна машина привезла 800 ящиков конфет, а другая на 500 ящиков меньше. Сколько ящиков конфет привезла вторая машина? (•)

4. У Саши было 25 рублей, а у Маши на 10 рублей меньше. Сколько денег было у Маши? (•)

5. Один автобус проехал 190 километров, а другой на 102 километра меньше чем первый. Какое расстояние проехал другой автобус? (•)

6. От реки до горы путешественник дошел за 8 часов. Чтобы дойти от горы до озера ему понадобилось на 5 часа меньше. Сколько времени он шел от горы до озера? (•)

7). В банку налили $3\frac{8}{25}$ кг меда. Масса пустой банки на $\frac{7}{25}\left(1\frac{4}{15}\right)$ кг меньше массы меда. Определите массу банки. (•)

Ответы: 1) 5 я.; 2) 50 я.; 3) 300 я.; 4) 15 р.; 5) 88 км; 6) 3 ч.; 7) $3\frac{1}{25}$ кг — 5-й класс ($2\frac{4}{75}$ кг — 6-й класс).

Задача 1

В цикле II, как следует из названия, рассматривается понятие «меньше на». Однако это **понятие реализуется** давно нам знакомым основным **отношением** «Больше НА» (рис. 5).

Графика

Б Т

$\boxed{8} > \boxed{x = ?}$

$\boxed{3}$

Рис. 5

Алгебра

Б > Т на 3
Б = Т + 3

Арифметика

$8 = x + 3$

$x = 8 - 3 \quad | \quad = 5$

Поясните ребенку, что если одно число **меньше** другого на сколько-то, то второе число **больше** первого **на столько же** (в этом проявляется **относительность** понятий «больше-меньше»).

Сказать: 8я БОЛЬШЕ 5я НА 3я означает **совершенно то же**, что сказать: 5я МЕНЬШЕ 8я НА 3я.

Поэтому — **и самое важное!** — скажите ему, что как только он встретит в задаче «меньше», то сразу же должен **переформулировать** для себя «меньше» в «больше», т. е. спросить себя: «**А чтó больше чего?**» — поскольку «что такое меньше мы не знаем»!

И… все.

Да-да, все, читатель. Стоит только научиться ребенку, встречая «меньше», говорить себе: «А что больше?» — и он навсегда избавлен от ошибок, **провоцируемых с первого класса** понятием «меньше на» (ведь слагаемые, связанные отношением «Больше НА», он превосходно видит)!

Несколько замечаний.

1. В каждой задаче цикла спрашивайте его: «Скажи — **вслух!** — **что больше?**»

2. Задача, как на рис. 5, рисуется полностью: «Графика», «Алгебра», «Арифметика». **Пояснение для ребенка**: цель та же, что и в ГРАЭЛ-(Разности) — быстро, четко, правильно, одним словом автоматически, рисовать «меньше» в виде ГРАЭЛ-(Больше НА), и писать не задумываясь решение простейшего уравнения («набить руку»).

3. Как и в цикле I, **ни в коем случае не позволяйте** ему сразу писать разность в арифметической форме ($x = 8 - 3$) — только сумма, только «Алгебра» сначала. Если он не доведет **до автоматизма перевод** «меньше» в «Больше НА», рисование сумм в «Алгебре» (соблазнившись простотой задачек), то **<u>весь ГрафАнализ пойдет прахом</u>**. Как только задачи начнут усложняться (а они, вы помните, **в принципе** построены на суммах), попытка **сразу** писать разности (**<u>по школьной привычке</u>**) неизбежно повлечет ошибки.

> Иными словами: стремление миновать «Алгебру» в виде сумм **и «считывать»** с «Графики» **сумму в разность** в «Арифметике» — это **<u>нарушение технологических требований ГрафАнализа</u>**.

Вы, читатель, разумеется, знаете, чем чревато нарушение технологии — **браком**. Но в данном случае бракованную деталь не выкинешь. Этим «браком» (крайне трудноустранимым) окажется ваш ребенок!

В любом случае проведите сопоставление задачи 1, цикла II, главы II (здесь она изображена на рис. 6) и задачи 1 данного цикла (рис. 7).

ГРАС-1

$$\begin{array}{ccc} T_1 & & T_2 \\ \boxed{5} & < & \boxed{?} \\ \boxed{3} & & \end{array} \qquad \begin{aligned} T_2 &= T_1 + 3 \\ T_2 &= 5 + 3 \end{aligned}$$

Рис. 6

ГРАС-2

$$\begin{array}{ccc} Т & & Б \\ \boxed{x = ?} & < & \boxed{8} \\ \boxed{3} & & \end{array} \qquad \begin{aligned} Б &= Т + 3 \\ 8 &= x + 3 \\ x &= 8 - 3 \end{aligned}$$

Рис. 7

Еще и еще раз — пусть он услышит: на рис. 6 — отношение «Больше НА» (на Тарелке-2 НА 3я БОЛЬШЕ, чем на Тарелке-1).

На рис. 7 — **то же самое <u>отношение</u> «Больше НА»**, хотя в задаче используется **<u>понятие</u>** «меньше на» (на Тарелке НА 3я МЕНЬШЕ, чем на Блюде).

Но стоит нам **<u>переформулировать</u>**: если на Тарелке **меньше**, чем на Блюде, то **значит** на Блюде **больше**, чем на Тарелке, — и **<u>мгновенно рисуем</u>** ГРАЭЛ-(Больше НА) — рис. 7.

Цикл III. На сколько БОЛЬШЕ/МЕНЬШЕ? (разностное сравнение)

1. На блюде лежит
8 яблок.
На тарелке
5 яблок.
На сколько яблок на блюде больше, чем на тарелке? $(^*)_{Б}$

2. В одной коробке лежит
80 яблок.
В другой коробке
30 яблок.
На сколько яблок в другой коробке меньше, чем в первой? $(\bullet)_{М}$

3. В магазин одна машина привезла 800 ящиков конфет, а другая 500 ящиков. На сколько ящиков конфет меньше привезла вторая машина? $(\bullet)_{М}$

4. У Саши было 25 рублей, а у Маши 15 рублей. На сколько больше у Саши денег, чем у Маши? $(^*)_{Б}$

5. Один автобус проехал 190 километров, а другой 102 километра. На сколько километров меньше проехал другой автобус? $(\bullet)_{М}$

6. От реки до горы путешественник дошел за 8 часов. Чтобы дойти от горы до озера ему понадобилось 3 часа. На сколько дольше он шел от реки до горы? $(^*)_{Б}$

Задачи с синонимичными выражениями.

7. Пять книг по математике стоят 150 рублей, а три килограмма бананов — 65 рублей. Что дороже и насколько? $(^*)_{Б}$

8. Котенку Леве 7 месяцев от роду, а коту Егору — 36 месяцев. Кто из них младше и на сколько? $(\bullet)_{М}$

9. Зимой, в южной части неба, мы можем видеть красивейшее созвездие Ориона. Две его главные звезды называются Бетельгейзе и Ригель. Астрономы выяснили, что расстояние от Солнца до Бетельгейзе 300 световых лет, а до Ригеля — 540 световых лет. Какая из звезд ближе к Земле и на сколько? $(\bullet)_{М}$

10. Если африканский лев встанет на задние лапы, то его рост будет 250 см. А вот рост котенка Левы — 58 см. Кто выше, и на сколько? $(^*)_{Б}$

11. Самая большая планета солнечной системы — Юпитер — движется по орбите со скоростью 13 км/с. Самая близкая к Солнцу планета — Меркурий — бежит по орбите со скоростью 49 км/с. Какая из планет быстрее летит по своей орбите и на сколько? $(\bullet)_{М}$

Примечание: можно было б еще добавить синонимы шире, толще и т. п. как синонимичные выражения для «Больше НА», но вряд ли стоит стремиться объять необъятное.

12. Миша поймал две рыбки. Масса одной $3\frac{7}{10}$ кг, а другой — $1\frac{9}{10}\left(1\frac{3}{8}\right)$ кг. На сколько масса второй рыбки меньше, чем первой? $(\bullet)_{М}$

Ответы: 1) 3 я.; 2) 50 я.; 3) 300 я.; 4) 10 р.; 5) 88 км; 6) 5 ч.; 7) на 85 р. (книги дороже); 8) на 29 м (котенок младше); 9) на 240 св. лет (Бетельгейзе ближе); 10) на 192 см (лев выше); 11) на 36 км/с (Меркурий быстрее); 12) $1\frac{8}{10}=1\frac{4}{5}$ кг — 5-й класс ($2\frac{13}{40}$ кг — 6-й класс).

Сценарий.

В цикле рассматривается так называемое разностное сравнение, т. е. решается задача: выяснить **на сколько** больше или меньше одно число, чем другое? Мы с вами убедимся, что ничего кроме отношения «Больше НА» нам не понадобится.

Задача 1

По условию известны два слагаемых: Б(людо) и Т(арелка). Нарисуем их (рис. 8).

Б	Т
$\boxed{8я}$	$\boxed{5я}$

Рис. 8

Видим, что на Б(люде) БОЛЬШЕ яблок, чем на Т(арелке) — 8 яблок **больше**, чем 5 яблок.

Из непосредственного сравнения двух чисел (**содержимого** слагаемых: Б = 8я и Т = 5я) **сам собой**, автоматически возникает **верный знак** «>» (больше) между самими слагаемыми:

Б > Т.

А поскольку мы уже привыкли, что не просто **Б** > **Т**, а «Больше НА», то есть:

Б > Т на $\boxed{\text{сколько-то}}$

и договорились обозначать неизвестное слагаемое буквой «x», то можем без труда нарисовать нашу задачу, используя все тот же ГРАЭЛ-(> на) (рис. 9).

Графика

Б		Т
$\boxed{8}$	>	$\boxed{5}$
		$\boxed{x = ?}$

Рис. 9

В «Алгебру» «считываем» неравенство из «Графики» знакомым образом:

Б > Т на x $\Leftrightarrow$ Б = Т + x.

И если теперь подставим значения **Б** и **Т**, то получим «Арифметику» совершенно тождественную той, которая возникала в предыдущих двух циклах:

$8 = 5 + x$ — уравнение,
$x = 8 - 5$ — решение уравнения.

Обратите внимание ребенка на то, что если бы вопрос задачи был: «На сколько яблок на тарелке **меньше**, чем на блюде?», то переформулировав его, т. е. сказав себе: «Раз на тарелке **меньше**, то на блюде — **больше**», — мы мгновенно получаем ту же самую Графику (рис. 9).

Итак, «на сколько больше» или «на сколько меньше» для нас реализуется одним и тем же отношением «Больше НА».

Внимание.

Хоть мы и договорились в цикле I через «x» обозначать содержимое неизвестного слагаемого, но на самом деле только здесь, в разностном сравнении, у нас впервые возникла **реальная необходимость** в «иксе»: т. к. у слагаемого «на сколько больше-меньше» **нет имени** — мы просто **вынуждены** дать слагаемому имя, являющееся одновременно и содержимым этого слагаемого.

Однако введение «икса» в цикле I преследовало цель не только иллюстративную. Поскольку появилось первое уравнение $8 = 5 + x$, следующее из $В = Т_1 + Т_2$ (рис. 4), то:

1. надо **подготовить** ребенка **<u>к ви́дению</u>** этого уравнения и его решения;

2. максимально уменьшить разрыв между содержательно прозрачной «Алгеброй» и стандартной школьной «Арифметикой» (**с <u>безликими</u> «иксами»**), так сказать — создать фоновое, алгебраически содержательное, наполнение «икса»;

3. мимоходом «впечатывать в память» решение уравнения.

Еще раз внимание.

С этого момента у нас появляется возможность изменить наш блок «Алгебры»: мы **действительно** можем начать записывать решение уравнения **в общем виде**, в виде формулы. Ведь $x = 8 - 5$ — это «псевдоформула», формула с уже подставленными значениями, это полностью блок «Арифметики», хотя и участвует буква «x». Посмотрите, читатель на рис. 10.

Алгебра		**Арифметика**	
$Б = Т + x$	(1)	$8 = 5 + x$	(1′)
$x = Б - Т$	(2)	$x = 8 - 5$	(2′)
Решение уравнения (1) **в общем виде**, по смыслу вычитания		**арифметическое** «**числовое**» решение по смыслу вычитания	

Рис. 10

В циклах I–II мы научились в «Арифметике» свободно записывать решение уравнения (1′) в числовой форме (2′). Небольшое «усилие восприятия» — и ребенок так же свободно будет писать решение уравнения (1) в общем виде (2). Во всяком случае, как показывает практика, начиная с 3-го класса дети легко переходят на запись (2).

Поэтому с задачами данного цикла мы работаем следующим образом:

1. Нарисовав «Графику» в виде ГРАЭЛ-(> на) (рис. 9), вы **пишете** первую строку:

Алгебра		**Арифметика**	
$Б = Т + x$	(1)	$8 = 5 + x$	(1′)

и **говорите** ребенку, что здесь для него все ясно.

2. Затем **спрашиваете**: «Умеем мы решать уравнение (1′)?.. Ну еще бы, после первых-то двух циклов!» И **пишете в «Арифметике»** вторую строчку — решение уравнения (**не забывая <u>вслух</u> проговаривать** — это должно идти «автоматом»: «Неизвестное слагаемое? — Значит, вычитание»):

Алгебра		**Арифметика**	
$Б = Т + x$	(1)	$8 = 5 + x$	(1′)
		$x = 8 - 5$	(2′)

3. Говорите: «Посмотри, мы умеем не задумываясь решать уравнение «в числах» (2′). Разве мы не можем то же самое сделать с «буквами»? Как бы ты записал решение уравнения (1) «в буквах»?.. «x» — что такое?.. Верно, неизвестное слагаемое. Значит...» **Почти наверняка** ребенок **сам** напишет в «Алгебре» во второй строке $x = Б - Т$. Ну а если (что крайне маловероятно) возникнут затруднения, то вы сами допишете решение так, как на рис. 10. **Обязательно** попросите ребенка сравнить «Алгебру» и «Арифметику» рис. 10. Сравнить — в смысле: все ли понятно? **видит ли** он действие вычитания «в буквах», т. е. (2)?

Задача 7

Лишние данные: пять книг, три килограмма.

Задачи 7–11

Цель использования задач с синонимичными выражениями та же, что и в главе II, цикл II.

О букве «*x*».

Реальная необходимость в «иксе» возникает у нас только в разностном сравнении (на сколько больше-меньше). Однако в главе «Вычитание» мы будем использовать букву «*x*» еще и для обозначения содержимого последнего — искомого — слагаемого.

В «Графике» всегда будет **видно** это слагаемое (оно же будет фиксироваться в вопросе задачи). А поскольку вводя действие вычитания мы пришли к первому уравнению, то мне кажется разумным для содержимого неизвестных слагаемых, включая промежуточные суммы, по-прежнему использовать знак «?», а для искомого слагаемого — букву x. Причем не только для того, чтобы подчеркнуть действие вычитания (например, цикл V, задача 2 — действие вычитания используется дважды), но и для того, чтобы видеть в «Графике»: что именно надо найти. Буква «*x*» в качестве содержимого искомого слагаемого будет **зримо указывать нашу цель** в процессе решения. «Выход» же на букву x в нужном слагаемом будет осуществляться автоматически. Вы, читатель, разумеется **уже привыкли** к тому, чтобы рисуя «Графику» поэлементно, в виде последовательности ГРАЭЛов, сразу же заполнять слагаемые ГРАЭЛов: известно — вписываем число, неизвестно — ставим знак «?».

Замечание.

Поскольку «Ветвь математики, занимающаяся уравнениями, называется алгеброй» [23, с. 83], то может возникнуть вопрос: почему на рис. 10 уравнение (1) я отношу к «Алгебре», а уравнение (1′) — к «Арифметике». Уравнение (1) М. Я. Выгодский относит к буквенным, а (1′) — к числовым и считает, что «четкое различие между решением числового и решением буквенного уравнения… важно и с научной и с педагогической точки зрения» [10, с. 157].

Я полностью разделяю этот взгляд, особенно с учетом того, насколько важно в дальнейшем в любой прикладной области умение решать уравнения в общем виде (т. е. буквенные).

Резюме циклов I–III.

1. ГрафАнализ не является чем-то искусственным и надуманным по той причине, что он отражает **реальную логику** арифметики, построенную на счете, сложении, на суммах и слагаемых. Вследствие этого «Графика» **сама рисуется** в виде сумм.

2. С точки зрения «Графики» и сложение, и вычитание реализуются **одним и тем же** ГРАЭЛ-(Суммы). Разница проявляется далее — в «Алгебре», да и то **лишь после того**, как мы первоначально «считали» **сумму**. ГРАЭЛ-(Разности) — ГРАЭЛ-(Δ) как отдельный графический элемент вводится лишь «для удобства счета». Он позволяет естественным и предельно наглядным, предметным образом (экспериментальным путем) ввести логический элемент арифметики — **действие вычитания как нахождение неизвестного слагаемого** и получить решение первого уравнения из определения действия вычитания.

3. <u>Один</u> ГРАЭЛ-(Больше НА) реализует **<u>четыре</u> логических элемента арифметики**: больше на, меньше на, на сколько больше?, на сколько меньше?, экспериментально подтверждая тем самым утверждение: «в арифметике мы **не знаем** что такое «меньше», только — «больше».

4. Буква *x* как обозначение неизвестной величины в уравнении **необходимым** образом возникает только в разностном сравнении для обозначения как имени, так и содержимого «безымянного» слагаемого «на сколько меньше-больше?».

5. Помнить, что считывать «Графику» сразу в разность — **нарушение технологических требований ГрафАнализа** (цикл II, задача 1, п. 3)!

Совет.

В сложении	**В вычитании**
$8 = 5 + x$	$x = 8 - 5$
$Б = Т + x$	$x = Б - Т$

Постоянно, «в фоновом режиме», должна выполняться задача **по отработке** («впечатывании в память») **математической лексики**.

Необходимо периодически **требовать** от ребенка **произнесения вслух** соответствующих математических терминов. То есть, после того, как написано решение уравнения типа $x = 8 - 5$ (в «числовом» виде) или $x = Б - Т$ (в общем виде) вы должны **мимоходом** спрашивать его (**и добиваться ответа!**): как называются элементы уравнения.

Встречая уравнения (сложение) или их решения (вычитание) нужно вслух **проговаривать**:

8 (или **Б**) — **сумма** или?.. — верно, **уменьшаемое**;

5 (или **Т**) — **известное слагаемое** или?.. — **вычитаемое**;

x — **неизвестное слагаемое** или?.. — **разность**.

И это — как технологический прием!

Примечание.

«… вычитание применяется при решении задач в трех случаях:

1). Когда по сумме двух слагаемых и одному из них находят другое слагаемое (по целому и его части — другую часть);

2). Когда данное число надо уменьшить на несколько единиц (несколькими единицами);

3). Когда надо узнать на сколько единиц одно число больше или меньше другого (разностное сравнение)» [11, с. 41].

Цикл IV. Известны: СУММА и 2–3 СЛАГАЕМЫХ
(задачи с 3–4 слагаемыми, в 2–3 действия).
Найти 3-е (4-е) слагаемое.

1. На тарелке, блюде и в кастрюле было
35 яблок.
На тарелке было
5 яблок.
На блюде
10 яблок.
Сколько яблок было в кастрюле? (••)□

2. В погребе в ящиках лежало
340 груш.
В первом ящике
35 груш.
Во втором ящике
55 груш.
Сколько груш было в третьем ящике? (••)□

3. Цирк отправил на вокзал клетки со львами, попугаями и дрессированными собачками. В 10 клетках были львы, в 25 клетках — попугаи, а в остальных — дрессированные собачки. Сколько клеток с дрессированными собачками отправили на вокзал, если всего нужно было перевезти 47 клеток с цирковыми животными? (••)□

4. Саша и Маша и Аня решили купить 4 килограмма бананов за 100 рублей. У Саши было 25 рублей. У Маши — 40 рублей, а Аня побежала домой за деньгами. Сколько денег Аня попросила у мамы? (••)□

5. Рыбаки в Атлантическом океане поймали и засолили в бочках рыбу. В 69 бочках они засолили кильку, ещё в 30 бочках была посолена треска, а в остальных бочках было мясо акулы. Сколько было бочек с акулятиной, если всего засолили 169 бочек рыбы? (••)□

6. От реки до озера путешественник дошёл за 18 часов. Сначала он добрался до горы за 5 часов. Потом за 11 часов вскарабкался на вершину. А затем кубарем скатился с горы к озеру. Сколько времени ему понадобилось, чтобы скатиться с вершины горы к озеру и не сломать при этом себе шею? (••)□

7. Во время эстафеты на восемь километров второй и четвёртый спортсмены пробежали каждый столько же, сколько и третий. Сколько пробежал первый спортсмен, если известно, что третий пробежал два километра? (=)(=)(•••)□

8. Рыбаки выполнили план по засолке рыбы. Килек они засолили $\frac{1}{5}$ ($\frac{5}{42}$) часть всех бочек, трески — $\frac{2}{5}$ ($\frac{7}{18}$). Какую часть плана (всех бочек) составила акулятина? (••)□

9. В колхозе $\frac{1}{13}$ ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{45}$) пашни занята под просо, $\frac{3}{13}$ ($\frac{1}{6}$, $\frac{7}{60}$) под лен, $\frac{5}{13}$ ($\frac{1}{5}$; $\frac{1}{20}$) под овощи и картофель, остальную часть пашни засеяли зерновыми. Какая часть пашни засеяна зерновыми?

(•••)□

Ответы: 1) К = 20 я., 2) $Я_3$ = 250 г., 3) С = 12 шт., 4) А = 35 руб., 5) А = 70 б., 6) О = 2 ч. (или S_3 = 2 ч.), 7) $С_1$ = 2 км, 8) А = $\frac{2}{5}$ — 5-й класс, ($\frac{32}{63}$ — 6-й класс); 9) З = $\frac{4}{13}$ — 5-й класс, ($\frac{3}{10}$ — $6_Б$-й класс, $\frac{71}{90}$ — $6_Я$-й класс)

Общие замечания.

Основные цели цикла:

1. Научиться с первого прочтения **видеть <u>промежуточную сумму</u>** в виде слагаемого (глава II, цикл V, задача 5, рис. 58). Довести это ви́дение **до автоматизма**.

2. А если перед нами ребенок 5–6-го классов (лучше 6-го!), то попробовать отработать с ним способ решения задачи **в общем виде** (буквенные уравнения) так, как это сделано в главе II, цикл VI, задача 6, п. «Алгебра».

Сценарий.

Задача 1

Главный момент анализа текста: сразу видим, что **известна сумма** (к ви́дению сумм мы привыкли в задачах на сложение).

Теперь — анализ слагаемых:

- их число;
- какие из них известны (содержимое слагаемых);
- отношения между ними (больше/равно).

Графический анализ задачи разбивается на цепочки схем, которые позже перейдут в своеобразный вариант свертывания умственной деятельности, то есть наш опыт работы с ГрафАнализом и само построение задач позволят видеть задачу в целом, автоматически выделять и сосредоточиваться на существенных логических элементах, связях, отношениях.

Графическая последовательность анализа задачи такова:

- Видим известную сумму (рис. 11а).
- Видим 3 слагаемых **Т**, **Б**, **К** (рис. 11б).

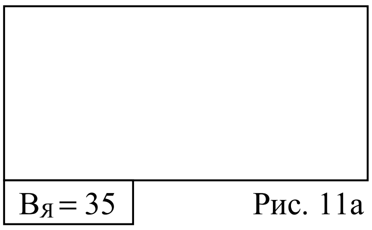


Рис. 11а

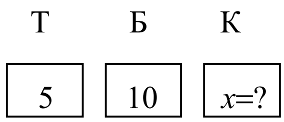


Рис. 11б

Так как **известна сумма** и **неизвестно слагаемое** то ясно, что задача сведется к действию вычитания. Можно было бы нарисовать и записать решение задачи так, как на рис. 12.

ГРАС-1

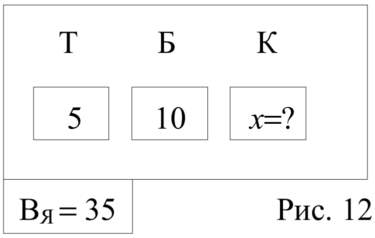


Рис. 12

Алгебра

В = Т + Б + К

Арифметика

$35 = 5 + 10 + x$
$35 = 15 + x$
$x = 35 - 15$

Однако гораздо разумнее использовать понятие промежуточной суммы, поскольку всегда стоит стремиться использовать простейшую форму — два слагаемых и отношение (или же арифметическое действие) между ними. Но гораздо важнее то, что промежуточная сумма интерпретируется как слагаемое, и именно это позволяет нам как угодно графически усложнять логический скелет задачи (если, конечно, есть в том необходимость), а значит и строить алгоритмические решения задач.

Поэтому «Графика» будет выглядеть так, как на рис. 13а.

Хотя у вас, читатель, уже порядочный опыт в рисовании графсхем, я все-таки напомню, как (на мой взгляд) наиболее удобно и быстро их рисовать (естественно, после первого прочтения всего текста):

- 1-й шаг: набрасываем квадратики 3-х слагаемых, даем им имена (**Т**, **Б**, **К** — подобно рис. 12), заполняем содержимое слагаемых (5, 10, x).
- 2-й шаг: помещаем слагаемые **в известную сумму** (обводим прямоугольником суммы и пишем ее значение $\mathbf{В_я}$ = 35).
- 3-й шаг: рисуем **промежуточную сумму** $\mathbf{В_1}$ = ?
- 4-й шаг: рисуем **стрелочку**, указывающую на то, что мы ищем **неизвестное слагаемое**, то есть имеем дело с действием вычитания (рис. 4 и цикл I, задача 1).
- 5-й шаг: расстановка действий.

Графика

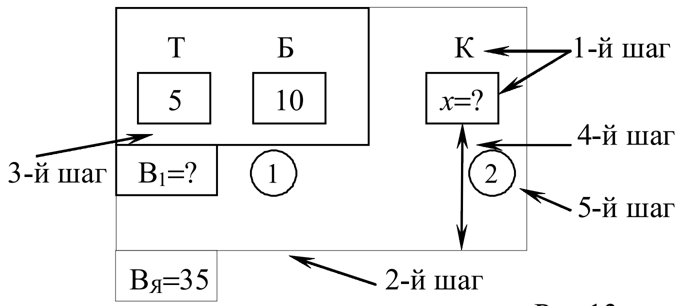


Рис 13а

ГРАС-1

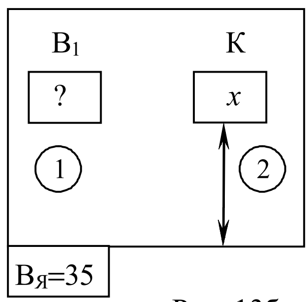


Рис. 13б

Обратите внимание ребенка на то, что в отличие от рис. 58 (глава II, цикл V, задача 5) я промежуточную сумму на рис. 13а не выделяю целиком прямоугольником (верхняя и левая боковая граница суммы $\mathbf{В_1}$ совпадает с соответствующими границами суммы **В**. То есть сумма $\mathbf{В_1}$ <u>не выглядит</u> как слагаемое (сравните с рис 13б). Но вы уже заметили, что рис. 13а гораздо удобнее, легче и быстрее рисуется и — главное! — не загромождает поле зрения лишними линиями. Сравните с вышеупомянутым рис. 58, главы II, **то есть** нарисуйте **сами** нашу задачу двумя способами и вы убедитесь, что подобная «мелочь» достойна быть описана столь подробно.

Предложите ребенку сделать «Графику» двумя способами. Если, что маловероятно, возникнут на первых порах какие-либо затруднения с ви́дением промежуточной суммы $\mathbf{В_1}$ как слагаемым — мгновенно сошлитесь на рис. 13б, где явным образом $\mathbf{В_1}$ — слагаемое.

Еще о рис. 13б.

Обратите внимание ребенка на то, что на рис. 13б мы свели нашу задачу к простейшему **ГРАЭЛ-(Δ) — ГРАЭЛ-(Разности)**, как в цикле I. Хоть и стоит внутри слагаемого $\mathbf{В_1}$ знак «?», но на самом деле неизвестным слагаемым является **К** (его содержимое — x).

Поясните ребенку, что рис. 13б — всего лишь явная иллюстрация того, что мы имеем дело с **ГРАЭЛ-(Δ)**. Ведь слагаемое $\mathbf{В_1}$ на рис. 13б **потенциально** нам известно — это промежуточная сумма с двумя **известными** слагаемыми **Т** и **Б** на рис. 13а. Поэтому наша задача и сводится к вычитанию: по известной сумме **В** и известному (потенциально) слагаемому $\mathbf{В_1}$ находится неизвестное слагаемое **К**.

Теперь о второй цели данного цикла.

Разумеется, расписать «Алгебру» и «Арифметику» нашим стандартным способом ничего не стоит.

И для ребенка 3-го класса конечно же стандартный способ предпочтительней (при этом мы решаем **числовое уравнение** $35 = 15 + x$, а наша «Алгебра» является способом перевода графического «текста» — решения задачи — на язык математики).

Алгебра	**Арифметика**
$B_1 = T + Б$ =	$5 + 10 = 15$
$B = B_1 + K$ ⇒	$35 = 15 + x$
	$x = 35 - 15$
	$x = 20$ (я)

Но если ребенок в 5-м или 6-м классе, то стоит, как я уже говорил, приучать его решать уравнение **в общем виде** (буквенное уравнение), то есть:

Алгебра

1). $B_1 = T + Б$

2). $B = B_1 + K$

$K = B - B_1$ — решение буквенного уравнения, записанное в виде формулы

Арифметика

1). $B_1 = 5 + 10 =$ 15

2). $K = 35 - 15 =$ 20

$K = 20$ (я)

Я сказал: «стоит приучать». Но, **как всегда**, **<u>будьте осторожны</u>**. Одна девочка из 6-го класса прошла у меня весь ГрафАнализ за восемь 2-х часовых занятий (40 + 40 минут). Кстати, Алиса смогла решить задачу о пиратах и без ГрафАнализа, но на это ей потребовалось 25 минут размышлений и рисунков. С другим же 6-и классником, я уже упоминал о нем, потребовалось начать со схемы 20 + 20 минут. Замечу, что решением в общем виде овладел эба ученика.

Еще и еще раз: нам крайне желательно научить ребенка умению решать в общем виде, **но только не за счет понимания**!

Наша с вами, читатель, сверхзадача состоит в том, чтобы на каждом занятии ребенок **ясно видел** каждый свой шаг (за исключением, может быть, глубокого понимания вычитания и деления, определяемого возрастом, общим развитием и волевой и психологической подготовкой ребенка).

Поэтому при возникновении затруднений с техническими умениями решать в общем виде, сразу проводите параллели с решением стандартным способом (вернитесь, если необходимо, к циклу III, задача 1, рис. 10).

Логические скелеты остальных задач повторяют задачу 1, кроме задачи 7, которая немного отличается по структуре (используется отношение равенства).

Как видите, задачи 8–9 (уровень 5–6-го классов) «с дробями» совершенно тождественны задачам 3-го класса «в натуральных числах». И сразу видно, что действительно (после овладения ГРАН) основной проблемой становится умение грамотно считать.

Единственное, что осталось **сказать ребенку** (при работе с задачами 2–3, дальше он и сам будет видеть): «Видим промежуточную сумму?.. А раз так, то **необходимо заранее** подумать о том, чтобы **оставить для нее место** при рисовании известной суммы **В** (2-й шаг). Если мы не озаботимся этим, то можем получить «Графику», подобную рис. 14.

Понятно, что такая «Графика» **не просто некрасива**, но — прежде всего! — **<u>с ней крайне неудобно работать</u>**. Нижние границы сумм наползают друг на друга, нам негде разместить **B_1**=? И расставить действия. Вывод? — Правильно, проверка, как минимум, затруднена, тем самым резко повышается вероятность незамеченной ошибки. **Надеюсь, ты не забыл, что «Графика» — это уже наше решение?**

Итак, относительно красивая, ясная, четкая «Графика», как видишь опять и опять, **отнюдь не прихоть, а необходимость**. Ясная четкая «Графика» напрямую связана с верным математическим решением».

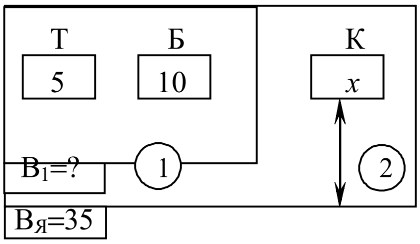


Рис. 14

Напоминайте ребенку **постоянно** о недопустимости стиля рис. 14 и обо всем вышесказанном!

Замечание.

Условия задач 3, 5, 7 отличаются от остальных тем, что вопрос задачи расположен в ее текстовом пространстве.

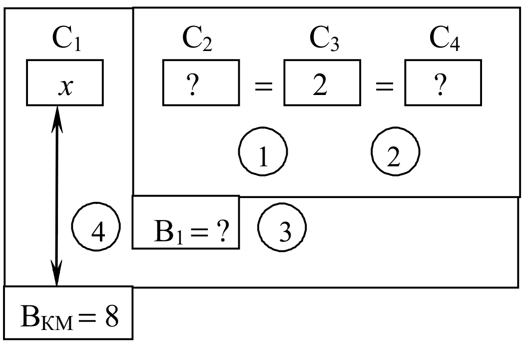
Задача 4

Как обычно, **обратите внимание ребенка** на лишние данные — 4 килограмма. Содержимым наших слагаемых являются рубли и нас совершенно не интересует сколько именно бананов было куплено.

Задача 7

Задача четвертым действием сводится к **ГРАЭЛ-(Δ)** (рис. 15). От остальных задач цикла она отличается тем, что используется **ГРАЭЛ-(=)** (глава II, цикл VI, задача 3 и рис. 74).

Графика



Алгебра

1). $C_2 = C_3$
2). $C_4 = C_3$
3). $B_1 = C_2 + C_3 + C_4$

4). $B = C_1 + B_1$
$C_1 = B - B_1$

Арифметика

1). $C_2 = 2$
2). $C_4 = 2$
3). $B_1 = 2 + 2 + 2 = \Big|\, 6$
$(8 = x + 6)$ — числовое
4). $C_1 = 8 - 6$
$C_1 = 2$ (км)

Рис. 15

Стоит **напомнить ребенку**, что 1-е и 2-е действия мы **пишем** и в «Алгебре» и в «Арифметике», осуществляя «действие приравнивания», аналогично тому, как мы поступали в задачах 3–6 цикла VI, главы II.

Напомните также, что ключевыми словами для **ГРАЭЛ-(Равенства)** являются «столько…сколько».

Решение в «Алгебре» я привожу в буквенной форме (в общем виде). В «Арифметике» в скобках указано числовое уравнение $8 = x + 6$ для стандартной формы записи решения.

Задача 8

Если вы, читатель, еще не прочитали п. «Немного о дробях» в конце этой главы, то сделайте это сейчас. А вместе с ребенком прочитайте ту часть, которая ему нужна.

Если же прочитали, то вам совершенно ясно, что (в случае необходимости) нужно **пояснить ребенку**: «В задаче 8 нам известна сумма — ВСЕГО. Раз речь идет о частях, то очевидно, что о частях **целого**, равного математически «1» (**единице), то есть <u>сумма известна</u>: В = 1**. В вопросе задачи это выражено явно: какую часть…(**всех** бочек)…»

Задача 9

В задаче 9 **видно**, что под целым подразумевается пашня (**вся** пашня). Значит, тоже **известна сумма**: **В = 1**.

Как и в задаче 7 — четыре слагаемых.

Обозначения: **П**, **Л**, $\mathbf{К_о}$, **З** — просо, лен, картофель и овощи, зерновые.

О счете «с дробями».

Задачи 8 и 9 — «с дробями» — по структуре ничем кроме числа слагаемых не отличаются. Но это отличие абсолютно непринципиально. А вот отличие в числовых данных существенное.

Числовые данные для 5-го класса представляют дроби уже приведенные к общему знаменателю и никаких проблем здесь не возникает. А вот в числовых данных для 6-го класса как раз приведение к общему знаменателю и представляет основную трудность. Я взял не такие уж и сложные знаменатели, но они требуют умения раскладывать числа на простые множители и хорошо владеть правилом нахождения наименьшего общего кратного. Уже на этих простеньких задачках мы опять убеждаемся, что отнюдь не умение решать текстовые задачи является камнем преткновения для 6-и классника (после овладения ГрафАнализом), а — не устану об этом напоминать — счет, счет и счет!

В подтверждение вышесказанного я приведу таблицу 1 своих затрат времени на «Графику», «Алгебру» и «Арифметику», взяв для этой цели задачи 5, 8, 9.Задача 9 позаимствована из учебника математики Барановой И. В. и Борчуговой З. Г. [24, с. 203] — один из лучших известных мне учебников.

Таблица 1

№ задачи	класс	«Графика» (с проверкой данных)	«Алгебра»	«Арифметика»
5	≥ 3-го	50 сек	10 сек	20 сек
8	$5_я$	50 сек	10 сек	20 сек
	$6_я$	50 сек	10 сек	**~ 3 мин**
9	$5_я$	50 сек	10 сек	30 сек
	$6_Б$	50 сек	10 сек	1 мин 40 сек
	$6_я$	70 сек	10 сек	~ 4 **мин**

Обозначения:

$5_я$ — 5-й класс, мои данные,

$6_я$ — 6-й класс, мои данные,

$6_Б$ — 6-й класс, данные Барановой И. В. и Борчуговой З. Г.

Я полагаю, читатель, что какие-либо комментарии излишни. Затраты времени на «Графику» — в пределах одной минуты, на «Алгебру» ~ 10 секунд. Но стоит лишь взглянуть на «Арифметику»!

Вообще-то я не планировал в этой книге показывать подробно работу с дробями. Однако по некотором размышлении мне захотелось, чтобы вы в полной мере прочувствовали разницу в объемах и сложности счетной работы с исходными данными (из учебника) и моими, отнюдь не самыми сложными.

Вся прелесть подобного сопоставления заключается в том, что **логическая структура задач — одна и та же, уровня 2-го класса**.

Графсхему, в силу тривиальности, я опускаю. Имена слагаемых задачи 9 даны в комментарии. $\mathbf{В_1}$, как всегда, промежуточная сумма. А вот счетную работу мы с вами распишем подробно.

Около 3,5 мин ушло на 1-е действие.

Видим, читатель (особенно это наглядно для учителей, преподающих математику — арифметику! — в 6-м классе): проблема не в задаче — в счете.

Однако в цикле VI вы познакомитесь с задачами, которые действительно заслуживают этого названия.

$6_Б$ — исходные числовые данные учебника

1). $В_1 = П + Л + К_О = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$

2). $З = В - В_1 = 1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

$6_Я$ — мои числовые данные

1). $В_1 = П + Л + К_О = \frac{2}{45}+\frac{7}{60}+\frac{1}{20}=\frac{8+21+9}{180}=\frac{38}{180}=\frac{19}{90}$

2). $З = В - В_1 = 1-\frac{19}{90}=\frac{90-19}{90}=\frac{71}{90}$

Нахождение НОК (наименьшего общего кратного знаменателей дробей) разложением на простые множители:

$45 = 9\cdot 5 = 3^2\cdot 5$

$60 = 6\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 3\cdot 5$

$20 = 4\cdot 5 = 2^2\cdot 5$

НОК $(45; 60; 20) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180$

Замечание.

Конечно, при хорошей счетной практике мы находим НОК данных чисел в уме. Но ведь я мог бы взять и другие знаменатели, не правда ли?!

Цикл V. Известны СУММА, одно СЛАГАЕМОЕ и насколько одно слагаемое БОЛЬШЕ (меньше) другого(задачи с 3 слагаемыми, в 3 действия). Найти 3-е слагаемое

1. На тарелке, блюде и в кастрюле было
35 яблок.
На тарелке было
5 яблок.
На блюде
на 10 яблок больше.
Сколько яблок было в кастрюле? [(*)(••)]

2. В погребе в ящиках лежало
340 груш.
В первом ящике
140 груш.
Во втором ящике
на 55 груш меньше.
Сколько груш было в третьем ящике? [(•)(••)]

3. Зоопарк отправил на вокзал клетки с животными. В 100 клетках были львы. Клеток с попугаями на 25 меньше, а в остальных — всякие тигры. Сколько было клеток со всяким тиграми, если всего отправили на вокзал 247 клеток? [(•)(••)]

4. Саша и Маша и Аня решили купить 4 ананаса за 200 рублей. У Саши было 25 рублей. У Маши на 87 рублей больше, а Аня побежала домой за деньгами. Сколько денег Аня попросила у мамы? [(*)(••)]

5. Рыбаки в Атлантическом океане поймали и засолили 169 бочек рыбы. В 69 бочках они засолили кильку, трески — на 39 бочек меньше, а в остальных бочках были каракатицы. Сколько бочек с каракатицами засолили рыбаки? [(•)(••)]

6. От деревни до пристани на лодке турист проплыл 15 километров, а на катере на 43 километра больше. Остальную часть пути он плелся пешком. Какое расстояние турист прошел пешком, если от деревни до города было 100 километров? [(*)(••)]

7. Рыбаки выполнили план по засолке рыбы (кильки, трески и соленых каракатиуц). Килек они засолили $\frac{1}{5}$ часть всех бочек, трески на $\frac{3}{5}$ больше. Какую часть плана составили соленые каракатицы? [(*)(••)]

8. Когда русский полярный исследователь Седов шел к Северному полюсу, то после $\frac{9}{19}\left(\frac{1}{2}\right)$ пути почти все его спутники погибли, С двумя оставшимися в живых матросами ему удалось пройти на $\frac{2}{19}\left(\frac{2}{9}\right)$ меньше, чем до того и он сам тоже погиб, а матросы повернули назад. Какую часть пути к Северному полюсу так и не удалось одолеть Седову? [(•)(••)]

Ответы: 1) К = 15 я., 2) $Я_3$ = 115 г., 3) Т = 72 кл., 4) А = 63 руб., 5) $К_А$ = 70 б., 6) П = 27 км, 7) $С_К$ = 0, 8) $S_3 = \frac{3}{19}$ — 5-й класс ($\frac{2}{9}$ — 6-й класс).

Сценарий.

Во всех задачах цикла используется **ГРАС-0** в качестве элемента «Графики» (глава II, цикл V, задача 1, рис. 47). Но если в задачах 1, 4, 6, 7 **ГРАЭЛ-(> на)** мы используем **в форме** «больше на», то в задачах 2, 3, 5, 8 — **в форме** «меньше на», порождающей уравнение и сводящееся к действию вычитания (цикл II). То есть нам приходится **дважды** искать неизвестное слагаемое. Однако **одно и то же по структуре** уравнение (задачи 2, 3, 5, 8) **порождается <u>двумя разными</u> ГРАЭЛами**: сначала — **ГРАЭЛ-(> на)**, цикл II, затем — **ГРАЭЛ-(Δ)**, цикл I.

Поскольку с промежуточной суммой как слагаемым мы освоились в цикле IV, то переходим сразу к рассмотрению задач 1 и 2.

Задача 1

Графика

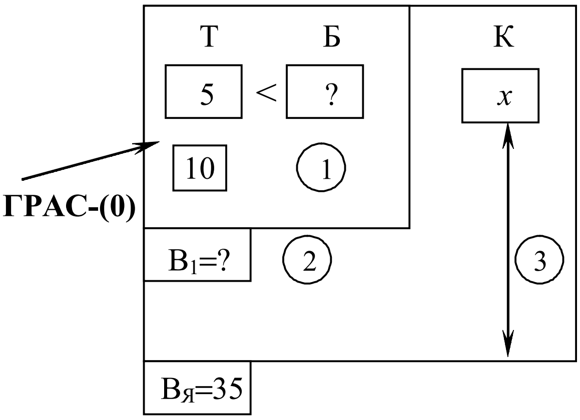


Рис 16

Алгебра

(Б > Т на 10)

1). Б = Т + 10 — из **ГРАЭЛ-(> на)**

2). $В_1$ = Т + Б

3). В = $В_1$ + К — из **ГРАЭЛ-(Δ)**

К = В – $В_1$

Арифметика

1). Б = 5 + 10 = | 15

2). $В_1$ = 5 + 15 = | 20

3). К = 35 – 20 = | 15 (я)

«Графика» (рис. 16) вопросов не вызывает. Единственное отличие от задач цикла IV состоит в том, что промежуточная сумма $\mathbf{В_1}$ представляет собой уже упомянутую **ГРАС-(0)** (глава II, рис. 47). Расстановка действий идет давно знакомым образом — от известного слагаемого.

Действие вычитания — решение буквенного уравнения В = $В_1$ + К — появляется один раз в 3-м действии задачи из **ГРАЭЛ-(Δ)** (цикл I).

Обратите внимание, читатель, на намеренную нечеткость в условии: «На блюде на 10 яблок больше». — Больше **чего**? (Аналогичная нечеткость «больше-меньше» и во всех остальных задачах, кроме задачи 8). Но контекст настолько прозрачен, что не вызывает сомнений: на блюде больше чем на тарелке, то есть связываются 1-е и 2-е слагаемые.

Задача 2

Графика

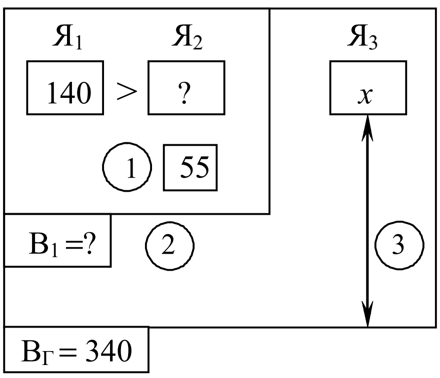


Рис. 17

Алгебра

($Я_1$ > $Я_2$ на 55)

1). $Я_1$ = $Я_2$ + 55 из **ГРАЭЛ-(> на)**

$\mathbf{Я_2 = Я_1 – 55}$

2). $В_1$ = $Я_1$ + $Я_2$

3). В= $В_1$ + $Я_3$ из **ГРАЭЛ-(Δ)**

$\mathbf{Я_3 = В – В_1}$

Арифметика

1). $Я_2$ = 140 – 55 = | 85

2). $В_1$ = 140 + 85 = | 225

3). $Я_3$ = 340 – 225 = | 115 (г)

Внешне «Графика» (рис. 17) полностью совпадает с «Графикой» задачи 1 (рис. 16). Но **обратите внимание ребенка** на существеннейшее отличие: так как **ГРАЭЛ-(> на)** используется **в форме «меньше на»** (во втором ящике на 55 груш **меньше**), то у нас появляется **неизвестное слагаемое $Я_2$**, что означает необходимость решить уравнение, и, соответственно, появляется действие вычитания (1-е действие задачи).

Пусть **ребенок сравнит** рис. 16 и рис. 17 (первые действия). И там, и там — **графически** — у нас неизвестное слагаемое (знак «?» стоит и в **Б** и в **$Я_2$**). Это именно **слагаемые <u>с точки зрения суммы $В_1$</u>**. Но если исходить из **ГРАЭЛ-(> на)**, то **Б** — неизвестная сумма, а **$Я_2$** — неизвестное слагаемое. Особенно отчетливо это видно, если мы первые действия задач 1 и 2 в буквенном виде, запишем в числовом виде:

Задача 1		**Задача 2**	
«В буквах»	**«В числах»**	**«В буквах»**	**«В числах»**
(1) $Б = Т + 10 \Rightarrow$	$Б = 5 + 10$	(2) $Я_1 = Я_2 + 55 \Rightarrow$	$140 = Я_2 + 55$

Б — неизвестная **<u>сумма</u>** **$Я_2$** — неизвестная **<u>слагаемое</u>**

Уравнения (1) и (2) «**в буквах**», считанные с «Графики», записаны в виде **сумм**, как это и должно быть. Но те же уравнения «**в числах**» (тоже, кстати, записанные в виде сумм) явно показывают разницу между неизвестными слагаемыми **Б** и **$Я_2$** (слагаемыми, скажем так, с точки зрения «внешней суммы» **$В_1$**): **Б** — это сумма, а **$Я_2$** — именно неизвестное слагаемое «в чистом виде»; и эта разница определяется уже принадлежностью **Б** и **$Я_2$** к другому ГРАЭЛу, нежели **ГРАЭЛ-(Суммы) — $В_1$**, к **ГРАЭЛ-(Больше НА)**.

В частности, еще и эта двуликость сумм и слагаемых, их одновременная принадлежность **к разным** ГРАЭЛам, порождает у детей, как мне кажется, трудности с четкой прикладной дифференциацией понятий «больше-меньше».

И последнее, на что я хотел бы обратить ваше внимание, читатель. Как показывает опыт, после циклов I–IV у большинства детей (во всяком случае, начиная с 5-го класса) уже нет проблем с записью решения в общем виде (3-е действие наших задач: $В = В_1 + К \Rightarrow К = В - В_1$ и $В = В_1 + Я_3 \Rightarrow Я_3 = В - В_1$). Это связано с тем, что в «Графике» **явным образом отражен** тот факт, что К и $Я_3$ — **именно неизвестные слагаемые** (содержимое — *х* + стрелочка + **видно**, что К и $Я_3$ — слагаемые «внутри» известной суммы **В**).

Но вот 1-е действие задачи 2: $Я_1 = Я_2 + 55$ — требует от ребенка уже некоторых усилий.

Вам необходимо помочь ребенку!

Когда написано 1-е действие (рис. 17), остановите ребенка и вместе проанализируйте, опираясь на «Графику»: что́ вам известно? **Буквально, «показывайте пальцем»** (ручкой): «Давай посмотрим на 1-е действие. Что такое **$Я_1$**?.. Верно, **сумма** двух **слагаемых $Я_2$** и **55**. Но самое важное (подчеркните это интонацией): **<u>какая это сумма</u>**? Известная или неизвестная? «Графика» дает нам ответ. Посмотри (показываете на **$Я_1$** в «Графике»)». Ребенок наверняка ответит, что $Я_1 = 140$ — известно. Мгновенно **спросите**: «А раз так, то в нашем 1-ом действии что́ мы имеем? **$Я_1$** — известная сумма, **55** — одно известное слагаемое. И какое же тогда будет другое слагаемое — **$Я_2$**? Известное или неизвестное?..» После ответа ребенка: неизвестное — резюмируете: «Итак, **$Я_1$** — известная сумма, **$Я_2$** — неизвестное слагаемое. Можем решить это уравнение? Ну конечно же — действие вычитания. Напиши решение уравнения».

Если все-таки ребенок не сможет написать решение в общем виде, то напишите сами: $Я_2 = Я_1 - 55$.

И разумеется, при затруднениях ребенка с записью решения в общем виде (а эти затруднения мы с вами заранее прогнозируем на первых порах), обязательно **попросите ребенка** записать решение задачи в стандартном виде, т. е. каждое действие «Алгебры» **сразу же** переводится в действие «Арифметики» (как это приведено ниже), с чем он, конечно же, легко справится.

Сравните с ним вместе стандартную форму записи решения задачи и решение в общем виде, как мы это делали в цикле IV.

Стандартный вид записи решения.

Алгебра	**Арифметика**		
1) $Я_1 = Я_2 + 55 \Rightarrow$	1) $140 = Я_2 + 55$		
	$Я_2 = 140 - 55 =$	85	
2) $В_1 = Я_1 + Я_2 \Rightarrow$	2) $В_1 = 140 + 85 =$	225	
3) $В = В_1 + Я_3 \Rightarrow$	3) $340 = 225 + x$		
	$x = 340 - 225 =$	115	$x = 115$ (г)

Проводите такое сравнение и в следующих задачах (если будет в том нужда).

<u>Не торопитесь!!!</u>

Пусть у вас на этот цикл уйдет два занятия по 40 минут, это не страшно. Страшно будет, если мы поспешим и не дадим ребенку времени **просто привыкнуть** видеть решение в общем виде, не дадим ему времени научиться сознательно и легко его реализовывать.

Еще раз напоминаю: умение записывать решение в общем виде трудно дается даже 6-и классникам, поэтому с 3-е классником нельзя переусердствовать. Только в том случае, если ребенок способен осилить такой способ решения (а вы это сразу увидите, хотя бы потому, что **вам самим** пришлось его освоить) — осторожно предлагайте ему переходить на такую запись. Но при значительных затруднениях, лучше использовать стандартную форму (от греха подальше).

Да, кстати, читатель. Надеюсь, вы не забыли, что ГрафАнализ — **всего лишь** наш черновик для школы?! Надеюсь, вы не забываете периодически просить ребенка сформулировать вопросы (считывая их с «Алгебры») и записывать нашу «Арифметику» в качестве школьных решений?

Давайте еще раз проведем запись решения для школы на задаче 2. Формы записи условий достаточно разнообразны, и вы сами должны выяснить, какие требования к этому предъявляет ваша школа.

Из 1-го действия «Алгебры» («Арифметики») (рис. 17) или «Арифметики» (стандартный вид) мы видим, что находим $\mathbf{Я_2}$. Следовательно, формулируем вопрос 1-го действия: «Сколько груш было во втором ящике?». Для решения берем арифметическую часть: 140 – 55 = 85.

Из 2-го действия («Алгебра» — в обеих формах) вопрос считываем «в лоб»: «Сколько было груш в первом и втором ящиках вместе?». Решение: 140 + 85 = 225.

Из 3-го действия «Алгебры» («Арифметики») (рис. 17) или «Арифметики» (стандартный вид) видим, что ищем $\mathbf{Я_3}$ (или x). Следовательно вопрос: «Сколько было груш в третьем ящике?».

Окончательно:

1) Сколько было груш во втором ящике?

    140 – 55 = 85

2) Сколько было груш в первом и втором ящиках вместе?

    140 + 85 = 225

3) Сколько было груш в третьем ящике?

    340 – 225 = 115

Ответ: В третьем ящике 115 груш.

Обратите внимание!

В стандартном виде записи решения из соображений единообразия стоило бы записать 3-е действие «Арифметики» так:

$340 = 225 + Я_3$,

$Я_3 = 340 - 225 = 115$.

Тогда словесная формулировка 3-го действия совершенно прозрачна.

И так действительно нужно поступать всегда!

Я ввожу здесь букву *x* — содержимое слагаемого $\mathbf{Я_3}$ — на тот случай, если в конечном итоге нужно будет использовать числовое уравнение: $340 = 225 + x$.

Однако более важным является в данном случае явным образом видимая **искусственность** работы с буквой *x*. Так как слагаемое имеет имя — $\mathbf{Я_3}$, то у нас нет никакой необходимости работать с его содержимым — *x*.

Давайте, читатель, еще раз условимся, что в главе «Вычитание» мы будем использовать букву «*x*» лишь для обозначение содержимого последнего искомого слагаемого, соответствующего вопросу задачи. Но для себя — с точки зрения ГрафАнализа — твердо будем помнить: необходимость в букве *x* возникает только в разностном сравнении (на сколько больше-меньше), где буква *x* является как содержимым, так и именем «безымянного» слагаемого (цикл III).

Задача 4

4 ананаса — лишние данные.

Задача 5

Обозначения: $\mathbf{К_И}$, **Т**, $\mathbf{К_А}$ (килька, треска, каракатицы).

Задача 7

Обозначения: $\mathbf{К_И}$, **Т**, $\mathbf{С_К}$ (килька, треска, соленые каракатицы). Поскольку мы получили ответ $С_К = 0$, то стоит воспользоваться возможностью пояснить **смысл полученного числа 0** (ноль): каракатицы вообще не были засолены. В этой книге подобный результат эпизодичен, но, пользуясь возможностью, хочется сказать еще раз: школьники настолько привыкают иметь дело «с голыми числами», что зачастую им и в голову не приходит, что в реальных задачах число — решение задачи — лишь тогда интересно для нас, когда мы в состоянии осмыслить, а что же стоит за этим числом.

Сумма **В** = 1.

Задача 8[5]

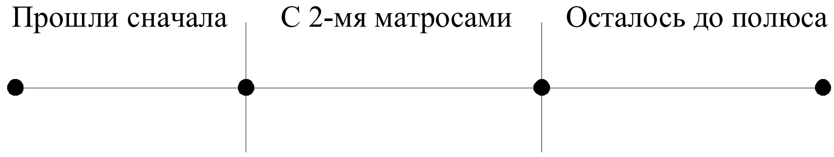


Рис. 18

[5] Сюжет задачи был навеян воспоминаниями о прекрасном фильме 60–70-х гг., посвященном экспедиции выдающегося полярного исследователя Г. Я. Седова в 1912–1914 гг. на парусно-паровом судне «Св. Фока» к Северному полюсу. В первый год плавания Седов был вынужден зазимовать на Новой Земле. В следующем сентябре он пробился до Земли Франца-Иосифа и судно с лишенными топлива котлами встало на вторую зимовку. Заболевший, как и многие матросы, цингой, Седов с двумя матросами 15 февраля 1914 года вышел в поход к полюсу… (числовые данные только очень приблизительно соответствуют действительным).

Обозначения возникают подобно задаче IV, цикла V, главы II (рис. 50–51).

На сколько частей бьется путь до полюса? Видим: на 3 части (рис. 18 — сравните его с рис. 50, главы II).

Раз путь (S), значит обозначения стандартные индексные: $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$, или предметные: П, $П_2$, Н (рис. 19 — сравните с рис. 51, главы II). Сумма **В** = 1.

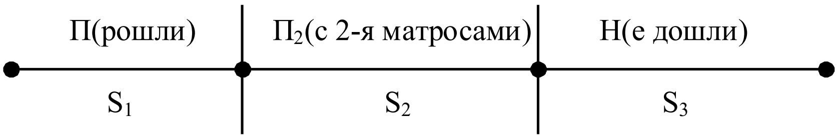


Рис. 19

В отличие от предыдущих задач, «Графика» потребует от вас ~ 2-х минут, а от ребенка еще больше. Условие сформулировано так, чтобы максимально затруднить восприятие. Поэтому **проверка условия — обязательна** (если вы позволяли себе раньше иногда пренебрегать ею).

Вы видите, читатель: хотя логическая структура задачи абсолютно тождественна другим задачам цикла и задачка всего в три действия, но без ГрафАнализа не так-то просто ее выявить. Недаром на «Графику» уходит в два раза больше времени.

Числовые данные выбраны простыми именно с той целью, чтобы основной трудностью явился первоначальный этап — «Графика».

Обратите на это внимание.

Замечание.

Готовясь к занятию и расписывая решения задач, вы, читатель, разумеется, заметили, что на «Графику» уходит около минуты и столько же на «Алгебру» с «Арифметикой». И вы спросите, почему ранее я говорил, чтобы вы не торопились и, если надо, затратили б и два раза по сорок минут. Заметьте, что основная цель цикла V та же, что и в цикле IV. Да, «Графику» с использованием промежуточных сумм мы действительно должны набрасывать максимум за минуту. Но вот дальше спешить не стоит — идет отработка решения в общем виде.

И далее.

И у вас, и у ребенка появляется вполне естественное искушение переводить **суммы** с «Графики» **сразу в разность** в «Алгебре», например так, как я сейчас распишу задачу 3:

1) $П = Л - 25$

2) $В_1 = Л + П$

3) $Т = В - В_1$

И если 3-е действие считывается в разность без труда, то 1-е действие вызовет задержку из-за необходимости проверки в уме. Даже вам, взрослому человеку, придется — уже написав: $П = Л - 25$, — вернуться к «Графике» и проверить: а действительно ли $Л = П + 25$? (**Проверьте на себе обязательно!**). И расписывая все восемь задач подряд, вы каждый раз будете ощущать дискомфорт, этакую раздражающую занозу излишнего напряжения внимания. А излишнее и ненужное напряжение внимания — это еще и повышенная усталость, следовательно — ошибки. Итак, не будем нарушать технологические требований ГРАН, как об этом сказано в цикле II.

Цикл VI. Известны: СУММА, одно СЛАГАЕМОЕ и насколько одно слагаемое (или сумма нескольких слагаемых) БОЛЬШЕ (меньше) другого (задачи с 3–4 слагаемыми, в 4–5 действий). Найти: на сколько одно слагаемое больше (меньше) другого?

1. На тарелке, блюде и в кастрюле было
35 яблок.
На тарелке было
5 яблок.
На блюде
на 10 яблок больше.
На сколько яблок в кастрюле меньше, чем на тарелке и блюде? $[(*)(\bullet\bullet)]\square(\bullet)_{\text{М}}$
(Где больше яблок и на сколько: в кастрюле или на тарелке и блюде вместе?)

2. В погребе в ящиках лежало
340 груш.
В первом ящике было
140 груш.
Во втором ящике
на 80 груш меньше.
На сколько груш было в третьем ящике меньше, чем в первом? $[(\bullet)(\bullet\bullet)]\square + (\bullet)_{\text{М}}$
(Где больше груш и на сколько: в третьем ящике или в первом и втором вместе?)

3. Зоопарк отправил на вокзал 147 клеток с животными. В 100 клетках были львы. Клеток с попугаями на 75 меньше, чем львиных, а в остальных были тигры. Насколько клеток с тиграми было меньше, чем со львами? На сколько клеток с тиграми было больше, чем клеток с попугаями? $[(\bullet)(\bullet\bullet)]\square + (\bullet)_{\text{М}} + (*)_{\text{Б}}$

4. Маша, Аня и Саша решили купить праздничный торт за 250 рублей. У Ани было на 140 рублей больше, чем у Саши. На сколько денег у Ани было больше, чем у Маши если у Саши было 25 рублей? На сколько меньше было денег у Саши, чем у Маши? $[(*)(\bullet\bullet)]\square + (*)_{\text{Б}} + (\bullet)_{\text{М}}$

5. Рыбаки в Индийском океане поймали 169 бочек рыбы. В 69 бочек они положили мурен. Кальмаров было на 30 бочек меньше, а в остальных бочках было мясо акулы. На сколько бочек с муренами и акулятиной было больше, чем с кальмарами? $[(\bullet)(\bullet\bullet)]\square + (\bullet\bullet)\ (*)_{\text{Б}}$

6. «Боинг-747» компании «Эйр-Франс» совершил кругосветный перелет за 45 часов. От Москвы до Пекина он летел 11 часов, а от Пекина до Буэнос-Айреса на 4 часа больше, чем от Москвы до Пекина. Потом он перелетел Атлантику (от Буэнос-Айреса до Парижа). На сколько меньше времени ему понадобилось на перелет над Атлантикой, чем на всю остальную часть пути, если известно, что от Парижа до Москвы он летел на 7 часов меньше, чем от Москвы до Пекина. $[(*)\ (\bullet)(\bullet\bullet\bullet)]\square + (\bullet)_{\text{М}}$

7. Чтобы взлететь с Земли и выйти на околоземную орбиту космонавты тратят на $\frac{5}{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ времени меньше от всего времени полета, чем на основной полет между Землей и Луной (от околоземной орбиты до окололунной). На сколько дольше длится полет от земной орбиты до поверхности Луны, нежели уходит на взлет с Земли, если на основной путь уходит $\frac{7}{10}$ всего времени полета. $[(\bullet)(\bullet\bullet)]\square + (\bullet\bullet) + (*)_{\text{Б}}$

Ответы: 1) $x = 5$ я; 2) $x = 0$ г; 3) $x_1 = 78$ к, ($x_2 = -3$ к); 4) $x_1 = 105$ р, $x_2 = 35$ р; 5) $x = 100$; 6) $x = 15$ ч; 7) $x = \frac{6}{10}$ — 5-й класс ($\frac{3}{5}$ — 6-й класс).

Общие замечания.

В этом цикле будут даны действительно сложные задачи. И эта сложность определяется отнюдь не нагромождением «логических кубиков». Действительно, мы пользуемся **всего лишь <u>2-мя арифметическими действиями</u>** — сложением и вычитанием. Все задачи (кроме задачи 6) состоят **всего лишь <u>из 3-х слагаемых</u>**. По 1–2 раза в исходных данных используется отношение «Больше НА» (кроме задачи 4 — 3 раза). Во всех задачах участвует хорошо нам знакомая промежуточная сумма.

Если взглянуть на «Графику» всех задач, то — внешне — она практически одна и та же.

Спрашивается, откуда бы взяться сложностям? Тем более, что после цикла V складывается впечатление, что арифметические задачи решаются едва ли не автоматически-бездумно: прочитал текст, набросал «Графику», считал ее в «Алгебру» и… ну разве что в счете не ошибиться, верно? И в самом деле, задача 1 как будто служит тому подтверждением.

Однако не поддавайтесь **иллюзии** простоты и бездумности, читатель. Для того, чтобы прочувствовать все, сказанное в сценарии, я **<u>настоятельно рекомендую</u>** вам, на сей раз, не смотреть разбор решений, **а самостоятельно** пытаться сделать каждую задачу. При этом **<u>обязательно</u> фиксировать время**, которое вы затратите на «Графику» и «Алгебру» соответственно.

Только в этом случае вы прочувствуете, насколько **<u>опасен</u>** данный цикл для преподавания! Только в этом случае вы **не навредите** ребенку. Если вы усомнитесь в себе (разумеется не в том — понятны ли вам решения, а в том, что сумеете грамотно провести занятие), то лучше всего прочитать вместе с ребенком решения (конечно же, **не лишая его удовольствия** попробовать самостоятельно справиться с задачами) и, разобрав весь цикл, воспроизвести его на другой день.

Если вы проводите это занятие сами, то я надеюсь, что у вас уже появился определенный опыт с мерой помощи ребенку. Во всяком случае, никогда не забывайте, что мы занимаемся **прежде всего технологией** — технологией решения текстовых задач. А технология — вещь жесткая и предельно отработанная для любого производства. Соблюдению технологии учат терпеливо и долго. И строго следят за ее выполнением.

Технологию не отдают на откуп сообразительности и таланта. Поэтому, **всячески помогайте** своему ребенку в нужный момент: наводящими вопросами, интонационными репликами, просто помощью «в лоб» — прямой подсказкой (кстати, используйте прямую подсказку **гораздо чаще**, чем вам обычно приходит в голову!), если видите, что какой-то момент в процессе решения оказывается для ребенка слишком сложным или вы видите, что борьба с проблемой займет слишком много времени.

Конечно же, Дьердь Пойа прав, когда говорит: «Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Такие эмоции, пережитые в восприимчивом возрасте, могут пробудить вкус к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере.

Таким образом, преподавателю математики предоставляются великолепные возможности. Если он заполнит отведенное ему учебное время натаскиванием учащихся в шаблонных упражнениях, он убьет их интерес, затормозит их умственное развитие и упустит свои возможности. Но если он будет пробуждать любознательность учащихся, предлагая им задачи, соразмерные с их знаниями, и своими наводящими вопросами будет помогать им решать эти задачи, то он сможет привить им вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого способности» [12, с. 3]. — Теоретически на это же ориентируется и современная школа.

Однако практически совершенно упускается из виду, как правило, что вызов, брошенный задачей**, еще должен быть понят** учеником! Понят — на уровне элементарной математической грамотности. И прежде чем «испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы», ум должен быть **технически вооружен**, чтобы поднять брошенную перчатку. Все это подразумевается, в процитированном выше отрывке первоклассного математика и педагога Д. Пойа. Подразумевается, судя по всему, и в общих идеологических установках нынешней школы. — Но только подразумевается. Если б дело обстояло иначе, разве возникла бы нужда в этой книге?!

Поэтому в вопросах ликвидации математической безграмотности (а это прежде всего — проблема технических умений!) давайте не будем добиваться от ребенка сообразительности типа: реши сам. Давайте будем учить его грамотной работе с инструментарием математики.

Если ребенок будет свободно владеть техникой вычислительной работы и алгебраических преобразований Алгебры-7, то, при наличии желания и склонностей, он сумеет и сам «научиться учиться», он сумеет и сам «творчески подходить к задаче».

Сценарий.

В Задачах 2–7 активно используются **вспомогательные графические схемы** (рис. 46, задача 13, цикл IV, глава II), то есть когда «Графика» задачи состоит из нескольких графсхем, обозначаемых как ГРАС-1 ГРАС-2 и т. д. Однако графсхема ГРАС-1 почти всегда будет обозначать — назовем ее так — основную графсхему задачи.

Во всех задачах приходится решать 2–3 уравнения, возникающих из **ГРАЭЛ-(Δ)** или **ГРАЭЛ-(> на)**.

Во всех задачах я рекомендую использовать запись решения в общем виде «наполовину» (то есть в «Алгебре» запись решения уравнений в общем виде, **но рядом сразу** счет в «Арифметике» так, как это расписано в сценарии). В противном случае от ребенка потребуются слишком большие и неоправданные усилия.

В задачах 1–2 вопросы будут даны в двух формах. Вторая форма вопроса, указанная в скобках, превращает вычислительную задачу в задачу с элементами исследования (см. задачу 1).

Для ориентировки будут указаны затраты времени. Но не забывайте — это мои затраты времени, автора, при моей скорости рисования графсхем, знании задач и отработанной многократно технике. Проверьте, как я уже говорил, на себе временны́е затраты при первом знакомстве с задачами и, соответственно, сделайте скидку на возраст, уровень техники, да и просто скорость рисования и письма вашего ребенка.

Задачи 1, 2, в общем-то, можно пробовать и с ребенком 3-го класса, но в основном они будут решаться с вашей помощью. Скорее всего, эти задачи для 3-е классника имеют лишь иллюстративную ценность и несут психологическую нагрузку типа: «Что ж, пожалуй, и я смог бы их одолеть». Да и для 5–6-го классов задачи 3–5 тоже непросты, хотя, еще раз обратите внимание, везде (кроме задачи 6) — всего лишь 3 слагаемых.

Что касается задач 6–7, то они **всякий раз** требуют от меня — автора! — усилий. Каждый раз мне приходится внимательно разбираться с текстом, чтобы не ошибиться (ведь не думаете же вы, читатель, что я помню эти тексты наизусть или каждый день их перечитываю, как любимое стихотворение). Но это просто результат текстовых изысков. После цикла V мои первые две ученицы, первые два «подопытных кролика» — дочь Аня и ее подружка Маша (6-й и 5-й классы соответственно) с такой легкостью «раскидывали» задачи в «Графике» и «Алгебре» (как, впрочем, и ваш собственный ребенок на данный момент), что мне захотелось «закрутить» текст задачи на полную катушку, выжать из простенькой логической конструкции все, что только можно.

Цикл **не рассчитан** на одно 40-минутное занятие!

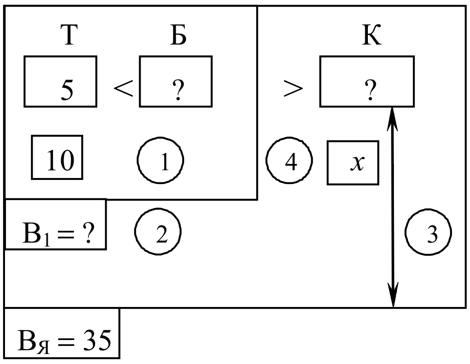
Переходим к работе.

Задача 1

«Графика», соответствующая первой форме вопроса, приведена на рис. 20.

На «Графику» ушло около 1,5 минут. На «Алгебру» и «Арифметику» примерно 2 минуты. Добавьте к этому время на прочтение текста.

Графика



Алгебра	**Арифметика**
1). Б = Т + 10 =	5 + 10 = 15
2). $В_1$ = Т + Б =	5 + 15 = 20
3). В = $В_1$ + К	
К = В – $В_1$ =	35 – 20 = 15
4). $В_1$ = К + x	
x = $В_1$ – К =	20 – 15 = 5
x = 5	

Рис. 20

Вторая форма вопроса задачи (дана в скобках) требует использования вспомогательных графсхем. Действительно, посмотрите на рис. 21

ГРАС-1

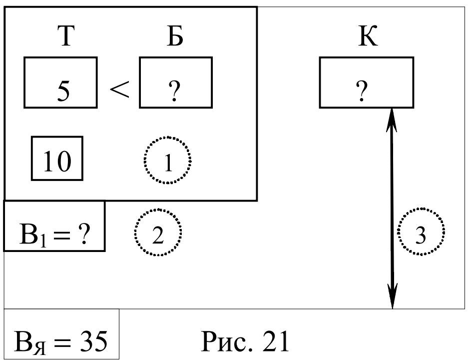
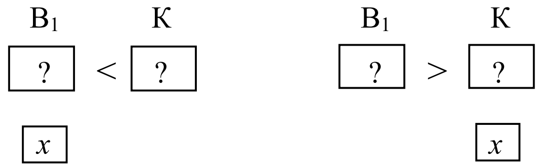


Рис. 21

ГРАС-2 **ГРАС-3**



(а) (б)

Рис. 22

Так как по вопросу задачи мы не знаем, какой знак поставить между слагаемыми **$В_1$** и **К**, то возможны ситуации, указанные на рис. 22.

Покажите ребенку рис. 22 и скажите ему, что иначе, как через вспомогательные графсхемы, мы и не можем нарисовать вопрос задачи: мы же не знаем чтó больше чего (рис. 23а).

Первые 3-и действия остаются те же самые, что и на рис. 20, а вот 4-е действие мы сможем точно нарисовать лишь после того, как узнаем содержимое слагаемых **$В_1$** и **К**. Толь-

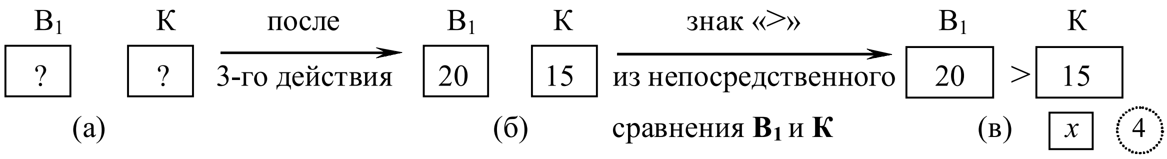


Рис. 23

ко после 3-го действия **из непосредственного сравнения** содержимого слагаемых $\mathbf{В_1}$ и **К** (рис. 23б) мы сможем поставить верный знак «больше» (рис. 23в) и записать верное уравнение: $В_1 = К + x$.

Замечание.

В зависимости от возраста ребенка, технической подготовки и его желания работать с ГРАН — можете выбрать первую или вторую форму вопроса.

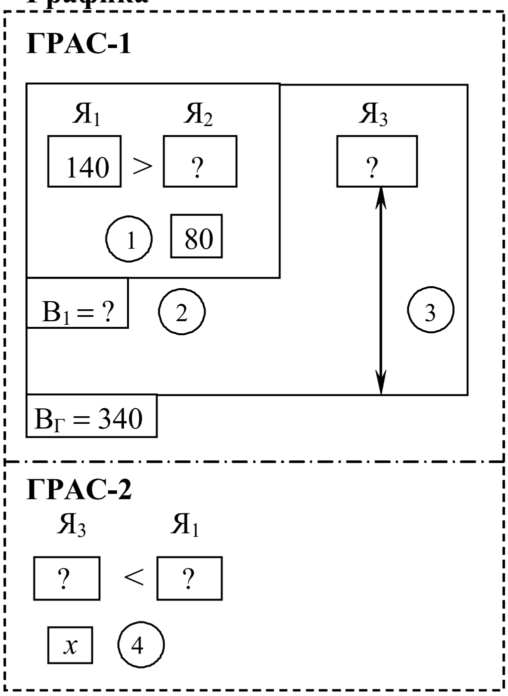
Задача 2

«Графика» задачи состоит из 2-х графсхем: основной — ГРАС-1 и вспомогательной — ГРАС-2 (рис. 24). Вспомогательная графсхема ГРАС-2 появляется в силу **невозможности удобно расположить** слагаемые в ГРАС-1.

Задача отличается от предыдущей тем, что:

- Приходится решать **три** уравнения (1, 2, 4-е действия).
- Вспомогательная графсхема ГРАС-2 появляется в силу **невозможности удобно** расположить слагаемые в ГРАС-1.

Графика



	Алгебра	**Арифметика**
1).	$Я_1 = Я_2 + 80 \leftarrow$	из **ГРАЭЛ-(> на)**
	$Я_2 = Я_1 - 80 =$	$140 - 80 = 60$
2).	$В_1 = Я_1 + Я_2 =$	$140 + 60 = 200$
3).	$В = В_1 + Я_3 \leftarrow$	из **ГРАЭЛ-(Δ)**
	$Я_3 = В - В_1 =$	$340 - 200 = 140$
4).	$Я_1 = Я_3 + x \leftarrow$	из **ГРАЭЛ-(> на)**
	$x = Я_1 - Я_3 =$	$140 - 140 = 0$
	$x = 0$	

Рис. 24

Обратите внимание.

Вопрос задачи формулируется «… на сколько меньше груш» в $\mathbf{Я_3}$, чем в $\mathbf{Я_1}$, а мы получили $x = 0$. **Следует перевести математический результат в содержательно словесную формулировку**: в обоих ящиках было **равное** количество груш. Иными словами, имеем равенство $Я_1 = Я_3$.

Второй вопрос задачи аналогичен второму вопросу задачи 1.

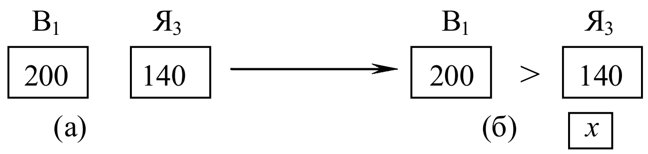


Рис. 25

После первых 3-х действий мы можем **непосредственно** сравнить содержимое слагаемых $\mathbf{В_1}$ и $\boldsymbol{Я_3}$ (рис. 25а) и поставить верный знак «больше» между слагаемыми (рис. 25б).

Временны́е затраты:

«Графика» ~ 2 мин., «Алгебра» и «Арифметика» ~ 2 мин.

Задача 3

В этой задаче самым важным является то, что второй вопрос задачи: «На сколько клеток с тиграми было больше, чем клеток с попугаями?» **намеренно сформулирован ошибочно**. Не забывайте, что мы все время работаем с натуральными числами, мы еще **«не знаем» отрицательных чисел**, которые изучаются ближе к концу 6-го класса. Поэтому для ребенка (если он еще не знаком с рациональными числами) запись $x_2 = 22 - 25$ — совершенно бессмысленна (5-е действие). Однако в подавляющем большинстве дети (любых возрастов, но особенно — до 7–8-го классов) настолько **доверяют** учителю и учебнику, что им и в голову не приходит: учитель — тоже человек, он может ошибаться; учебники делаются руками людей и в ответах, хоть и редко, бывают ошибки, пропущенные при корректуре.

А с другой стороны в этом возрасте (до 7–8-го класса) дети, даже зная, даже решая правильно, как правило, еще не уверены в своих силах, еще **не доверяют себе** настолько, чтобы противопоставить свое решение, свои знания учителю или учебнику. Поэтому они **с легкостью** решают, что на самом деле должно быть $x_2 = 25 - 22$, переставляя слагаемые местами, и пишут ответ $x_2 = +3$. Ответ переделанного уравнения, разумеется, верный. Но ведь это ответ совсем другого уравнения, нежели исходное $x_2 = 22 - 25$. Он получен произвольной перестановкой слагаемых, с нарушением жестких правил языка математики! Ведь после проверки 5-го действия мы убеждаемся, что ГРАС-3 — **верна**, «Алгебра» 5-го действия $Т = П + x_2$ —**верна** и решение уравнения «в буквах» $x_2 = Т - П$ — тоже **верно**. **Верно** посчитаны и слагаемые: П = 25 (1-е действие) и Т = 22 (3-е действие).

Какое же мы имеем право писать $x_2 = 25 - 22$?! Особенно отчетливо это видно в «Алгебре» 5-го действия:

$x_2 = Т - П$ —	5-е действие — **верно**
$x_2 = 25 - 22$ —	Произвольная перестановка слагаемых для того, чтобы избежать бессмыслицы вычитания из меньшего числа большего (при работе с натуральными числами) — **неверно**

Видим, что, переставив **числовые** слагаемые, мы в «Алгебре» получаем Т = 25 и П = 22, **что абсолютно противоречит** результатам 1-го и 3-го действий.

Переходим к работе.

Ребенок легко нарисует «Графику», состоящую из 3-х графсхем: ГРАС-1, 2, 3 (рис. 26) — разве что вы поможете ему со вспомогательными ГРАС-2, 3. «Алгебра» и «Арифметика» также пройдут без затруднений. Но вот в 5-м действии ребенок доходит до решения в числовом виде: $x_2 = 22 - 25$! Поскольку отрицательных чисел (по нашему предположению) он не знает, то либо остановится в недоумении с вопросом: «А разве так бывает?», либо — **что хуже** — попытается, как я уже сказал, произвольно переставить слагаемые.

Во втором случае остановите его и проверьте **с ним вместе** 5-е действие, начиная с ГРАС-3 так, как я изложил выше.

И в обоих случаях пусть ребенок услышит те несколько слов об ошибках, которые могут допускать люди.

А вот теперь — самое важное.

Скажите ребенку, что раз уж люди могут ошибаться, то, не исключено, что он все делал правильно, а вот автор задачи мог ошибиться. Но чтобы убедиться в этом, необходимо **внимательнейшим образом** (работают обе руки!!!) проверить все в своем решении. Сначала — перевод текста задачи в «Графику» (у меня он занял ~ 40 секунд). Потом — перевод «Графики» в «Алгебру» и счет в «Арифметике» (у меня ~ 1,5 минут).

И только убедившись, что все сделано верно (естественно, ни о какой произвольной перестановке слагаемых с целью подгонки ответа и речи быть не может), ребенок (с вашей помощью) смело должен сделать вывод: **в условии задачи** — в формулировке вопроса — **ошибка**.

Предложите ему переформулировать вопрос так, чтобы он был верен: «На сколько клеток с попугаями было больше, чем с тиграми?» (или, что то же самое: «На сколько клеток с тиграми было меньше, чем с попугаями?»).

Ну и, конечно же, в конце **скажите**, что в данном случае автор сознательно сформулировал вопрос неверно. Возможно, что и в дальнейших циклах будут приводиться ошибочные ответы (правда, с обязательным их указанием). Ведь по-настоящему можно говорить о том, что человек что-то знает и умеет можно лишь тогда, когда он (после тщательнейшей проверки, разумеется) твердо уверен в своих выводах, может их обосновать, опираясь на свои знания.

И это — важнейший признак глубины и прочности знаний!

Первоначальные временны́е затраты: «Графика» ~ 1 минуты, «Алгебра» и «Арифметика ~ 3 минут. Неизвестные x_1 и x_2 — как стандартные индексные, т. к. это неизвестные из разных уравнений («разные иксы»).

Графика

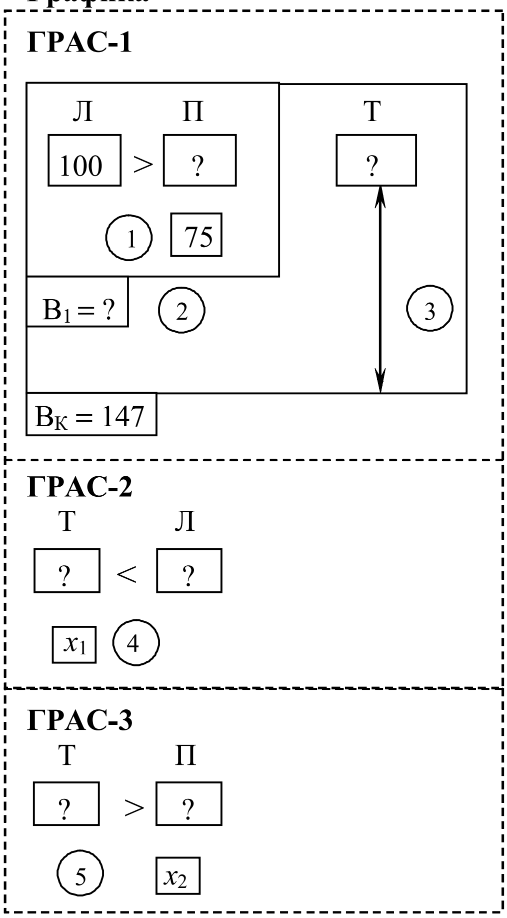


Рис 26

Алгебра		**Арифметика**
1). $Л = П + 75$	$\longleftarrow$	из **ГРАЭЛ-(> на)**
$П = Л - 75$	=	$100 - 75 = 25$
2). $В_1 = Л + П$	=	$100 + 25 = 125$
3). $В = В_1 + Т$	$\longleftarrow$	из **ГРАЭЛ-(Δ)**
$Т = В - В_1$	=	$147 - 125 = 22$
4). $Л = Т + x_1$	$\longleftarrow$	из **ГРАЭЛ-(> на)**
$x_1 = Л - Т$	=	$100 - 22 = 78$
5). $Т = П + x_2$	$\longleftarrow$	из **ГРАЭЛ-(> на)**
$x_2 = Т - П$	=	$22 - 25 = (-3)$

1). ГРАЭЛ-(> на) — в форме «меньше на»

4). ГРАЭЛ-(> на) — в форме разностного сравнения

5). ГРАЭЛ-(> на) — в форме разностного сравнения

Внимание.

Если ребенок уже знаком с отрицательными числами то арифметически формально правильное решение $x_2 = 22 - 25$, $x_2 = -3$ (минус три) его не затруднит. Но здесь-то и выступает на первый план такой важный момент, как понимание **смысла решения** задачи, смысла «просто чисел»! По самой сути число клеток может быть **только положительным** (или равным нулю). По самой сути, имея 22 клетки, мы не можем забрать (отнять) из них больше этого количества. По самой сути, тем самым, является бессмысленным ответ: клеток с тиграми **больше**, чем клеток с попугаями на « – 3» (минус три клетки)[6].

И если грубая ошибка произвольной перестановки слагаемых, возникающая из желания «подогнать под ответ», не несет в себе каких-либо сложностей, поскольку относительно легко может быть осознана ребенком и приведет его к правильному выводу об ошибочности вопроса задачи, то полученный арифметически бездумно ответ — больше на минус три клетки — гораздо хуже: в нем проявляется так характерная для нынешней школы тенденция — работать «просто с числами». А начинается это именно с начальной школы, с текстовых арифметических задач, потом закрепляется в 3–5-х классах, при работе с задачами на движение без использования формулы $S = V \bullet T$ и, наконец, приводит к тому, что большинство школьников, решая физические или математические задачи, удовлетворяются «просто числом» — любым числом! — в своем решении, совершенно не задумываясь о содержательной сущности этого числа, числа как характеристики какой-либо величины.

Задача 4

Прежде чем приступить к разбору задачи, еще и еще раз, читатель, настоятельно прошу вас: пытайтесь сделать «Графику» задач этого цикла **самостоятельно**. Только в этом случае вы сможете эффективно воспользоваться решением и комментариями к нему. Только в этом случае подсказки нужного уровня будут возникать у вас легко и свободно. Особенно, если вы дадите ребенку возможность «помучиться» (а почему бы и нет!) самому с «Графикой» (разумеется, слегка направляя его). Многие дети, конечно же, захотят решить сами — они ведь уже чувствуют свои возможности. Не лишайте их этого удовольствия. Однако обязательно потом рассмотрите решение, приведенное в книге, обращая внимание ребенка на выделенный текст.

Рассчитывая на вашу квалификацию, я резко уменьшаю число прямых рекомендаций, типа: **скажите** ребенку…

Текст задачи составлен так, что мы просто «физически» не можем сразу нарисовать нужную нам «Графику», хоть и владеем инструментарием вспомогательных графсхем. И если раньше (задача 11, цикл IV, глава II — рис. 42–43) нам пришлось перерисовывать «Графику» из-за неудобного расположения слагаемых, то сейчас формулировка задачи **заставляет** нас перерисовывать «Графику» для того, чтобы мы смогли более отчетливо проанализировать задачу.

[6] Но, как всегда, нет ничего абсолютно истинного в этом мире. Рассказывают, что выдающийся физик-теоретик Поль Дирак будучи еще студентом, решая на конкурсе задачу, получил ответ: минус 2 рыбы (кстати, именно эта история привела меня к такой формулировке задачи). Математически задача была решена верно, и Дирак стал студентом. В конце 20-х г.г. прошлого века Дирак получил уравнение из решения которого следовало, что должен существовать антиэлектрон — положительно заряженный позитрон, отличающийся знаком заряда от электрона. Возможно, что абсурдный с содержательной точки зрения, но верный формально математически, ответ — минус 2 рыбы — сыграл свою роль в открытии античастиц. Надо было обладать незаурядной смелостью мышления, чтобы «из чистой математики» получить блестяще подтвердившуюся физику реального мира. (Эту историю рассказал известный физик-теоретик Салам. Она приведена в сборнике «Физики продолжают шутить», издательство «Мир», М. 1968, статья В. Березинского «Как работает физик-теоретик»).

После первого прочтения (видим: известна сумма — 250 р., 3 слагаемых — одно известно, 3 отношения «Больше НА») мы без труда получаем «Графику», состоящую из 2 графсхем: ГРАС-1, 2, изображенную на рис. 27.

ГРАС-2 — второй вопрос задачи, — как вспомогательная графсхема, рисуется сразу (ребенок **уже привык видеть**).

Графика

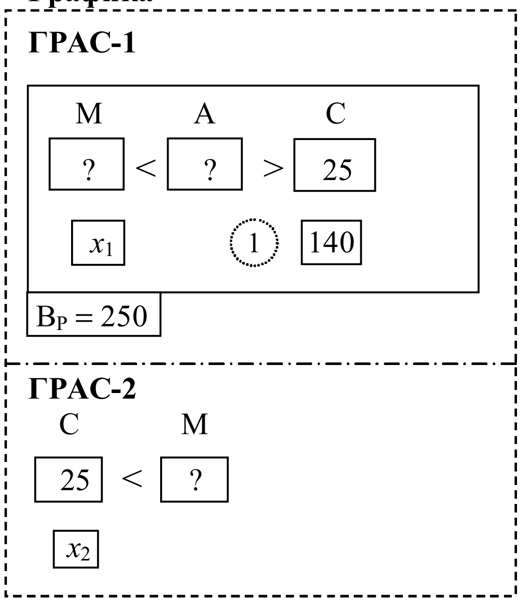


Рис. 27

А вот теперь начинается самое интересное: мы в очередной раз убедимся в том, что ГрафАнализ — отнюдь не механическое бездумное рисование. Да, до определенного уровня сложности (таковы практически все задачи до 6-го класса включительно) решения средствами ГРАН порождаются автоматически. Но это говорит всего лишь об уровне логической структуры школьных задач. Однако после «критического уровня» ГрафАнализ становится уже мощным средством анализа текстовых задач, в чем мы с вами и убедимся; **а ведь все те же 3 слагаемых и 3 ГРАЭЛ-(> на)**!

Из ГРАС-2 видим: чтобы найти x_2, нужно знать слагаемое **М**(аша).

Из ГРАС-1 видим: можем найти слагаемое **А**(ня) (цифра 1-го действия обведена пунктирной чертой, т. к. уже здесь — осознание возможности **хоть какого-то действия**).

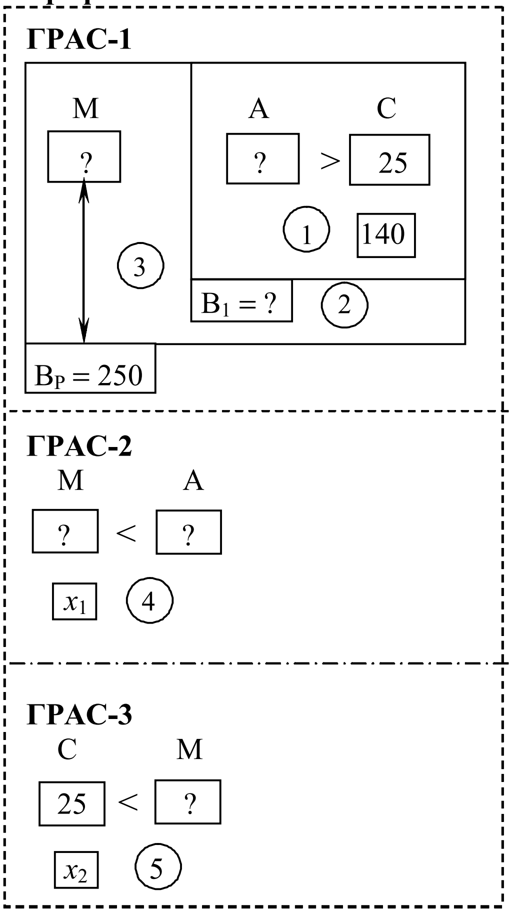
Поскольку мы привыкли работать в терминах сумм и слагаемых, то стоит только осознать, **М — неизвестное слагаемое**, а **В — известная сумма**, как мгновенно возникает вопрос: можем ли найти это неизвестное слагаемое **по известной сумме и известному слагаемому**?

Все! Наше внимание сконцентрировалось на главном: чтó мы должны понимать под известным слагаемым?.. А поскольку с ви́дением промежуточных сумм мы хорошо освоились в предыдущих двух циклах, то нам не составит особого труда нарисовать «Графику» как на рис. 28 и провести расстановку действий.

Обратите внимание.

В ГРАС-1 (рис. 28) нам **пришлось убрать** знак «>» из ГРАС-1 (рис. 27) между слагаемыми **М** и **А**, чтобы нарисовать знакомую «Графику» предыдущего цикла (цикл V, задача 1). Это нетривиальный момент — удалить какой-то элемент (тем более, что он возник из текста) психологически бывает не менее трудно, чем найти и добавить его. Эта «мелочь» может привести к тому, что ребенку трудно будет нарисовать ГРАС-1 (рис. 28).

Графика



	Алгебра	Арифметика
1).	$A = C + 140 =$	$25 + 140 = 165$
2).	$B_1 = A + C\ =$	$165 + 25 = 190$
3).	$B = M + B_1$	
	$M = B - B_1\ =$	$250 - 190 = 60$
4).	$A = M + x_1$	
	$x_1 = A - M\ =$	$165 - 60 = 105$
5).	$M = C + x_2$	
	$x_2 = M - C\ =$	$60 - 25 = 35$

Рис. 28

Чтобы облегчить ребенку понимание того, чтó есть известное (потенциально) слагаемое на рис. 27 при необходимости сначала нарисуйте ГРАЭЛ-(Δ), как на рис. 29.

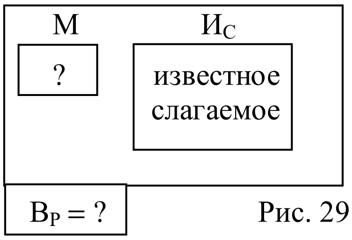


Рис. 29

Тогда он без труда увидит, что $\mathbf{И_С}$ — это сумма **А** и **С** (слагаемое **А** он может найти в 1-м действии) и соответственно спокойно перейдет от рис. 29 и ГРАС-1 (рис. 27) к ГРАС-1 (рис. 28), где $\mathbf{И_С}$ будет являться промежуточной суммой $\mathbf{B_1}$.

ГРАС-2 (рис. 28) — первый вопрос задачи — естественным образом возникает только после ГРАС-1 (рис. 28) Но вполне возможен и обратный подход. Если предложить ребенку нарисовать вопросы задачи в виде вспомогательных схем ГРАС-2, 3, то, возможно, ему будет проще нарисовать после этого и ГРАС-1.

Еще и еще раз — это мои затраты времени (таблица 2), думаю, близкие к вашим (**вы их фиксируете, читатель?**) Но ясно, что ребенок вряд ли осмысленно прочитает за полминуты текст задачи, хотя он и состоит всего из трех строчек. Сама стилистика текста заставляет ребенка возвращаться и перечитывать. И только когда он неторопливо перейдет к рисованию ГРАС-1 (рис. 27), только тогда текст задачи «уляжется» в его восприятии. То есть вы всегда должны учитывать, что на самом деле то, что я называю первым прочтением, осуществляется несколько раз в мало-мальски сложных случаях.

Таблица 2

Вид работы	**Время**
Прочтение	~ 0,5 мин
Рис. 27	~ 1,5 мин
Рис. 28:	
ГРАС-1	~ 2,5 мин
ГРАС-2, 3	~ 1 мин
Проверка рис. 28	~ 2 мин
«Алгебра» и «Арифметика»	~ 2 мин
Итого:	~9–10мин

Задача 5

Поскольку нужно немного передохнуть (а на самом деле — закончить занятие и начать следующее занятие задачей 5), то задача 5 — закрепляющий аналог задач 2, 3. Единственное отличие состоит в том, что вспомогательная графсхема ГРАС-2 в качестве слагаемого использует сумму $\mathbf{В_2}$, что слегка расширяет графический инструментарий ГРАН. Решение задачи дано на рис. 30 и особых пояснений не требует. Временны́е затраты на «Алгебру» и «Арифметику» те же, что и в задаче 4 ~ 2мин.

Графика

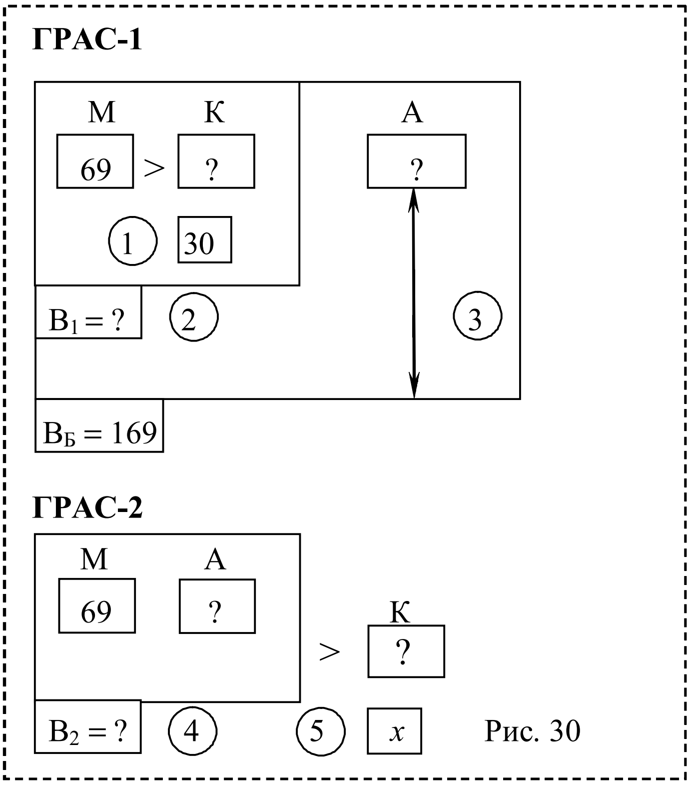


Рис. 30

Алгебра	**Арифметика**
1). $М = К + 30$	
$К = М - 30 =$	$69 - 30 = 39$
2). $В_1 = М + К =$	$69 + 39 = 108$
3). $В = В_1 + А$	
$А = В - В_1 =$	$169 - 108 = 61$
4). $В_2 = М + А =$	$69 + 61 = 130$
5). $В_2 = К + x$	
$x = В_2 - К =$	$130 - 39 = 91$

Задача 6

В этой задаче возникают три проблемы:

1. Проблема обозначений.

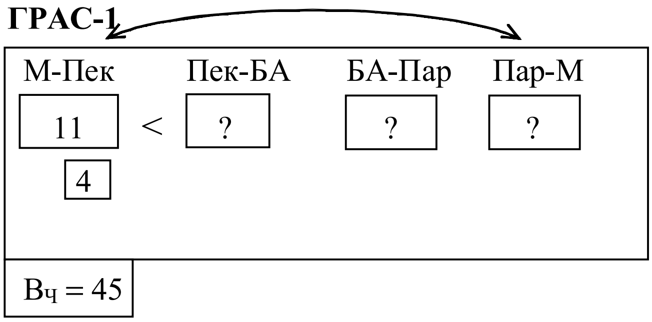
2. Проблема удобного расположения слагаемых.

3. Проблема введения вспомогательных графсхем, точнее — проблема осознания необходимости вспомогательных графсхем с целью избежать ошибок.

Займемся первыми двумя проблемами.

В соответствии с текстом мы получим рис. 31.

ГРАС-1



Обозначения:

М — Москва
Пек — Пекин
БА — Буэнос-Айрес
Пар — Париж

Рис. 31

Обратите внимание, что в силу запутанности текста (а это сразу выяснилось при первом прочтении) я оставляю ГРАС-1 максимально приближенной к нему: имена слагаемых — простые сокращения, удобные для сверки с текстом; последовательность слагаемых такая же, как в тексте. Но в ГРАС-1 я извлекаю все, что только можно: число слагаемых, известную сумму, одно из отношений «Больше НА», двойные имена слагаемых: Б(уэнос)-А(йрес)-Пар(иж), стрелкой указываю связь между парой слагаемых, использующих другое отношение «Больше НА».

Сразу становится ясно, что нужны новые — хорошие! — имена слагаемых и требуется иначе расположить слагаемые. Если мы будем **одновременно** решать обе проблемы, то это будет слишком затруднительно (и вообще, всегда следует придерживаться принципа: на каждом шаге, особенно при счете, выполняем **только одну операцию**; иначе, как правило, ошибка). Поэтому, как бы ни раздражали нас обозначения, как бы ни лень нам было их снова рисовать — осуществим только одну операцию перестановки слагаемых, трансформировав наш рис. 31 в рис. 32.

ГРАС-2

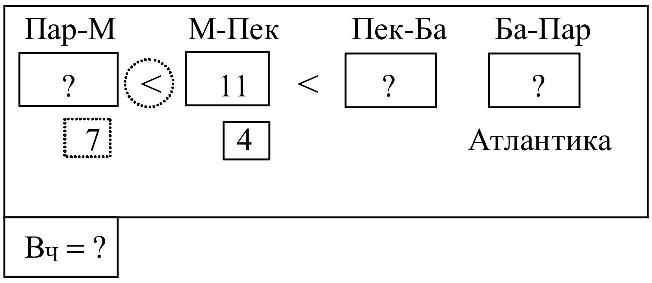


Рис. 32

А теперь вернемся к тексту **и внимательнейшим образом проверим** ГРАС-2. Именно для такой максимально легкой промежуточной проверки я и взял в качестве имен слагаемых сокращения, близкие к тексту. Надобность в такой проверке прогнозировалась еще при первом прочтении. Чтобы подчеркнуть, что отношение «Больше НА» между слагаемыми Пар-М и М-Пек, в соответствии с текстом появляется при проверке (втором прочтении) **в последнюю очередь**, я отметил это штриховым контуром.

Вот теперь мы можем вернуться к вопросу задачи и оценить то, что слагаемое БА-Пар еще имеет и встретившееся ранее имя — Атлантика (что отмечено на ГРАС-2).

В принципе, уже видно, чтó имеется в виду в вопросе задачи под «остальной частью пути». Но только в принципе — это ясно нам, взрослым. Однако далеко не для всех детей это будет очевидно. Если возникнет такая проблема (да даже если и не возникнет), то имеет смысл рассмотреть с ребенком рис. 33.

Вспомогательный рис. 33 (не графсхема) схематически отображает кругосветный перелет, а имена слагаемых позволяют ребенку сразу увидеть, что если вырезать **Атлантику**, то оставшиеся три слагаемых и будут «остальной частью пути» (что отражено на рис. 34 в виде промежуточной суммы $\mathbf{B_1}$).

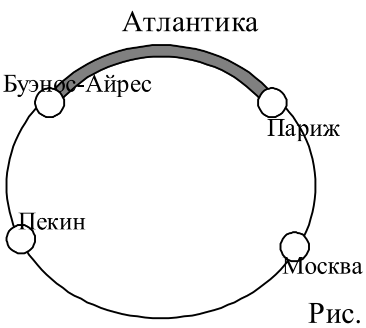


Рис. 33

Кстати, не исключено, что рис. 33 понадобится на самом первом этапе осмысления задачи, после первого прочтения.

Наконец, мы можем позаботиться о новых именах слагаемых. Из соображений размерности: чтó считаем? — Часы, время на каждом отрезке пути — вводим, аналогично задаче 4 цикла V главы II обозначения слагаемых: $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$, $\mathbf{T_4}$ (в соответствии с текстом, рис. 31). На сей раз, **ради единообразия обозначений**, и имена сумм: B = T и $B_1 = T_{412}$ (подразумевается, что $\mathbf{T_{412}}$ — это время на остальную часть пути. Мы не можем ввести $B_1 = T_1$, т. к. $\mathbf{T_1}$ — это уже использованное имя слагаемого).

Обратите внимание.

Говоря: вводим новые имена слагаемых — я имею в виду, что мы их просто дописываем на рис. 32 (там же дорисовывается сумма $\mathbf{B_1}$). Теперь наш рис. 32 выглядит как рис. 34.

ГРАС-3

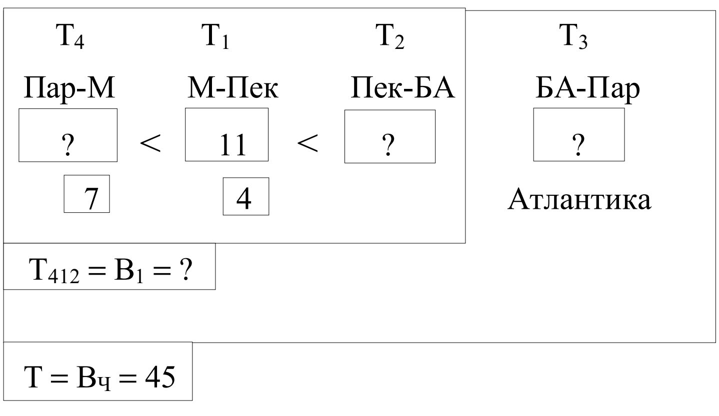


Рис. 34

ГРАС-4

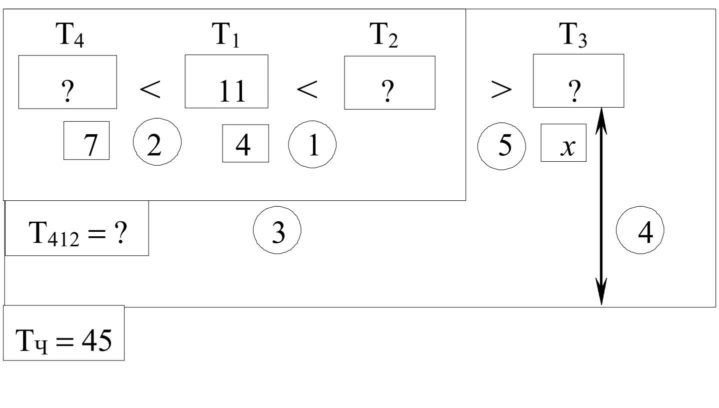


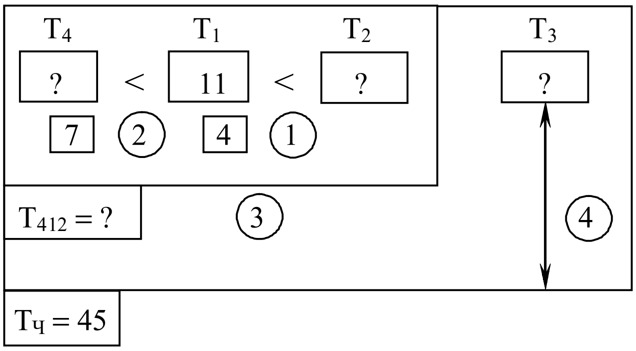
Рис. 35

Наконец, мы можем вместо рис. 34 нарисовать ГРАС-4 как действительно новый, после рис. 32, 34 — рис. 35. Дополним необходимыми элементами (3-е отношение «Больше НА»), уберем лишнее (первоначальные имена слагаемых), и расставим действия.

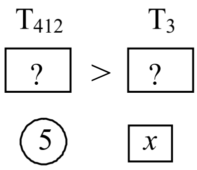
Сразу бросается в глаза, что обозначения 4-го и 5-го действий расположены крайне неудобно, в опасной близости друг от друга, их легко спутать. И к тому же промежуточная сумма T_{412} представляет собой слишком громоздкий рисунок. Такая ситуация вынуждает нас оформить 5-е действие в виде вспомогательной графсхемы, убрав «лишний» элемент x с ГРАС-4. И вот только теперь мы имеем полноценную «Графику» задачи (рис. 36).

Графика

ГРАС-5



ГРАС-6



Алгебра **Арифметика**

1). $T_2 = T_1 + 4 = 11 + 4 = 15$

2). $T_1 = T_4 + 7$

$T_4 = T_1 - 7 = 11 - 7 = 4$

2). $T_{412} = T_4 + T_1 + T_2 = 4 + 11 + 15 = 30$

3). $T = T_{412} + T_3$

$T_3 = T - T_{412} = 45 - 30 = 15$

5). $T_{412} = T_3 + x$

$x = T_{412} - T_3 = 30 - 15 = 15$

Рис. 36

Резюмируем.

В задаче 6 нам понадобилось **шесть** рисунков, развивающих анализ задачи (рис. 31, 32, 34, 35, 36 и один вспомогательный рисунок — рис. 33). Тем самым ребенок на собственном опыте **смог увидеть и оценить**, что означает предупреждение, данное в задаче 11, цикла IV, главы II в п. **Внимание** о том «… что более-менее сложная задача потребует — и, порою, не

Таблица 3

Вид работы	**Время**
Первое прочтение	~ 1 мин
Рис. 31 — по тексту	~ 2 мин
Рис. 32 из рис. 31	~ 1,5 мин
Проверка рис. 32 по тексту	~ 1 мин
Вспомогательный рис. 33	~ 2 мин
Новые имена слагаемых на рис. 34	~ 0,5 мин
Рис. 35 из рис. 34	~ 1,5 мин
«Графика» рис. 36 (ГРАС-5, 6)	~ 2 мин
«Алгебра» и «Арифметика»	~ 2 мин
Окончательная проверка:	~ 1,5 мин
Текст — Грас-3, 4, рис. 34–35	
Рис. 35 — «Графика», рис. 36	
Считывание «Алгебры» и «Арифметики» с рис. 36	~ 1,5 мин
Итого:	~ 16–17 мин

раз! — перерисовывать «Графику», добиваться **максимально отчетливого ви́дения** структуры задачи».

Я позволил себе роскошь воспроизвести всю реальную последовательность создания «Графики» задачи, но дело стоило того. Надеюсь, вы со мной согласны, читатель?

Итак, читатель, по таблице 3 вы видите, что цикл действительно не рассчитан на одно занятие (скорее, на три занятия, чем на два). И хотя в задаче 6 **всего** 4-е слагаемых и 3 отношения «Больше НА», задача может оказаться непосильной для 5–6-классников даже на уровне разбора. То же относится к задаче 7.

Я сразу предупредил вас об опасности этого цикла. Вы знаете своего ребенка, вы видите его возможности — будьте предельно осторожны!!!

Однако, если уж вы решитесь разобрать задачу с ребенком и убедитесь, что он **видит все**, то пусть он воспроизведет всю задачу, всю последовательность графсхем, чтобы **по-настоящему прочувствовать как сам ГрафАнализ, так и всю тяжесть настоящей работы**.

Лучше, повторюсь, если вы отложите воспроизведение решения на следующее занятие.

Не забудьте в конце попросить ребенка проверить правильность числового решения по очевидной формуле $T = T_4 + T_1 + T_2 + T_3 = 4 + 11 + 15 + 15 = 45$.

Задача 6

Как и в предыдущей задаче, текст хорошенечко запутан. После первого прочтения опыт подсказывает нам: не стоит напрасно мучиться, и прежде чем браться за «Графику», нарисуем-ка вспомогательный рисунок, потому что опять и проблема обозначений, и проблема перевода текста (рис. 37).

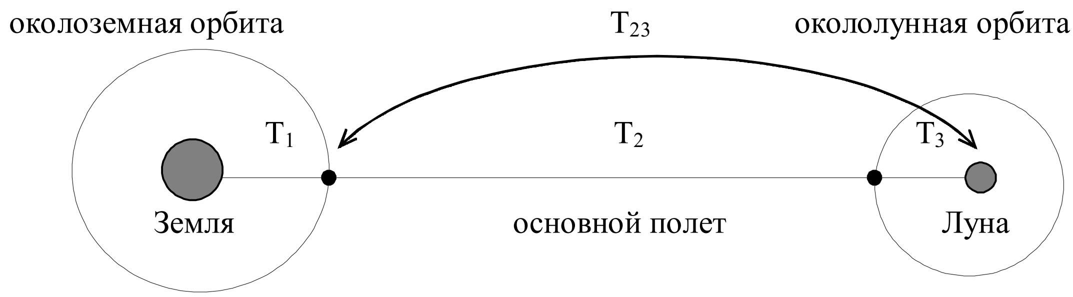


Рис. 37

Вот теперь совершенно отчетливо выделены три слагаемых (три отрезка пути) и остается дать им имена…

Однако, читатель, не будьте столь доверчивы. Автор лукавит. Правда, с совершенно определенной целью.

Я уверен, что многие из вас, к своему изумлению, услышат от детей нечто такое: «А что такое выйти на околоземную орбиту? А что такое основной полет?» — когда вы, традиционно, спросите после прочтения: «Ну, сколько слагаемых видим?» (Вы же не забываете **требовать**, чтобы ребенок читал текст задачи **вслух**?) И эти вопросы, естественно, не имеют отношения к математике. Они относятся к содержательной природе задачи, к лексике, лежащей вне математики и требующей пояснения. И если «основной полет» — термин, придуманный мною, то околоземная, окололунная орбиты — реальная лексика космонавтики.

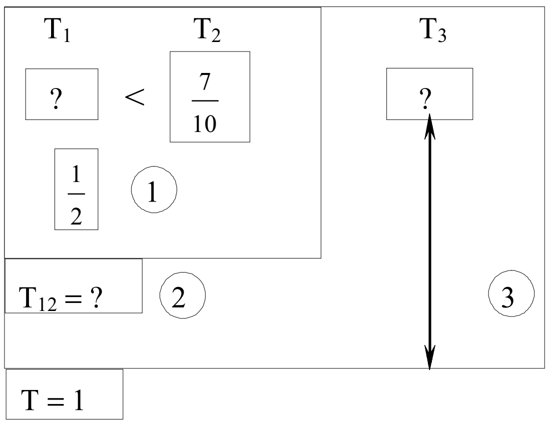
Кроме того, совсем не исключено, что ребенок запнется просто на прочтении длинных слов: околоземная, окололунная.

Во всяком случае, именно рис. 37 поможет решить **главную проблему этой задачи**: **<u>перевод</u> текста** в «Графику». С его помощью вы легко сможете помочь ребенку перевести в слагаемые фразы текста: «выйти на околоземную орбиту», «основной полет», «от земной орбиты до поверхности Луны». Как только три слагаемых, соответствующих трем участкам пути, будут осознаны, мгновенно вводим нужные имена: $\mathbf{T_1}$ — время на взлет с Земли до выхода на околоземную орбиту, $\mathbf{T_2}$ — время на полет между орбитами Земли и Луны, $\mathbf{T_3}$ — время схода с лунной орбиты до прилунения (выбраны обозначения **T**, а не **S**, т. к. речь идет о времени).

Далее — все просто (почти). «Графика» состоит из трех графсхем: ГРАС-1, 2, 3 (рис.38)

Графика **Алгебра** **Арифметика**

ГРАС-1



1). $T_2 = T_1 + \frac{1}{2}$

$T_1 = T_2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10}$

2). $T_{12} = T_1 + T_2 = \frac{2}{10} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10}$

3). $T = T_{12} + T_3$

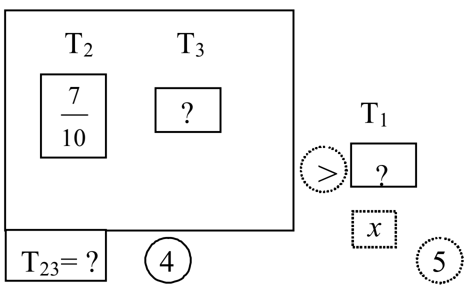
$T_3 = T - T_{12} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

4). $T_{23} = T_2 + T_3 = \frac{7}{10} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$

5). $T_{23} = T_1 + x$

$x = T_{23} - T_1 = \frac{8}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ГРАС-2



ГРАС-3

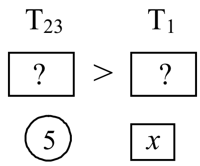


Рис. 38

При желании можно было бы объединить ГРАС-2 и ГРАС-3 (эта возможность отмечена пунктиром на ГРАС-2).

Стрелкой на рис. 37 указана часть текста, реализованная в ГРАС-3: «На сколько дольше длится полет от земной орбиты до поверхности Луны…».

Расстановка действий не вызовет затруднений в том случае, если вы с ребенком ранее постоянно осуществляли проверку второго уровня по принципу: можем посчитать? Если в «Алгебре» вы это делали, то у ребенка должно выработаться ви́дение «Алгебры» уже в «Графике».

Замечание о счете.

Приведена «Арифметика» 6-го класса. Вы видите, что в 1-м и 4-м действиях я не провел сокращение. Это вызвано достаточно зримым фактом, что все дроби будут со знаменателем «10» (если, конечно, мы прилично умеем считать). Если бы я сократил, то во 2-м и 5-м действиях мне опять пришлось бы приводить дроби к общему знаменателю — совершенно **лишняя** работа. Однако, не все учителя, мои коллеги, примут такой подход без возражений.

Таблица 4	
Вид работы	**Время**
Первое прочтение	~ 0,5 мин
Рис. 37 — по тексту	~ 0,5 мин
«Графика» рис. 38 (ГРАС-1, 2, 3)	~ 3 мин
Расстановка действий	~ 1 мин
Проверка «Графики»	~ 2 мин
«Алгебра»	~ 1,5 мин
«Арифметика»	~ 2 мин
Итого:	~ 10–11 мин

Таблица 4 опять демонстрирует арифметическую задачу, в которой главным является анализ текста средствами ГрафАнализа. Ну а если бы мы усилили арифметическую часть?..

Вряд ли нужно это делать сейчас. После задач 6, 7 ребенок устал.

Что ж, читатель, поздравьте его и себя с овладением 90%-ми ГрафАнализа и хорошенько отдохните.

Немного о дробях

К сожалению, как я уже говорил, содержательной стороны понятия «Дробь» я в этой книге смогу коснуться лишь мимоходом, лишь в той мере, которая минимально необходима для решения задач. Причем вычисления — блок «Арифметики» я, как правило, проводить не буду. Цель данного раздела, читатель, в том, чтобы вы увидели и убедились на практике: как только снята, благодаря ГрафАнализу, проблема анализа логической структуры задач — мгновенно высветится в полной мере проблема счета в узком и широком смысле.

Многие из вас увидят, что ребенок **свободно** строит решение до блока «Арифметики», а вот посчитать (привести к общему знаменателю прежде всего, просто сложить, вычесть, умножить, разделить правильно не может).

Но ГрафАнализ, по крайней мере, даст вам и вашему ребенку возможность играючи доводить до «Алгебры» почти любую школьную задачу и, тем самым, вы сможете сосредоточиться на проблеме счета.

Вы просто вынуждены будете овладевать дробями (хотя бы на уровне формального выполнения арифметических действий с дробными числами). Согласитесь, крайне обидно играючи, повторюсь, «раскидать» задачу до «Алгебры» — включительно и «лететь» в «Арифметике», получать два балла из-за неправильного счета.

Кстати, именно здесь, «в дробях», для ребенка (5–6-е классы) со всей очевидностью проявится то, о чем я говорил в самом начале главы II о трех уровнях проверки: **грош цена любому ГрафАнализу, если мы неправильно посчитали!**[7]

Но в данном случае во весь свой гигантский рост встает уже не проблема проверки (кое чему мы научились, верно?), а проблема непонимания смысла дроби, разложения на простые множители, кратного и наименьшего общего кратного, приведения дробей к наименьшему общему знаменателю (все вышеназванное является содержательным окружением второго знаниевого ядра математики «Дробь». Это основа основ для сознательного выполнения арифметических действий с дробями. Однако единственное, чем я могу помочь вам в этой книге, так это советом — сосредоточьтесь на данных понятиях.

Теперь к сути.

Дробь или дробное число возникает совершенно естественным образом из необходимости разделить (распределить) нечто **целое** (математически — **единицу**) **на равные части**: 1 пирог — поровну между 5 гостями, 1 бидон молока — поровну на 3 покупателей и т. п.

Равные части целого (единицы) называются **долями**, а **дробью** соответственно является **одна или несколько долей** целого.

Кроме деления целого на равные части, дробь возникает еще из необходимости измерения. Например, за основные единицы измерения длины и массы приняты 1 метр и 1 килограмм. Если нам нужно измерить длину стола или купить кусок мяса, то ясно, что мало найдется столов длиной ровно в один метр. Стол, как правило, будет либо длиннее, либо короче. Точно также и кусок мяса, покупаемый на рынке, вряд ли будет весить ровно один

---

[7] Замечу, что речь идет не только о ГрафАнализе. Сейчас в практику школьного преподавания вводится сдача тестовых заданий по математике. Объем теста достаточно велик (скажем, в 10-м классе ~ 20–25 заданий по алгебре, и на каждое задание отводится несколько минут). То есть для того, чтобы справиться с тестом, нужно, помимо **стандартных алгоритмов** решения уравнений, систем и т. п., владеть очень хорошей — **быстрой и безошибочной** — техникой алгебраических преобразований (Алгебра-7 прежде всего!) **и отточенной вычислительной техникой**. В тестах приводится несколько вариантов числовых ответов и оценка идет по числовому результату. В идеале так и должно быть — ведь в конечном итоге нам нужно решение любой реальной задачи довести «до числа». Но с учетом того, что вычислительная техника большинства учащихся крайне слаба, система тестовых заданий может стать для этих детей непреодолимым барьером.

килограмм. Чтобы уметь измерять более точно, мы вводим более мелкие (дольные) единицы: 1 метр разделяем на 100 равных частей (долей) и каждую такую долю называем 1 сантиметр; 1 килограмм делим на 1000 равных частей (долей) и одну такую долю называем 1 грамм.

Хотя речь идет об измерении, но сами более мелкие единицы (1 см, 1 г) получаются опять-таки в результате деления **целого** (1 м, 1 кг) **на равные части** (доли).

Для нас, однако, самым существенным должно являться то, что счет дробных чисел — это **тот же самый счет натуральных чисел**[8], только с другой, более мелкой единицей измерения, **с другой «размерностью»** (вот где, в частности, понятие «размерности» оказывается с точки зрения методики бесценным!).

Приведу в связи с этим довольно большую выдержку из книги известного венгерского математика Розы Петер: «… и ребенок может быть поставлен перед делением, которое не может быть выполнено в пределах натурального ряда чисел. Двое детей должны разделить между собой яблоко; они уверены, что ни один из них не получит **целого** яблока. **Не задумываясь**, они его разрезают пополам.

До сих пор мы считали число **1 неделимой единицей**. Теперь же вводим его **половину** в качестве **меньшей единицы**, и раз сделан первый смелый шаг, то ничто нам не мешает разделить 1 на 3, 4, 5,.. и любое число частей **и вести счет** в дальнейшем **этими новыми малыми единицами**, полученными таким способом. Это значит, что мы **можем считать так**: две половины, три половины, четыре половины… или, выражая в знаках: 2/2; 3/2; 4/2…

Число **под** дробной линией **именует доли**, **то есть <u>новые единицы</u>**, о которых идет речь; это знаменатель. Число **над** дробной чертой сосчитывает **<u>сколько таких единиц</u> взято**; это числитель» (все выделено мной. — В. Х. [23, с. 95–96]).

Вы видите, читатель, что стоит только использовать понятие «размерности», т. е. сказать **какими долями** единицы считаем: половинками (вторыми долями), третьими долями… десятыми долями… — и счет в области дробных чисел становится счетом в области привычных натуральных чисел, но… с указанием «размерности». И как только ребенок воспринял эту идею счета долей одной «размерности», для него становится **совершенно прозрачной** необходимость приведения дробей к общему знаменателю при сложении и вычитании дробей — ведь он уже превосходно усвоил, что складывать можно величины **только одной «размерности»**: яблоки + яблоки, тракторы + тракторы,.. а теперь — третьи доли + третьи доли, десятые доли + десятые доли и т. п.

Название новых единиц — «размерность» — указана в знаменателе, и как только дроби приведены к общему знаменателю, мы можем о нем, знаменателе, «забыть» и вести счет натуральными числами, например: 2/5 + 1/5 — два + один = три, **но чегó «3»**? — Правильно, 3 **пятых доли**.

А вот две пятых и одну третью мы сложить не сможем поскольку это величины разной «размерности».

Мы видим, что сама сущность понятия «Дробь» предельно ясна — это разбиение единицы на равные части и счет долями единицы. Другое дело, что очень трудны для восприя-

[8] Я сознательно ограничиваюсь множеством натуральных чисел 1, 2,…, n,.. Но вы, читатель, занимаясь дробями в 6-м классе, должны обратить внимание на то, что расширение понятия числа в математике идет в следующем порядке: натуральные числа (целые положительные), целые числа (целые отрицательные и положительные, включая ноль), рациональные числа — дроби, числа вида p/q (p — целое, q — натуральное). В 6-м же классе реально сначала изучаются положительные дроби (p/q, где p и q — натуральные) и лишь потом целые числа.

тия шестиклассника понятие кратного, приведение дроби к новому знаменателю, кратному прежнему. Но эти вопросы — тема другой книги.

По необходимости вкратце расскажу о разнице между, скажем так, **двумя сторонами понятия** «Дробь», что потребуется нам в дальнейшем.

Когда я сказал, что две пятых и одна треть величины разной «размерности», то это было в достаточной степени условно. Нам необходимо было уяснить, что счет дробей ведется более мелкими единицами как счет натуральных чисел и что складывать дроби можно только приведя их к общему знаменателю (к одной «размерности»). На самом деле дробь — это просто число, и только тогда возникает у нас нужда в «размерности», когда мы от арифметических действий с числами (решение примеров) переходим к действиям с величинами[9] (решение задач).

Две стороны дроби.

Дробь возникает в процессе деления нечто целого на равные части. Примеры целого: 1 пирог, 1 километр, 1 бак молока.

Мы видим, математически целое выражается единицей.

Однако каждое целое — это «что-то», каждое целое — «из чего-то состоит», у каждого целого — есть «свое содержимое». Это «содержимое» отнюдь не всегда должно быть равным единице и это «содержимое» — уже «размерная» величина.

Например, 1 пирог весит 20 кг.

1 пирог — целое, а **20 кг/в одном** пироге — «содержимое» целого.

Чисто визуально:

Целое		**«Содержимое» целого**
1 пирог	НО	**20 кг**/в **1**-м пироге
1 километр	НО	**1000 м**/в **1**-м километре
1 бак молока	НО	**35 л**/в **1**-м баке
а		б

Рис. 39

Целое — величина безразмерная: нам все равно пирог ли, километр ли, лишь бы это был **один** пирог, **один** километр (рис. 39а). И если мы разобьем ящик под названием 1 пирог

[9] О величинах и числах Р. Г. Пиотровский в книге «Математическая лингвистика» пишет так: «Понятие числа выводится из понятий величины и измерения. Основное свойство величины состоит в том, что она может быть сопоставлена с другой определенной величиной того же класса, которая выступает в роли единицы меры. Сам процесс сопоставления первой величины с единицей меры и называется измерением. В итоге измерения мы получаем некоторое число, которое выражает отношение рассматриваемой величины к величине, принятой за единицу меры» [25, с. 16–17]. Можно сказать, что здесь дано «физическое» определение числа. Должен заметить, что я употребляю термин «величина» в несколько нестрогом и расширенном смысле именно для того, чтобы изначально подчеркнуть разницу между числом как понятием, возникающим непосредственно в математике и, скажем так, числом «физическим», обладающим «размерностью». Кроме того, работая «в буквах» и используя термин «величина», мы исподволь готовим детей к будущей работе с функциями, с переменными и постоянными величинами.

или 1 километр на две равные части, то и в первом и во втором случае у нас будут **одни и те же вторые доли** (рис. 40).

1 ящик (пирог)		1 ящик (километр)	
1/2	1/2	1/2	1/2

Рис. 40

Но как только мы вспомним о «содержимом» целого (рис. 39б): **в одном** пироге — **20 килограммов** (рис. 41), то сразу увидим, что у дроби **как безразмерной части целого** — 1/2 (часть целого) — есть и **«размерная» составляющая** — 10 кг (рис. 42).

Целое	**«Содержимое» целого**
1 ящик (пирог)	
	20 кг/в **1**-м пироге

Рис. 41

<u>**Дробь — «безразмерная» величина**</u>			<u>**«Содержимое» дроби — «размерная» величина**</u>	
1 ящик (пирог)			**1** ящик (пирог)	
1/2 часть ящика	1/2 часть ящика	Н О	**10 кг** в 1/2 части	**10 кг** в 1/2 части

Рис. 42

Четкое осознание разницы между двумя сторонами понятия «Дробь» (кратко: дробь **как безразмерная часть** целого и дробь как **«размерная» величина содержимого части** целого) крайне поможет нам в решении задач с дробями в главах V и VII (в умении безошибочно и предельно осознанно находить дробь от числа и число по дроби и основанных на этом действиях с процентами).

В этой же главе нам понадобится только первая сторона понятия «Дробь»: **дробь как безразмерная часть** целого и **целое как единица**.

Возьмем простейший ГРАЭЛ-(∑).

Задача 1

За 1-й день Маша прочитала 1/3 книги. За 2-й день — 2/3 книги. Какую часть книги прочитала Маша за два дня?

Разумеется, никаких пояснений (кроме «Арифметики») с точки зрения ГрафАнализа не требуется (рис. 43).

Графика

$Д_1$	$Д_2$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

В = ?

Алгебра Арифметика

$$В = Д_1 + Д_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Рис. 43

Для «Арифметики» нам необходим **смысл** дроби (рис. 44).

Видим, что (**вся** книга состоит из 3-х третьих долей, а вся книга — **это целое**, т. е. **единица**).

Вывод: Маша прочитала **всю** (целую) книгу.

В таком виде задача не вызывает никаких сложностей.

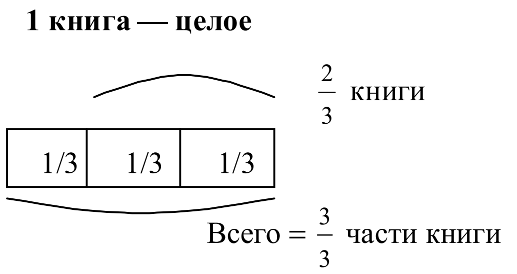


Рис. 44

Поставим вопрос иначе: прочитала ли Маша книгу? Наша задача 1 преобразуется к виду задач главы II, цикла III, задачи 6–10 (рис. 45).

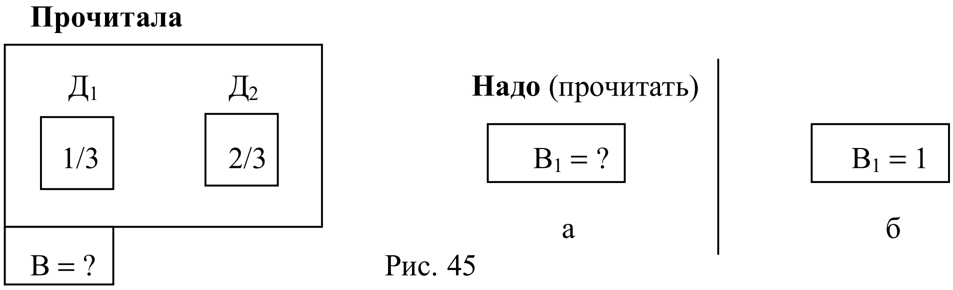


Рис. 45

При такой постановке требуется отчетливое понимание того, что вопрос содержит два момента:

1. Прочитала ли? — сравнить две суммы **В** и **В$_1$** (**обратите внимание** — «безразмерных», т. к. речь идет о частях целого, но не о содержимом целого или частей целого) — ситуация нам знакомая.

2. Прочитала ли **книгу**? — необходимо понимать: **всю** книгу, т. е. это **целое** = **В$_1$**, математически В$_1$ = 1. Именно поэтому на рис. 45 изображены две суммы **В$_1$**. На рис. 45а — ДО осознания данного п. 2, на рис. 45б — ПОСЛЕ осознания п. 2 (разумеется, это сделано в иллюстративных целях, для того, чтобы увидеть, как мы извлекаем из текста содержимое суммы **В$_1$**, **опираясь на смысл** дроби).

Приведу еще несколько задач без «Графики» в силу очевидности.

Задача 2

Рабочий выполнил за первый день 1/3 **всей** работы, за второй 1/4 **всей** работы, за третий 5/12 **всей** работы. Выполнил ли рабочий за эти 3 дня **всю** работу? (выделено мной. — В. Х., [24, с. 186, № 725]).

Решение:

$$В = Д_1 + Д_2 + Д_3 = \overset{4}{\frac{1}{3}} + \overset{3}{\frac{1}{4}} + \overset{1}{\frac{5}{12}} = \overbrace{\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12}}^{\text{12-е доли}} = \frac{4+3+5}{3} = \frac{12}{12} = 1$$

Задача 3

От реки до горы путешественник за три дня прошел соответственно 3/8, 5/12 и 5/24 пути. Дошел ли он до горы?

Решение:

$$В = Д_1 + Д_2 + Д_3 = \overset{3}{\frac{3}{8}} + \overset{2}{\frac{5}{12}} + \overset{1}{\frac{5}{24}} = \overbrace{\frac{9}{24} + \frac{10}{24} + \frac{5}{24}}^{\text{24-е доли}} = \frac{9+10+5}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

Задача 4

За январь, февраль и март рыболовецкий сейнер выполнил соответственно 1/6, 1/3 и 1/2 квартального плана. Был ли выполнен план по вылову рыбы за квартал?

Решение:

$$\text{В} = \text{Я} + \text{Ф} + \text{М} = \overset{1}{\frac{1}{6}} + \overset{2}{\frac{1}{3}} + \overset{3}{\frac{1}{2}} = \overbrace{\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}}^{6\text{-е доли}} = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{6} = 1$$

Самое существенное в задачах 1–4 то, что:

1. Слагаемые выражены «безразмерными» частями целого (в долях целого).

2. В вопросах задач требуется видеть сумму — ВСЕГО как «безразмерное» ЦЕЛОЕ = 1.

Несмотря на совершеннейшую тривиальность задач (нахождение суммы 2–3 слагаемых), я посчитал нужным привести их здесь. И вот почему.

То, что **графически** это задачи уровня первого класса школы — совершенно очевидно. Так же очевидно, что это задачи первого класса **и арифметически** — **<u>после</u>** приведения дробей к общему знаменателю, **мы ведем счет в области натуральных** чисел (**одно** и **двузначные** числа **<u>в числителях</u>** дробей — считаем третьи, двенадцатые, двадцатьчетвертые или шестые доли соответственно. — После того, как ранее мы освоились с этой идеей Розы Петер, на знаменатель уже «не обращаем внимания»). И абсолютно прозрачен вывод: трудности с задачами в 6-м классе связаны не с самими задачами, не с их логической структурой, а прежде всего — со счетом в узком и широком смысле! То есть, во-первых, с пониманием смысла дроби как одной или нескольких «безразмерных» частей «безразмерного же» целого, математически выражаемого единицей, с одной стороны, и пониманием «содержимого дроби» как размерной величины — с другой. Это основа понимания содержательной структуры мер и грамотной работы с размерными величинами. Во-вторых, с чисто техническим умением приводить дроби к общему знаменателю, что, как я уже говорил, требует сосредоточения в процессе преподавания **на главном**: **не спеша, упорно, долго (если необходимо**) доводить ребенка до понимания идей разложения на простые множители, кратного и наименьшего общего кратного, смысла основного свойства дроби. — Все это **не видно, скрыто** «само по себе в арифметических действиях с дробями, все это **элементы техники** (замечу, что отработка этих элементов **даже в индивидуальных занятиях** требует от пяти до семи двухчасовых занятий). Но тем значимей роль этих элементов в реальной вычислительной практике ребенка, когда вычислительные ошибки возникают из-за неотработанности — смысловой и практической — базовых элементов понятия «Дробь».

Забегая вперед замечу, что в-третьих, проблемой счета в широком смысле является неумение работать с простейшими уравнениями, решение которых основано на определении действий вычитания и деления. Однако мы с вами, читатель, позаботимся о том, чтобы эта проблема у нас не возникала.

Все вышесказанное в практике преподавания математики в 6-м классе обычно скрыто от глаз преподавателей **и, особенно, родителей** еще и по другой причине, теперь уже **действительно** имеющей отношение к текстовым задачам — это **<u>проблема переформулирования</u>**. В предельно простой, едва ли не иллюстративной форме, она отражена в вопросах задач 3–4.

В задаче 3 вопрос: «Дошел ли он до горы?» — требует помимо осмысления уже знакомого нам момента сравнения еще и осознания того, что речь идет о **всем** пути, о **целом = 1**. Требуется переформулировать предметно-содержательный вопрос в математически модельный (примерная цепочка переформулировок):

дошел ли до горы? прошел ли путь? какой путь? ВЕСЬ путь. что такое ВЕСЬ путь? — **это целое**, а ЦЕЛОЕ — это 1 (единица). Вот «1» — это уже уровень математической техники, с единицей можно работать (считать, сравнивать).

Аналогично задача 4: что такое квартальный план? — это ЦЕЛОЕ = 1 (об этом, в частности, говорят слагаемые, выраженные в частях целого).

Приведу еще две задачи, взятые из книжки П. Н. Карницкого [26]. Обе используют всего лишь ГРАЭЛ-(> на) в форме разностного сравнения — «на сколько больше-меньше» (см. цикл III данной главы).

Задача 55 [26, с. 16]

Архангельск находится на широте $64°34'$, а Астрахань на широте $46°21'$. Определите, на сколько севернее находится Архангельск от Астрахани в градусной мере и в километрах, если один градус меридиана равен по длине 111,1 км.

Всего лишь ГРАЭЛ-(> на), но насколько ярко уже первая задача (вторая, № 205, будет приведена далее) выявляет, скажем так, в-четвертых, проблему связанную с мерами (иначе — счет в широком смысле): ясное понимание того, что потребность измерения порождает дробь как долю единицы; что счет долями, как и счет в натуральных числах, — ответ на вопрос «Сколько ВСЕГО?» — напрямую выявляет **смысл** смешанной дроби как суммы целой и дробной частей; что перевод одних единиц в другие основан на смысле дроби.

Ну и конечно же завершается все **счетом в узком смысле** — разделить, умножить: совсем немногие из нынешних школьников, начиная с шестого класса **<u>и старше</u>**, смогут довести вычисления до правильного результата **<u>вручную</u>**, без калькулятора.

1. Переформулировка вопроса.

Шаг-1.

Сразу видим слагаемые элементарного ГРАЭЛ-(> на) (рис. 46).

$А_Р$	$А_С$
$64°34'$	$46°21'$

Рис. 46

Шаг-2.

«… на сколько севернее $А_Р$(хангельск) от $А_С$(трахани)» — благодаря именам слагаемых ($А_Р$, $А_С$) и их содержимому (~ $64°, 46°$), видимому визуально, невооруженным глазом, понимаем, что переформулирование заключается в том, чтобы отождествить — так как ГРАЭЛ-(> на) — «на сколько севернее» с «насколько больше» («дальше» в ГРАЭЛ-(> на) как синоним — дальше от экватора). **Из непосредственного сравнения** содержимого обоих слагаемых возникает верный знак «>» — больше (рис. 47).

Графика

$$\begin{array}{ccc} А_Р & & А_С \\ \boxed{64°34'} & > & \boxed{46°21'} \\ & & \boxed{x} \end{array}$$

Алгебра

$$А_Р = А_С + x$$
$$x = А_Р - А_С$$

Рис. 47

Видим, «Графика» и «Алгебра» — всего лишь ГРАЭЛ-(> на), уровень задач **<u>первого класса</u>**.

И вот тут-то блок «Арифметики» с блеском проявляет себя в виде проблемы счета как в узком, так и в широком смысле!

Смотрите сами, читатель.

2. Проблема счета в широком смысле (знание содержательной структуры мер, перевод единиц измерения, действия с именованными числами[10]).

Вычислим наше «на сколько севернее»

$x = A_P - A_C$,

$x = 64°34' - 46°21' = 18°13'$.

Да, никаких проблем не возникло. **Но только потому**, что удачные числовые данные — нам не пришлось занимать единицу старшего разряда.

Ну а если бы было: $x = 64°34' - 46°57' (= 17°37')$?

Для большинства нынешних школьников всех возрастов **правильное решение окончилось бы на этом вычислительном шаге**, поскольку они не знают содержательной структуры градусной меры (в 1 градусе — 60 минут), не умеют переводить крупные единицы в мелкие (или наоборот). То есть, как правило, **не могут <u>правильно</u> посчитать** (взять 1° из 64°, раздробить его в 60′ минут и сложить с 34′, для того, чтобы вычесть 57′ из 94′) в силу отсутствия навыков вычислительной работы с составными именованными числами[11].

3. Проблема счета в узком смысле (счет как таковой, как арифметическая вычислительная техника).

Проблема имеет два аспекта.

Первый связан с дробями **в смысловом плане**, с пониманием того, что запись 18°13′ (составное именованное число) — это сокращенная запись **<u>суммы</u>** 18° + 13′. А поскольку $1' = (1/60)° \approx 0,017°$, то тем самым это иная форма записи смешанной дроби: целая часть — 18° и дробная часть — $13' = (13/60)° \approx 0,217°$.

То есть имеем:

Составное именованное число	**Смешанная дробь** (простое именованное число)
$18°13' = 18° + 13' =$	а) $\left(18\frac{13}{60}\right)°$ — обыкновенная б) 18,217° — десятичная

Итак, первый аспект проблемы счета в узком смысле непосредственно вытекает из проблемы мер (счет в широком смысле, смысл составного именованного числа), переходит в смысл дроби (счет долями, смешанная дробь как сумма целой и дробной частей) и упирается в чисто техническую задачу перевода обыкновенной дроби в десятичную.

Это следующий камень преткновения на пути **правильного решения**.

Второй аспект проблемы, и самый важный завершающий этап задачи — доведение до числа! — связан с дробями в вычислительном плане, то есть просто с умением грамотно вычислять (умножать и делить, переводить смешанную дробь в неправильную — умножение и сложение, выделять целую часть дроби — разложение на сумму удобных слагаемых и деление).

---

[10] «Численное значение величины, взятое вместе с указанием наименования единицы измерения(меры), называется именованным числом. Так, 3 метра, 6 килограммов — именованные числа» [11, с. 114].

[11] «Именованное число называется **простым**, если оно состоит из единиц только одного наименования, например 2 *м*. Именованное число называется **составным**, если оно состоит из единиц различных наименований, например 2 *м* 26 *см*. Составные именованные числа получаются в результате измерения в тех случаях, когда взятая единица измерения не содержится целое число раз в измеряемой величине и поэтому получившийся остаток приходится измерять меньшей мерой» [11, с. 115].

Десятичные дроби.

$x = 111{,}1\ (\text{км}) \bullet 18{,}217 \approx 2023{,}9\ (\text{км})$

Обыкновенные дроби.

$$x = 111\frac{1}{10} \bullet 18\frac{13}{60} = \frac{1111}{10} \bullet \frac{1093}{60} = \frac{1214323}{600} = 2023\frac{523}{600} (\approx 2023{,}9\,\text{км})$$

Только что проведенные вычисления — самое труднопреодолимое препятствие для **современных** школьников (при условии, что они осилили два предыдущих, смысловых). Дай-то Бог, читатель, чтобы ваш ребенок без затруднений **<u>вручную</u>** справился с этими вычислениями (**проверьте это!**). Ну а мои коллеги, учителя, сами знают какая часть их учеников в состоянии осилить проблему счета в узком смысле!

Начиная разговор об этой задаче, я недаром сказал, что мало кто из современных старшеклассников доведет ее до правильного результата вручную, без калькулятора. Ведь книжка П. Н. Карницкого издана в… 1959 году. Тогда калькуляторов и в помине не было. Школьники проводили все вычисления вручную. А эта задача включена в раздел… **6-го класса!**

Вторая задача — все тот же ГРАЭЛ-(> на) — показывает, как важно снабдить ребенка инструментарием ГрафАнализа и, максимально облегчив ему анализ логической структуры задачи с использованием АИД — алгоритма извлечения данных (глава II цикл VI, задача 3), сосредоточить его внимание **на быстрой и грамотной** работе с десятичными дробями (счет в узком смысле). И переводе единиц измерения (счет в широком смысле).

Задача 205 [26, с. 44]

Первый искусственный спутник Земли, запущенный в СССР **4 октября** 1957 года, в начале движения совершал полный оборот вокруг Земли за **96,17 <u>минуты</u>**. 27 октября он совершал полный оборот вокруг Земли за **95,31** минуты, а ракета-носитель совершала оборот в этот день за **94,68** минуты. **На сколько <u>секунд</u>** уменьшилось время полного оборота спутника и ракеты-носителя к **27 октября**? **На сколько** секунд ракета-носитель совершала полный оборот вокруг Земли 27 октября **быстрее, чем спутник**? Что происходило со скоростью спутника и ракеты-носителя, начиная с 4 октября до 27 октября?

Напомню суть АИД: «скользя по тексту», ищем ключевые слова соответствующих ГРАЭЛов, параллельно — слагаемые, связанные этими ГРАЭЛами, параллельно — любые числа, значения (содержимое) каких-либо слагаемых.

Поскольку задача не учебная (как задачи моих циклов), объемная, то ясно, что «скользить по тексту» придется несколько раз, неторопливо, уточняя связи слагаемых, их имена, содержимое.

Я покажу, как **реально** пошагово идет процесс извлечения данных, как они уточняются и дополняются, как все это **фиксируется на бумаге** (**<u>крайне важный момент! Обратите на него особое внимание!</u>**), и сколько времени в среднем уходит на каждый шаг.

I. Первое прочтение текста.

При первом прочтении выделены значимые элементы (у меня — полужирный шрифт или подчеркивание в тексте): содержимое слагаемых и два отношения «Больше НА» (на сколько).

Замечу, что **только к концу** первого прочтения была выделена дата 27 октября и **ПОСЛЕ** — дата 4 октября. Это, разумеется, не слагаемые. Но в силу объемности задачи появляется идея **хороших (<u>естественных</u>) обозначений**, которые мгновенно и записываются:

Обозначения (~ 2 минуты):

C P — имена слагаемых: С(путник), Р(акета)

C_4 P_4 — время оборота С и Р — 4 октября

C_{27} P_{27} — время оборота С и Р — 27 октября

Записывается ПОСЛЕ первого прочтения.

II. Второе прочтение «по частям» (извлечение данных и **последовательность фиксации** на бумаге).

1. Слагаемые и их содержимое (~ 2 минуты).

C_4

$\boxed{96{,}17\text{м}}$

C_{27} $\boxed{95{,}31}$ P_{27} $\boxed{94{,}68}$

Рис. 48

На рис. 48 указана «размерность» [м] — минуты, т. к. при первом прочтении было замечено, что данные — **в минутах**, а ответ нужен — **в секундах** (подчеркнуто в тексте), т. е. потребуется перевод единиц измерения.

2. 1-й вопрос задачи (состоит из двух подвопросов).

а) Спутник (~ 1 минута).

C_4 $\boxed{96{,}17}$ > C_{27} $\boxed{95{,}31}$

$\boxed{x}$

Рис. 49

«На сколько уменьшилось… время спутника?». Уменьшилось — синоним «меньше», ⇒ вопрос: что больше? — $C_4 > C_{27}$ (рис. 49).

b) Ракета (~ 3 минуты).

P_4 $\boxed{?}$ > P_{27} $\boxed{94{,}68}$

$\boxed{x}$

Рис. 50

Рис. 50 — автоматом, аналог рис. 49, но **видим**, что P_4 — неизвестно (**нет в тексте**). **Возвращаясь к тексту**, извлекаем «**скрытые данные**»: **подразумевается**, что в начале движения — 4 октября — и спутник, и ракета-носитель совершали полный оборот **за одно и то же время**, т. е. $P_4 = C_4 = 96{,}17$. После уточнения — рис. 51.

P_4 $\boxed{96{,}17}$ > P_{27} $\boxed{94{,}68}$

$\boxed{x}$

Рис. 51

3. 2-й вопрос задачи (~ 1 минута).

«На сколько… ракета **быстрее**, чем спутник? Быстрее — синоним «меньше», ⇒ вопрос: что медленнее, что больше? — Спутник (рис. 52).

$$\begin{array}{ccc} C_{27} & & P_{27} \\ \boxed{95{,}31} & > & \boxed{94{,}68} \\ & & \boxed{x} \end{array}$$

Рис. 52

4. 3-й вопрос задачи.

«Что происходило со скоростью…» — Понимаем, что вопрос имеет физическую природу. Поэтому оставляем его до конца задачи.

III. Проверка извлеченной в п. II информации (~ 3 минуты).

Внимание.

Напомню, что реализовав «Графику», **мы ни в коем случае не идем дальше**. Возвращаемся к тексту и тщательнейшим образом проверяем правильность данных и отношений между ними, **причем не «на глаз» — работают обе руки!**

1. Первые два предложения текста сверяем с рис. 48 (верность числовых данных и имен слагаемых).

2. Третье предложение (1-й вопрос) — сверяются: **отношения** «Больше НА» с текстом и рис. 49, рис. 51; **числовые данные — с рис. 48**.

3. Четвертое предложение (2-й вопрос) — аналогично п. III, 2: текст и рис. 52, затем рис. 48.

Обратите внимание на затраченное время — 3 минуты!

<u>**С этого момента с текстом не работаем!**</u>

IV. Окончательная фиксация «Графики» на бумаге (~ 2 минуты).

ГРАС-1 (из рис. 49)

$$\begin{array}{ccc} C_4 & & C_{27} \\ \boxed{96{,}17} & > & \boxed{95{,}31} \\ & & \boxed{x_1} \end{array}$$

а

ГРАС-2 (из рис. 51)

$$\begin{array}{ccc} P_4 & & P_{27} \\ \boxed{96{,}17} & > & \boxed{94{,}68} \\ & & \boxed{x_2} \end{array}$$

б

ГРАС-3 (из рис. 52)

$$\begin{array}{ccc} C_{27} & & P_{27} \\ \boxed{95{,}31} & > & \boxed{94{,}68} \\ & & \boxed{x_3} \end{array}$$

в

Рис. 53

Хоть вы и компактно располагали п. I (обозначения) и п. II — рис. 48–52, но они шли у вас последовательно сверху вниз и, как минимум, уже рис. 53 потребовал нового листа бумаги (во всяком случае у меня произошло именно так — лист альбомного формата А4 по вертикали).

Важный технологический совет.

1. Не жалейте бумаги (но, конечно, и экономно, с толком используйте ее)!

2. Постарайтесь **не пользоваться** бумагой из школьных тетрадей (в клеточку или в линейку). Купите ребенку пусть самую дешевую, но целую пачку бумаги формата А4 (250–500 листов).

3. Позаботьтесь о стержнях для ручки: лучше всего «с толстой головкой» и черной яркой пастой. Ни в коем случае стержень не должен царапать бумагу, блекло писать или как-то иначе затруднять рисование «Графики» и письмо! Следует сразу приучать ребенка пользоваться в нужный момент двумя цветами, например, красный и черный или синий и зеленый.

4. Если требуется несколько листов (на занятие или на отдельную задачу), необходимо нумеровать их.

С отдельными листами очень удобно работать: нет необходимости заглядывать на предыдущие страницы — **все перед глазами**, нет нужды «жаться».

Все вышесказанное не только обеспечивает определенный уровень комфортности при **интенсивной** и **объемной** **<u>работе</u>**, но и приучает к широкому полю зрения — ви́дения в любой момент всей задачи или нужной ее части. Да и сам большой чистый лист бумаги, резко отличаясь от школьной тетрадки, незаметно, исподволь вырабатывает привычку к концентрации внимания и одновременно к свободному и спокойному состоянию духа.

Вернемся к рис. 53.

Вы видите, что неизвестные в ГРАЭЛах, в отличие от рис. 49–52, с индексами: x_1, x_2, x_3. Это и понятно — три разных вопроса.

V. Алгебра (~ 1 минуты).

«Алгебру» свободно считываем с рис. 53а–в.

Из ГРАС-1: $C_4 = C_{27} + x_1 \longrightarrow x_1 = C_4 - C_{27}$
Из ГРАС-2: $P_4 = P_{27} + x_2 \longrightarrow x_2 = P_4 - P_{27}$
Из ГРАС-3: $C_{27} = P_{27} + x_3 \longrightarrow x_3 = C_{27} - P_{27}$

VI. Арифметика (~ 2 минуты).

1. Считываем из «Алгебры» и рис. 53 — ГРАС 1–3 — (~ 0,5 минуты):

$x_1 = 96{,}17 - 95{,}31 = \ldots$
$x_2 = 96{,}17 - 94{,}68 = \ldots$
$x_3 = 95{,}31 - 94{,}68 = \ldots$

2. Счет «на полях» (~ 1,5 минуты):

$$(x_1)\ \begin{array}{r} 9\dot{6}{,}17 \\ -\ \\ 95{,}31 \\ \hline \boxed{0{,}86} \end{array} \qquad (x_2)\ \begin{array}{r} 9\dot{6}{,}\dot{1}7 \\ -\ \\ 94{,}68 \\ \hline \boxed{1{,}49} \end{array} \qquad (x_3)\ \begin{array}{r} 9\dot{5}{,}\dot{3}1 \\ -\ \\ 94{,}68 \\ \hline \boxed{0{,}63} \end{array}$$

Замечание.

• Обязательно ставим точки при «займе» единицы старшего разряда.

• Обводим результаты счета (да и вообще результаты всех промежуточных вычислений, чтобы мы ни решали).

VII. Ответ.

1. Арифметическая часть задачи — 1-й и 2-й вопросы (~ 2 минуты).

А теперь вспомним, что ответ надо дать в секундах. И мы опять **упираемся в решающую проблему счета**, в перевод единиц измерения. То есть на самом деле «Арифметика» продолжается, только мы имеем дело со счетом в широком смысле.

Пока приведу ответ без пояснений, поскольку необходимый материал о дроби и ее содержимом (формула Д•В = СД — перевод единиц измерения, в частности) будет дан в главе V, «Деление», п. «Еще немного о дробях».

$x_1 = 0{,}86 \bullet 60(c) = 51{,}6$ (с)
$x_2 = 1{,}49 \bullet 60(c) = 89{,}4$ (с)
$x_3 = 0{,}63 \bullet 60(c) = 37{,}8$ (с)

2. Физический смысл задачи (3-й вопрос).

Только сейчас имеет смысл заняться последним вопросом (что происходило со скоростями?). Чтобы резче подчеркнуть разницу между двумя частями задачи, я оставляю вопрос без ответа, поскольку ГрафАнализ занимается только арифметическими текстовыми задачами.

Резюме задачи 205.

В завершение, давайте посмотрим на временно́й срез задачи.

На анализ логической структуры, включая фиксацию на бумаге, мы затратили 14 минут. Кому-то может показаться, что это много, что гораздо быстрее было бы решить задачу школьным арифметическим способом: читаем задачу, пишем числовые равенства, и тут же считаем. В самом деле, на «Арифметику» (VI, счет в узком смысле) и на «Ответ» (VII, та же «Арифметика», счет в широком смысле) ушло всего 4 минуты. Добавив к этому 1-е прочтение (I), получим 6 минут на задачу арифметическим способом, верно? Тем более, что вся логическая структура состоит из одного отношения «Больше НА». Спрашивается, к чему было огород городить?!

Но обе последние задачи уровня 6-го класса я как раз и привел в качестве примера того, что зачастую не столько логика задач (в смысле используемых ГРАЭЛов) является основным препятствием, сколько вычислительная техника (счет в узком и широком смысле). Одна вычислительная ошибка — и минус в оценке, две ошибки — и задача 205 не засчитана, два балла. Для задачи 55 достаточно и одной ошибки.

Правда для того, чтобы посчитать задачу 205 за 4–5 минут, мы должны уметь «**с одного взгляда**» видеть какие слагаемые с какими связаны, «меньше» (быстрее и т. п.), переводить в «больше» (да еще сразу в виде числовых равенств!), т. е. за 1–2 минуты сделать то, что мы с вами проделали за 14 минут (А ведь мы с вами не просто выявили элементарный — ГРАЭЛ-(> на), на это хватило бы и одного прочтения (п. I), но внимательно проанализировали всю логическую структуру задачи, неоднократно проверили ее (п.п. II–IV), довели до возможности перевода в математику).

Согласен, можно и так. Но какого напряжения внимания это потребует! Насколько будет затруднена проверка! А если, к тому же, мы еще и считать будем по мере появления числовых равенств, да тут же переводить минуты в секунды!..

Надеюсь, не надо доказывать, что для подавляющего большинства школьников **ошибки будут <u>неизбежны</u> уже на этапе извлечения данных**. А переход с текста на счет и со счета обратно к условию — **практически <u>гарантирует</u> вычислительные ошибки**.

Цель учителя, как ни тривиально это звучит — НАУЧИТЬ, — а не просто «контролировать», не просто «оценивать». Прежде, чем требовать результата от ребенка, мы обязаны вооружить ребенка инструментарием математики и способам работы, научить вниманию и умению сосредоточенно работать. И только после этого — требовать.

ГрафАнализ как раз и дает нам возможность неторопливо, спокойно, без ненужных усилий, и самое главное — безукоризненно точно, построить графическое решение (рис. 53), выделив анализ задачи в предельно наглядный и простой блок «Графики». А дальше остается чисто техническая работа: «Алгебра» — 1 минута и счет — 4 минуты. Благодаря такому разбиению процесса решения, мы не просто можем без усилий контролировать верность каждого шага, но и абсолютно точно **видеть** — в каком месте появляются проблемы, чем не владеет ребенок (особенно, введя понятие счета в узком и широком смысле)!

Итак, я думаю достаточно убедительно показано на простейших примерах, что ГрафАнализ центральной задачей курса математики 6-го класса ставит формирование знаниевого ядра «Дробь» (данное положение далее будет подтверждено в главе V, п. «Еще немного о дробях» и задачах с дробями) и отточенной вычислительной техники. Если же мы не сосредоточиваемся на этом (а так в основном и происходит), то мгновенно возникают проблемы с тригонометрией (10-й класс), логарифмами (10-й класс), основами дифференцирования и интегрирования (11-й класс) и вообще с дальнейшим вузовским курсом высшей математики.

Немного об уравнениях

В цикле I, задача 1, мы с вами определили уравнение как равенство, содержащее неизвестную величину. Решением уравнения мы назвали как формулу решения, так и то значение неизвестной (число), которое при подстановке в уравнение обращает его в верное числовое равенство.

Совокупность простейших уравнений распадается на две группы: группа сложения-вычитания и группа умножения-деления.

Первой группой, состоящей из уравнений (1)–(3), мы и займемся.

Решения я поясню на конкретных числовых уравнениях.

Уравнение **Решение уравнения**

(1) $x + 5 = 8 \longrightarrow x = 8 - 5$ (1′)

(2) $x - 5 = 8 \longrightarrow x = 8 + 5$ (2′)

(3) $9 - x = + 6 \longrightarrow + x = 9 - 6$ (3′)

Опираемся исключительно **на определение** действия вычитания: найти **неизвестное слагаемое** — это и есть вычитание (п. Немного о вычитании).

Так как работаем только с натуральными числами, то подразумевается, что сумма больше каждого из слагаемых (если исключить равенство нулю одного из слагаемых).

Видим, в уравнении (1) x — неизвестное слагаемое. Значит, находим действием вычитания известного слагаемого = 5 из известной суммы = 8, решение (1′). С этим уравнением мы с вами давно знакомы.

В уравнении (2) видим, что неизвестной является сумма x. (Сравните с (1′): 8 — число **из которого** вычитаем, **это сумма**).

Раз в уравнении (2) x — **неизвестная сумма** (уменьшаемое), то 5 и 8 — известные слагаемые. А сумма и «состоит» из слагаемых. Получаем (2′) — решение уравнения (2).

Совершенно аналогично получаем решение уравнения (3): x, число **которое** вычитаем, является **неизвестным слагаемым** (вычитаемым). (Сравните с (1′): 5 — число **которое** вычитаем, **это слагаемое**). А неизвестное слагаемое и находим, по определению, вычитанием из известной суммы = 9 (уменьшаемого) известного слагаемого = 6 (разности).

Более подробно решение (3′) получим, — дважды опираясь на определение вычитания, — рассматривая следующую цепочку преобразований:

Неизвестное слагаемое

(3) $9 - x = 6 \longrightarrow 9 = 6 + x \longrightarrow 9 - 6 = x \Leftrightarrow x = 9 - 6$ (3′)

Самым существенным, в прикладном смысле, для нас является следующее: «уединение *x*» (стрелочкой показано, как соответствующие члены уравнения переносятся в другую часть равенства); и при переносе **меняются знаки** (для наглядности я обвел знаки контуром).

Знаки меняются по определению действия вычитания (вспомните, как мы ввели знак «–» (минус): чтобы всего лишь **обозначить** действие вычитания).

Сценарий.

Вы прочитываете с ребенком выше сказанное (я полагаю, что вам, читатель, все ясно). Ребенок самую суть воспримет (правда, неизвестно с какой долей понимания).

Ваша задача состоит в том, чтобы ребенок «впечатал» (заучил, зазубрил) решения уравнений в память, особенно, уравнения (3). При этом главное, на что обращаем внимание, так это **на смену знаков** при переносе в другую часть равенства и лишь в меру понимания — на смысл действия вычитания. Единственная сто́ящая поддержка ребенку будет заключаться в том, что при ошибках вы **просите** его **показать стрелочкой** (нарисовать), что и куда переносится, как у меня. При малейших заминках — рисуете сами, все время **проговаривая**: «А раз переносим в другую часть равенства, то с каким знаком?.. Правильно, с противоположным».

Внимание.

Когда вы будете говорить: «С каким знаком?» — то, как правило, будет звучать ответ: «С минусом». Это происходит потому, что в уравнении (1) — определении действия вычитания — действительно «плюс» меняется на «минус». Однако в уравнениях (2) и (3) наоборот — «минус» меняется на «плюс».

Обязательно поправляйте ребенка, говоря: «Не с минусом, а **с противоположным** знаком», — и только потом уточняйте с каким именно. В противном случае в 6-м классе, при работе с отрицательными числами, ребенок будет постоянно путаться в знаках.

Таблица 5

Натуральные числа	Десятичные дроби	Обыкновенные дроби (5-й класс)
$x_1 + 18 = 40$	$x_{1д} + 18{,}9 = 40{,}8$	$a_{1о} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$
$y_1 + 160 = 500$	$y_{1д} + 160{,}78 = 500{,}99$	$\frac{2}{9} + b_{1о} = 1\frac{7}{9}$
$z_1 + 1250 = 4500$	$z_{1д} + 1250{,}067 = 4500{,}329$	$2\frac{7}{13} + c_{1о} = 5\frac{12}{13}$
$x_2 - 37 = 13$	$x_{2д} - 5{,}5 = 4{,}9$	$a_{2о} - \frac{3}{7} = 1$
$y_2 - 260 = 160$	$y_{2д} - 16{,}09 = 50{,}99$	$b_{2о} - \frac{7}{9} = 4$
$z_2 - 1350 = 2500$	$z_{2д} - 120{,}647 = 450{,}373$	$c_{2о} - 2\frac{7}{13} = 5$
$25 - x_3 = 5$	$5{,}5 - x_{3д} = 4{,}9$	$1 - a_{3о} = \frac{3}{7}$
$140 - y_3 = 50$	$14{,}56 - y_{3д} = 4{,}97$	$4 - b_{3о} = \frac{7}{9}$
$4300 - z_3 = 400$	$430{,}051 - z_{3д} = 240{,}905$	$5 - c_{3о} = 2\frac{7}{13}$

В таблице 5 я привожу подборку уравнений типа (1)–(3) для трех «видов» чисел. Главной трудностью, разумеется, явится правильный счет с десятичным дробями (вычитание) в уравнениях типа (1) и (3).

В таблице 6 я привожу несколько уравнений, которые **обязательно нужно свести к простейшим**, т. е. к типу уравнений (1)–(3): одна неизвестная величина и два известных числа.

Таблица 6

Уравнения, требующие сведения к простейшим	Соответствующие простейшие уравнения
$x + 18 + 20 = 40$	$x + 38 = 40$
$130 + 200 + x + 120 = 840$	$x + 450 = 840$
$150 + 250 + 100 + x = 750$	$x + 500 = 750$
$x - 10 + 20 = 40$	$x + 10 = 40$
$x + 30 - 10 = 50$	$x + 20 = 50$
$100 - 50 - x = 10$	$50 - x = 10$
$60 - x + 10 = 30$	$70 - x = 30$
$40 - x - 20 = 10$	$20 - x = 10$

Поясню примером.

Очень часто в 6-м классе (и старше) можно наблюдать такую картину:

$x + \underline{10} + \underline{20} = 50 \;\Rightarrow\; x = 50 - 10 - 20,$

вместо того, чтобы сначала сложить в левой части 10 и 20 (привести подобные, они подчеркнуты) и свести данное уравнение к простейшему, типа (1):

$x + 30 = 50 \;\Rightarrow\; x = 50 - 30.$

Таблица 7

Натуральные числа	Десятичные дроби	Обыкновенные дроби (5-й класс
$x_1 = 22$	$x_{1Д} = 21{,}9$	$a_{1О} = \frac{2}{7}$
$y_1 = 340$	$y_{1Д} = 340{,}21$	$b_{1О} = 1\frac{5}{9}$
$z_1 = 3250$	$z_{1Д} = 3250{,}262$	$c_{1О} = 3\frac{5}{13}$
$x_2 = 50$	$x_{2Д} = 10{,}4$	$a_{2О} = 1\frac{3}{7}$
$y_2 = 420$	$y_{2Д} = 67{,}08$	$b_{2О} = 4\frac{7}{9}$
$z_2 = 3850$	$z_{2Д} = 571{,}02$	$c_{2О} = 7\frac{7}{13}$
$x_3 = 20$	$x_{3Д} = 0{,}6$	$a_{3О} = \frac{4}{7}$
$y_3 = 90$	$y_{3Д} = 9{,}59$	$b_{3О} = 3\frac{2}{9}$
$z_3 = 3900$	$z_{3Д} = 189{,}146$	$c_{3О} = 2\frac{6}{13}$

Ясно, что провести два вычитания вместо сложения не только труднее, но и гораздо опаснее (чем больше минусов, тем больше шанс ошибиться).

Пока мы работаем с натуральными числами, как в таблице 6 — еще куда ни шло. Но как только дроби, да плюс отрицательные числа — пиши пропало.

В таких случаях **спрашивайте**: «Можем сложить или вычесть (привести подобные)?

Поэтому **требуйте**: сначала к простейшей форме типа (1)–(3), а далее — отлаженные решения простейших уравнений (1′)–(3′).

В таблице 7 приведены ответы к уравнениям из таблицы 5.

Прорешиваться должны **все** уравнения («набить руку» до автоматизма) в следующей последовательности: сначала вся группа «натуральных чисел», затем — «обыкновенные дроби», и только в заключение — «десятичные дроби». И ясно почему: указанные две группы, содержащие 18 уравнений, будут расписаны мгновенно, менее чем за 10–15 минут. А вот группа «десятичных дробей» потребует утомительного счета (кстати, вот теперь крайне желательна проверка с калькулятором, как и вообще в работе с десятичными дробями при хорошей практике счета).

Резюме главы III

ГрафАнализ **не является чем-то искусственным и надуманным** по той причине, что он отражает **реальную логику** арифметики, построенную на счете, сложении, на суммах и слагаемых. Вследствие этого «Графика» **сама рисуется** в виде сумм.

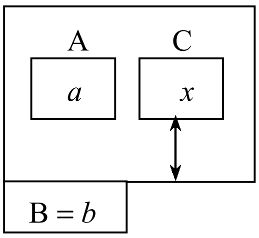
I. Что нового?

1. Введен графический элемент вычитания (рис. 54)**.**

ГРАЭЛ-(Δ) — ГРАЭЛ-(Разности) — соответствует логическому элементу арифметики, выражающему действие вычитания (цикл I, сценарий).

Обозначение: ГРАЭЛ-(Δ)

Графика



Алгебра

B = A + C
C = B – A

A = *a* — известное слагаемое
B(сего) = *b* — известная сумма
C = *x* — неизвестное слагаемое

Рис. 54

2. Выяснили, что **один** ГРАЭЛ-(Больше НА) реализует **четыре логических элемента арифметики**: больше на, меньше на, на сколько больше?, на сколько меньше? (цикл II, задача 1; цикл III, задача 1; п. Резюме циклов I–III).

II. Технологические приемы ГрафАнализа:

1. В **ГРАЭЛ-(Δ) ни в коем случае не позволяйте** обходиться без блока «Алгебры»! … «**Тем более ни в коем случае** … **не позволяйте** записывать решение **всей** задачи «школьным арифметическим способом»: 8 – 5 = 3! Сначала — только «Алгебра», **только сумма**» (цикл I, задача 1) «… стремление миновать «Алгебру» в виде сумм **и «считывать»** с «Графики» **сумму в разность** в «Арифметике» — это **нарушение технологических требований … ГрафАнализа**» (цикл II, п. Несколько замечаний).

2. Как только ребенок встретит в задаче «**меньше**», то сразу же должен **переформулировать** для себя «меньше» в «больше», т. е. спросить себя: «**А что́ больше чего?**» — поскольку «что такое меньше мы не знаем»! (цикл II, задача 1)

3. Технологию не отдают на откуп сообразительности и таланта. **Всячески помогайте** своему ребенку. Ваша задача — научить его языку, научить пользоваться инструментарием ГрафАнализа. Сообразительность он сможет проявить только владея инструментами и способами работы (цикл VI, п. Общие замечания).

4. Люди тоже могут ошибаться. Умение доверять себе, своим знаниям (цикл VI, задача 3).

5. Не жалейте бумаги и **не пользуйтесь бумагой из школьных тетрадей. Позаботьтесь о стержнях для ручки** (п. Немного о дробях, важный технологический совет).

6. При переносе членов уравнения в другую часть равенства ребенок **показывает стрелочкой** что и куда переносится. **Обязательно поправляйте** ребенка, говоря: «Не с минусом, а **с противоположным** знаком», — и только потом уточняйте с каким именно (п. Немного об уравнениях, сценарий).

Замечание: непосредственно к ГРАН этот прием не имеет отношения.