Глава VII
ВЗГЛЯД НА МАТЕМАТИКУ-3, 5, 6 ГЕОМЕТРИЮ-7 И АЛГЕБРУ-7 С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГРАФАНАЛИЗА

В этой главе, читатель, мы применим ГрафАнализ к школьным задачам. Так как базовый ГрафАнализ нами освоен, то мои пояснения будут предельно кратки. Более того, там, где это возможно, я буду ограничиваться одной «Графикой» или опускать какие-то элементы решения. Это не должно вызвать никаких затруднений.

Задачи из школьных учебников математики или дидактических материалов отбирались по принципу наибольшей удаленности от базового ГрафАнализа, изложенного в главах II–V. Разумеется, не все трудности, связанные с текстовыми задачами, я охватил. Но, мне кажется, самое существенное будет отражено в этой главе. И вообще, читатель, не забывайте, что ГрафАнализ хоть и является конструктором решений, но это совершенно не означает будто мы можем бездумно и автоматически решать все задачи. Да, многое действительно делается автоматически, но это служит лишь для того, чтобы мы «не думали» там, где не надо думать, а надо пользоваться готовыми алгоритмами. И будьте готовы к тому, что далеко не всегда вы мгновенно нарисуете задачу. Порой придется немного посидеть, поэкспериментировать. А вот для этой цели ГрафАнализ подходит как нельзя лучше.

Добавлю, что бывают задачи, которые вообще не рисуются или же «Графика» слишком громоздка и неудобна. Не огорчайтесь, читатель. У каждого инструмента есть свои ограничения. В любом случае, ГрафАнализ облегчит вам жизнь (ведь не раз вам придется помогать своему ребенку) или направит ваши мысли по нужному руслу.

Для нумерации задач используются следующие обозначения: **М-3($N_М$), Д-5($N_М$), Д-6($N_М$), М-7($N_М$), Г-7($N_М$), А-7($N_М$)**, где в скобках дается номер задачи из соответствующего учебника и, как индекс, номер страницы.

3 класс — **М-3($N_М$)** «Математика-3» (см. [55]).

5 класс — **Д-5($N_М$)** «Дидактические материалы по математике для 5 класса» (см. [56].

6 класс — **Д-6($N_М$)** «Дидактические материалы по математике для 6 класса» (см. [57].

7 класс — **М-7($N_М$)** «Алгебра-7, задачник» А. Г Мордковича (см. [58]).

7 класс — **Г-7($N_М$)** «Геометрия-7» Л. С Атанасян и др. (см. [59]).

7 класс — **А-7($N_М$)** «Алгебра-7» Ш. А Алимова и др. (см. [60]).

Однако, эти обозначения используются в том случае, если в одном разделе появляется задача из другого раздела или идет на нее ссылка. В пределах же разделов: 3 класс, 5 класс, 6 класс просто указывается номер задачи из соответствующего учебного пособия.

Рядом с номером задачи дается «нотная» запись задачи, с принципами которой и обозначениями вы познакомились в главе VI. Советую обращать внимание на «нотную» запись логической структуры задачи, тогда вы привыкнете к ней и сможете пользоваться ею для себя, например, для анализа задач, содержащихся в каком-либо учебнике.

Математика-3

158_{28} $\otimes_{Б}(\bullet\bullet)\square$ (рис. 1)

В магазине за 3 дня продали 1 т сахара. В первый день продали 300 кг, во второй день в 2 раза больше, чем в первый. Сколько килограммов сахара продали в третий день?

159_{28} $(:)_{РМ}(\bullet\bullet)\square$ (рис. 2)

С трех участков собрали 2 т свеклы: с первого 1000 кг, со второго в 2 раза меньше. Сколько килограммов свеклы собрали с третьего участка?

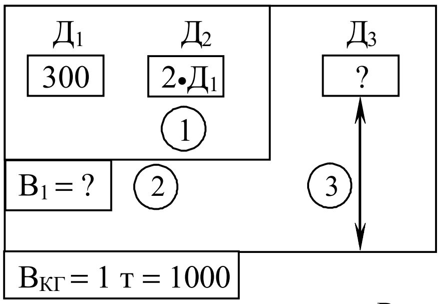


Рис. 1

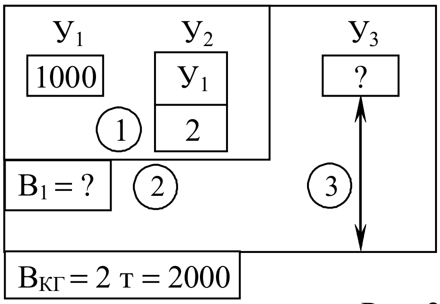


Рис. 2

Задачи 158_{28}, 159_{28} легкие, разминочные. Вариант задачи 1, цикла V, главы III, только вместо ГРАЭЛ-(> на) в промежуточной сумме использованы: ГРАЭЛ-($\otimes_{Б}$) и ГРАЭЛ-$(:)_{Р}$. Обратите внимание на перевод мер. Дети очень плохо знают единицы измерения!

$167(1)_{29}$ $\otimes\square[\otimes_{X} \rightarrow (:)_{Р}]$ (рис. 3)

В ларек привезли 10 ящиков яблок, по 9 кг в каждом, и 8 одинаковых ящиков слив. Всего привезли 170 кг этих фруктов. Найди массу ящика слив.

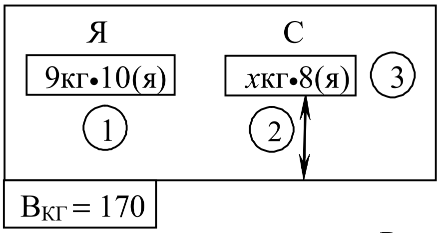


Рис. 3

1). Я = 9 кг•10 = 90 кг

2). В = Я + С

С = В – Я = 170 – 90 = 80 (кг)

3). С = xкг•8

80 кг = xкг • 8

x = 80 кг : 8 = 10 кг

«Графика» этой задачи дана в виде одной ГРАС, т. к. мы пользуемся делением в форме умножения (найти неизвестный множитель — массу ящика). Так мы будем решать задачи в 5 классе (см. «Математика-5, задача 53_{57}). И хоть в 3 классе мы не знаем деления в форме умножения, однако посмотрите «Замечание» к циклу II, главы V — о связи компонентов и результатов умножения и деления.

В 3 классе мы вынуждены рисовать «Графику» в виде двух графсхем (рис. 4).

ГРАС-1 **ГРАС-2**

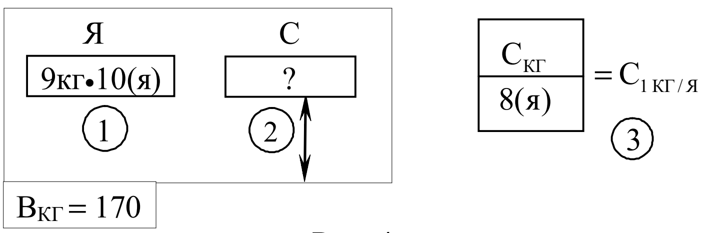


Рис. 4

1). Я = 9 кг•10 = 90 (кг)

2). В = Я + С

С = В – Я = 80 (кг)

3). $С_1$ = С : 8 = 10 (кг)

183_{32} $\square[\otimes_{Х} \to (:)_{Р}] + (:)_{С}$ (рис. 5)

Рабочий должен был изготовить за день 63 детали. После 2 ч работы ему осталось сделать 45 деталей. За сколько часов он изготовит оставшиеся детали, если выработка за час не изменится?

ГРАС-1

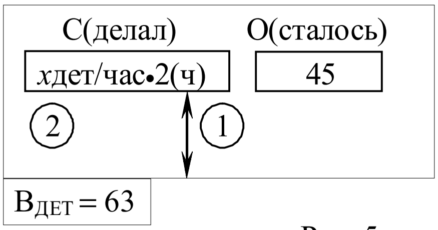


Рис. 5

1). $В = С + О$

$С = В - О = 63 - 45 = 18$(дет)

Видим — можно написать уравнение:

2). $С_{ДЕТ} = x$дет/час•2(ч)

$18_{ДЕТ} = x$дет•2(ч)

$x = 18_{ДЕТ} : 2 = 9$ (дет/час).

Только теперь можем нарисовать ГРАС-2.

ГРАС-2

$$\frac{О_{ДЕТ}}{9(\text{дет}/\text{час})} = \frac{45_{ДЕТ}}{9\text{дет}} = 5 \text{ (часов)}$$

3

Если $167(1)_{29}$ мы с легкостью освобождались от записи деления в форме умножения с неизвестным множителем, т. е. от перехода $[\otimes_{Х} \to (:)_{Р}]$, заменяя одну графсхему (рис. 3) двумя ГРАС (рис. 4), то в задаче 183_{32} это сделать сложнее. Приходится решить два действия задачи, чтобы увидеть переход к третьему. Здесь ГрафАнализ служит **вспомогательным средством анализа и рассуждений.** Кроме того, **очень важно писать «размерности»** (в самых разнообразных видах) — только тогда задача не будет восприниматься как ряд манипуляций с числами.

239_{42} **[(*)(••)](*)**

С огорода собрали 76 кг моркови, капусты на 268 кг больше, чем моркови, а картофеля на 750 кг больше, чем моркови и капусты вместе. Сколько картофеля собрали с огорода?

Задача легкая, типа задачи 5, цикла V, главы II, только на одно действие меньше.

246_{43} $(:)_{Р} + \otimes\square + (:)_{Р}$ (рис. 6)

Мастер делает 120 деталей за 8 ч. Но когда он работает со своим учеником, то столько же деталей они успевают сделать за 5 ч. Сколько деталей в час делает ученик?

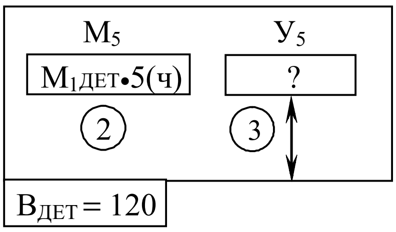
ГРАС-1

$$\frac{120_{ДЕТ}}{8(\text{час})} = М_{1\,ДЕТ/ЧАС}$$

1

из 1-го предложения $М_1$ — колич. деталей в час делает мастер

ГРАС-2



из 2-го предложения $М_5$ и $У_5$ — колич. деталей за 5 часов делают мастер и ученик

ГРАС-3

$$\frac{У_{5ДЕТ}}{5(ч)} = У_{1\,ДЕТ/Ч}$$

4

из 3-го предложения $У_1$ — колич. деталей в час делает ученик

Рис. 6

281_{48} $\{[\otimes_{Б} \to (:)_{РМ}](\bullet\bullet)\}\square$ (рис. 7)

По железной дороге надо отправить со станции 4900 т груза за три дня. В первый день отправили 1800 т, что в 2 раза больше, чем отправили во второй день. Сколько тонн груза отправили в третий день?

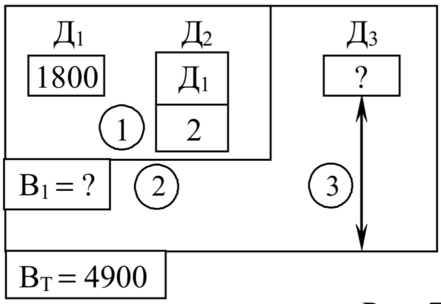


Рис. 7

Внимание.

Графсхема задачи совершенно тождественна задаче 159_{28}. Однако **«нотная запись другая»** (переход **[**$\otimes_Б$ → $(:)_{РМ}$**]**). Мы **вынуждены** заменить «Больше В» на «меньше в», т. к. первое слагаемое $Д_1$ = 1800 — **известно, и оно же связано отношением** «Больше В» со вторым слагаемым $Д_2$ («... что в 2 раза больше, чем отправили во второй день»).

299_{50} $\otimes + \otimes + \square$ (рис. 8)

В магазине было 5 мешков муки по 90 кг в каждом. Продали 90 пакетов муки по 3 кг каждый. Сколько килограммов муки осталось?

ГРАС-1 **ГРАС-2** **ГРАС-3**

Рис. 8

Эта задача легкая, и дана лишь с целью показать, как ГрафАнализ может выполнять иллюстративную, поясняющую функцию. На ГРАС-3 мы **видим глазами** то, над чем ребенок должен думать — В(сего)$_{КГ}$ = $М_5$ = 90кг•5.

$М_5$ — масса 5 мешков

$П_{90}$ — масса 90 пакетов

В = $М_5$ — **вся** мука была в 5 мешках

345_{58} **(••)(=)**$\square$ (рис. 9)

В двух бидонах было молока поровну. Когда из первого бидона продали 25 л, в нем осталось 11 л молока. Сколько литров продали из второго бидона, если в нем осталось 6 л молока?

Вспомогательный рисунок

25л	11	=	*х*л	6

Имеет смысл в подобного рода задачах (несмотря на их простоту) нарисовать вспомогательный рисунок и лишь затем «Графику».

ГРАС-1 **ГРАС-2**

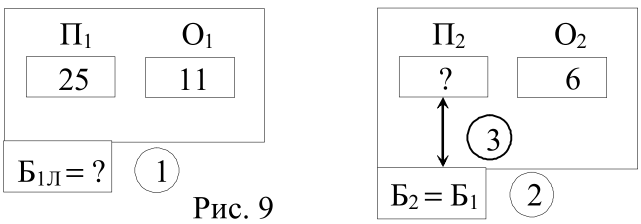


Рис. 9

1). $Б_1 = П_1 + О_1$ = 25+11 = 36

2). $Б_2 = Б_1$ = 36

3). $Б_2 = П_2 + О_2$

$П_2 = Б_2 – О_2$ = 36 – 6 = 30 (л)

(2-е действие — ключевое слово: поровну, **т. е. равенство**)

346_{58} $\square$**[**$\otimes_X$ → **(:)**$_С$**]** (или $\square$ **+ (:)**$_С$) (рис. 10)

В швейной мастерской было 240 м ситца. Когда сшили несколько платьев, расходуя на каждое по 3 м, то в мастерской осталось 90 м ситца. Сколько платьев сшили?

Все же, еще раз приведу задачу, в которой используется **в процессе решения** переход $[\otimes_X \to (:)_C]$.

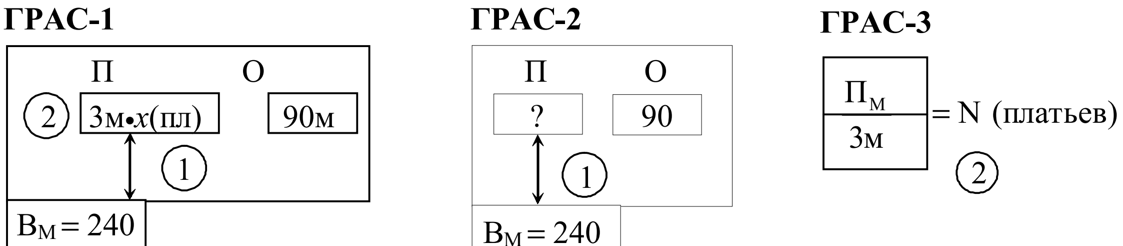


Рис. 10

ГРАС-1 записана с текста задачи, в котором деление дается в форме умножения с неизвестным множителем (т. е. используется определение деления — п. «Немного о делении», глава V): «… **несколько** платьев, расходуя **на каждое по** 3 м». Видим, **несколько** платьев — **это *x*** (платьев); **на каждое по** — действие **умножения**.

Поскольку такие задачи часты, то возможно, имеет смысл (**как пояснение**) рисовать ГРАС-1, а затем — уже как решение — ГРАС-2 и ГРАС-3.

641_{116} $\otimes_Б$ + [⊗ ⊗](••) (рис. 11)

Для озеленения поселка купили саженцы: 200 кленов и 300 лип. Клен стоит 360 р., липа вдвое дороже. Сколько уплатили за все саженцы?

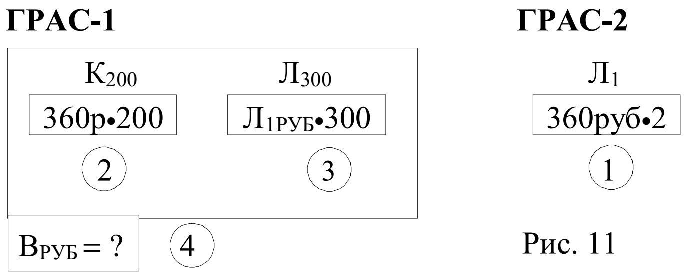


Рис. 11

ГрафАнализ — как иллюстрация.

642_{116} ⊗ + (=) + $[\otimes_X \to (:)_C]$ (рис. 12)

В парке посадили 5 рядов кленов, по 16 штук в каждом ряду, и столько же лип, но по 20 штук в ряду. Сколько рядов лип посадили?

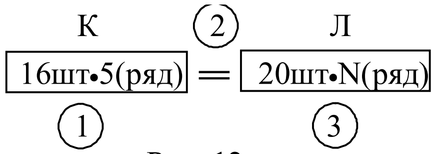


Рис. 12

1). К = 16•5 = 80 (шт)
2). Л = К = 80 (шт)
3). N = 80 : 20 = 4 (ряда)

Чтобы не ошибаться — все время пишем «размерности».

Если третье действие записать в виде умножения, то будем иметь Л = 20•N и, подставляя Л = 80 (шт), 80 = 20•N и N = 80 : 20.

$645(2)_{117}$ (••) + $(:)_Р$ + ⊗ + ⊗ (рис. 13)

Детям купили игрушки: Оле 6 одинаковых стульев, а Кате 4 таких же стула. Все стулья стоили 5000 р. Сколько стоят 6 стульев, купленных Оле, и сколько стоят 4 стула, купленных Кате?

Задача интересна тем, что в ней используются четыре графсхемы, причем в виде ГРАЭЛов. Но гораздо более важным является то, что только «размерности» делают задачу прозрачной, а решение безошибочным.

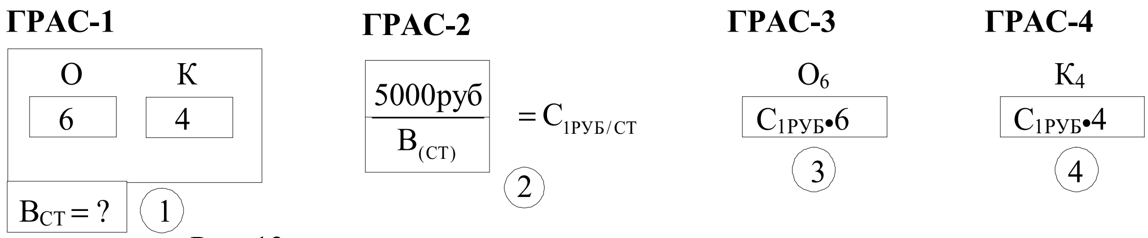


Рис. 13

О, К — количество **стульев** у Оли, Кати

$С_1$ — количество **рублей за один** стул

$О_6$, $К_4$ — количество **рублей** за 6 и 4 стула по отдельности

661(1)$_{119}$ **(:)$_С$ + (:)$_С$** (рис. 14)

Две девочки покупали одинаковые ленты. Одна уплатила за свою покупку 90 р., другая уплатила 60 р. Сколько метров ленты купила каждая девочка, если цена 1 м ленты 30 р.?

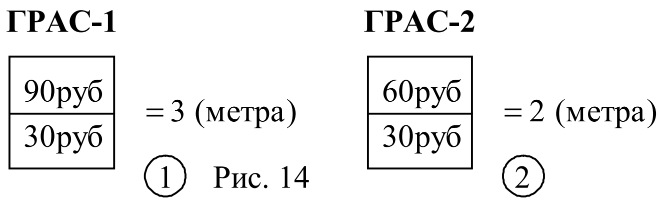


Рис. 14

661(2)$_{119}$ **(••) + (:)$_Р$ + (:)$_С$ +** ▭ (или **(:)$_С$**) (рис. 15)

Две девочки купили 5 м ленты по одинаковой цене. Одна из них уплатила 90 р., другая 60 р. Сколько метров ленты купила каждая девочка?

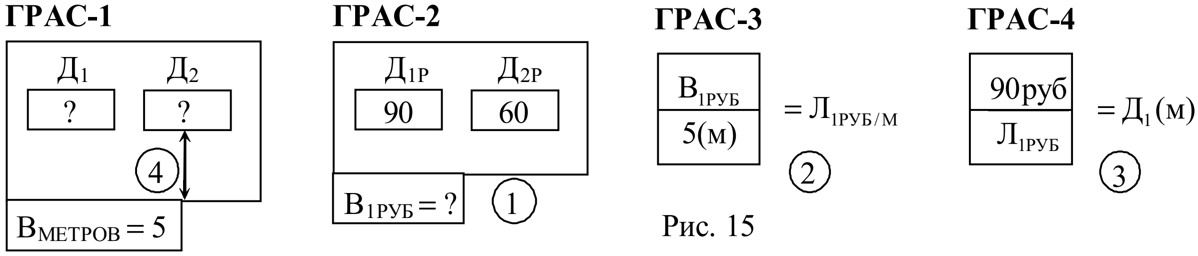


Рис. 15

Как видите, читатель, **внешне** очень **схожие** задачи (в смысле текста) **графически резко различаются**. Ребенок **зримо видит это различие**, в то время, как попытка арифметического решения полностью лишена подобной наглядности.

4-е действие можно было б реализовать подобно 3-му как (ГРАЭЛ-(:)$_С$, т. е. $Д_2 = 60 : Л_1$. Но зачем пользоваться более сложным действием деления, если у нас есть более простое — вычитание. А если б числа были дробные — тоже делили б?!

Последовательность графсхем — по тексту, а расстановка действий — из логики задач.

Приведу еще пару подобных задач: **схожие** условия — **по текстовому воплощению**, но **разные логические схемы**, что отчетливо **видно в «нотной» записи**. В ви́дении и различении этих графсхем **большую роль играет «размерность»**.

682(1)$_{123}$ **(••) + (:)$_Р$ + ⊗ + ⊗** (рис. 16)

На оклейку двух комнат пошло 108 м обоев. На одну комнату пошло 4 рулона обоев одинаковой длины, на другую 5 таких же рулонов. Сколько метров обоев пошло на каждую комнату?

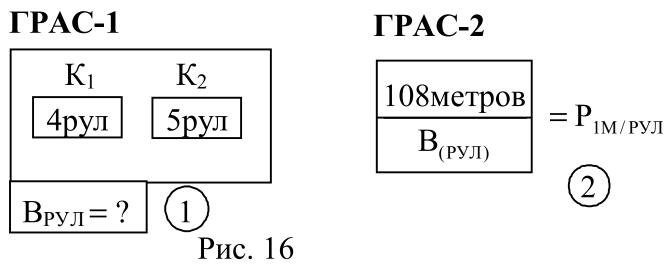


Рис. 16

$682(2)_{123}$ (••) + $(:)_Р$ + $(:)_С$ + $(:)_С$ (или □ — как в задаче $661(2)_{119}$) (рис. 17)

На оклейку двух комнат пошло 9 рулонов обоев одинаковой длины. На одну комнату пошло 48 м обоев, на другую 60 м. Сколько рулонов обоев пошло на каждую комнату?

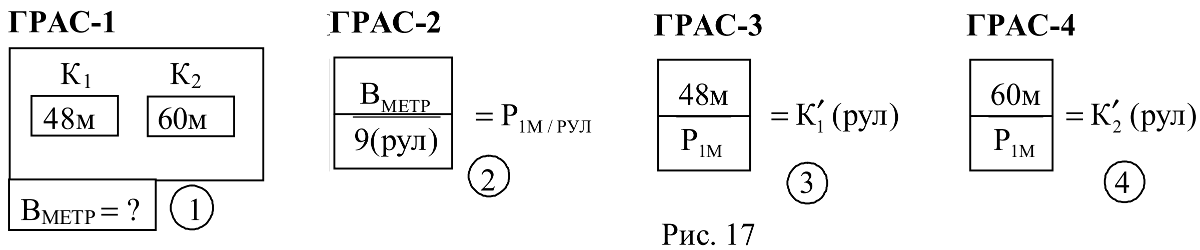


Рис. 17

Кроме «размерности», **обратите внимание** на имена слагаемых в ГРАС-3, 4 в обеих задачах $682(1–2)_{123}$: $К'_1$, $К'_2$, а не $К_1$, $К_2$. **Различие в именах** тоже **связано** с «**размерностями**». Например, в задаче 681(2) «**размерность**» $К_1$ и $К_2$ — [**метры**] (количество метров на каждую комнату), а «**размерность**» $К'_1$ и $К'_2$ [**рулоны**]. Поэтому имена разные. Аналогично — задача $661(2)_{119}$.

$699(2)_{126}$ $(:)_{РМ}[\otimes_Б \to (:)_{РМ}](*)$ (рис. 18–19)

В парке росли березы, дубы, клены и липы. Берез было 1260 штук. Дубов в 4 раза меньше, чем берез. На каждые 3 березы приходился 1 клен. Лип было на 80 штук больше, чем кленов. Объясни, что узнаешь, выполнив действия:

1) 1260 : 4; 2) 1260 : 3; 3) 1260 : 3 + 80;

4) 1260 – 1260 : 4; 5) 1260 + 1260 : 3.

В этой задаче ГрафАнализ помогает **легко** разобраться с логикой задачи и **содержательно интерпретировать арифметические действия** (рис. 18).

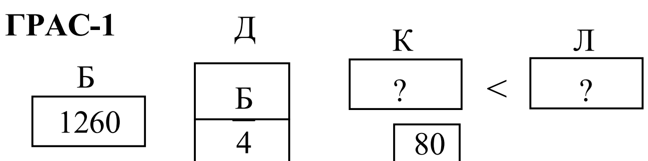


Рис. 18

3 березы — 1 клен означает, что **Б**(ерез) **в 3 раза больше**, чем **К**(ленов). Переводим «Больше В» в «меньше в», как в задаче 281. То есть пишем: Б ③ > К, ⇒ Б = 3•К ⇒ К = Б : 3 (так как берез **в 3 раза <u>больше</u>, то кленов — в 3 раза <u>меньше</u>**).

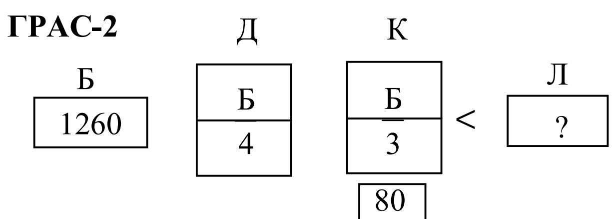


Рис. 19

Теперь можем уточнить ГРАС-1, состоящую из 2-х ГРАЭЛов: деления на равные части в виде «меньше в» и «Больше НА» — в «нотной» записи: $(:)_{РМ}$ и (*) и нарисовать ГРАС-2 (рис. 19), состоящую из 3-х ГРАЭЛов (добавляется еще $(:)_{РМ}$).

Интерпретация действий предельно наглядна, если перевести «Арифметику», данную в задаче, В «Алгебру». Смотрим на ГРАС-2 и считываем в буквах:

1) 1260 : 4 = Б : 4 = Д — сколько в парке дубов?
2) 1260 : 3 = Б : 3 = К — сколько в парке кленов?
3) 1260 : 3 + 80 = Б : 3 + 80 = К + 80 = Л — сколько в парке лип?
4) 1260 – 1260 : 4 = Б – Б : 4 = Б – Д — **на сколько** больше берез, чем дубов?
5) 1260 + 1260 : 3 = Б + Б : 3 = Б + К — сколько всего берез и кленов?

Последние задачи, которые мы с вами рассмотрим — это задачи, называемые Н. С. Поповой «… на нахождение неизвестного по разности двух чисел» [14, с. 125].

$742(1)_{138}$ («=»)$(:)_Р$ (рис. 20)

В первом куске ткани на 4 м больше, чем во втором, и он стоит на 24 р. больше, чем второй. Сколько стоит 1 м ткани?

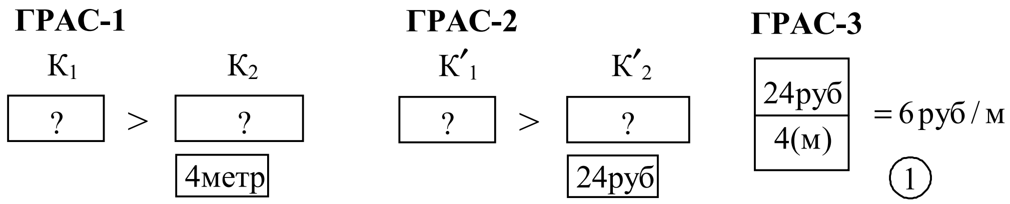


Рис. 20

$К_1$, $К_2$ — количество **метров** ткани в каждом куске.

$К'_1$, $К'_2$ — сколько **рублей** стоит каждый кусок (**количество рублей** в каждом куске).

Поскольку «размерность» величин разная (**одни и те же куски** ткани **измеряются и в метрах, и в рублях**) — [метры] и [рубли], то и **разные имена** <u>**для одних и тех же кусков**</u> **ткани,** <u>**но разных слагаемых**</u>**!**

Видим, что **4 метра** ткани стоят **24 рубля**, т. к. один кусок **больше** второго **на 4 метра** и он же — **дороже** второго **на 24 рубля**. Один и тот же ГРАЭЛ-(Больше НА) для метров и рублей. Ну а зная, сколько стоят 4 метра, можем легко узнать стоимость 1 метра — ГРАЭЛ-$(:)_Р$ (см. ГРАС-3). «Нотный» знак **«=»** — как соответствие:4м — 24 руб.

743_{139} $(*)_Б$(«=»)$(:)_Р$⊗ (рис. 21–22)

В один ларек привезли 15 ящиков с фруктами, в другой 10 таких ящиков. В первый ларек привезено фруктов на 60 кг больше, чем во второй. Сколько килограммов фруктов привезено во второй ларек?

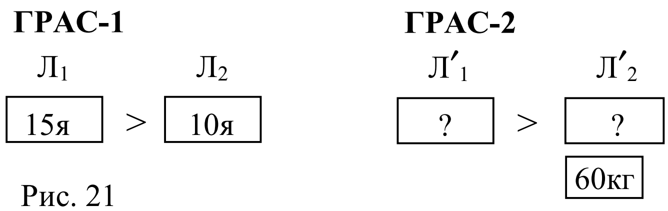


Рис. 21

Видим, что ГРАС-1 надо нарисовать в виде «Больше НА» — и задача будет совершенно такой же, как предыдущая (рис. 22).

Из ГРАС-3, 4 **видим**: 60 кг соответствуют 5-и ящикам (60 кг **распределены** по 5 ящикам поровну). Рисуем ГРАС-5 и находим содержимое одного ящика. Рисуем ГРАС-6 и находим, сколько фруктов привезли во второй ларек.

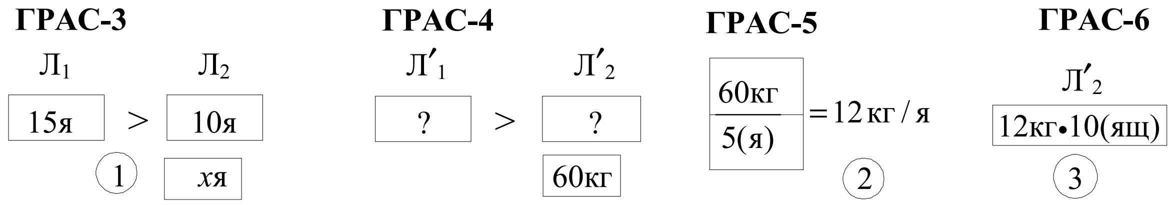


Рис. 22

Надеюсь, читатель, очевидно то, что ГРАС-5, 6 я нарисовал чисто в иллюстративных целях. Они нам нужны только как быстрое пояснение ребенку, если он все-таки не сможет сразу от ГРАС-3, 4 перейти к арифметическим действиям, но, в общем-то, уже излишни.

Внимание.

Я сказал: «Из ГРАС-3, 4 видим: 60 кг соответствуют 5-и ящикам» — и еще то, что ГРАС-5, 6 «в общем-то, уже излишни». Да, видим, если умеем считать и не боимся ошибиться. Но оформление **арифметического** решения состоит из трех действий:

1). 15 – 10 = 5 (ящ.)

2). 60 : 5 = 12 (кг)

3). 12•10 = 120 (кг).

Не трудно ли вам, читатель, от наглядной «Графики» вот так вот, сразу, к безликой «Арифметике», несмотря на всю простоту задачи. Согласитесь, после «Графики» **ощущение неуюта, некомфортности** — хоть на несколько секунд. А каково же ребенку!

Может, все же, имеет смысл разрисовать все 6 графсхем и написать стандартную «Алгебру», считанную с «Графики»:

1). $Л_1 = Л_2 + x$

$x = Л_1 - Л_2 = 15 - 10 = 5$ (ящ.)

2). 60 : 5 = 12 (кг)

3). $Л'_2 = 12 \bullet 10 = 120$ (кг).

747_{139} **$(\bullet)_М$(«=»)$(:)_Р$⊗⊗** (рис. 23)

На одном тракторе работали в течение недели 60 ч, на другом 55 ч. На втором тракторе при одинаковой норме израсходовали за неделю горючего на 35 л меньше, чем на первом. Сколько литров горючего израсходовали за неделю на каждом тракторе?

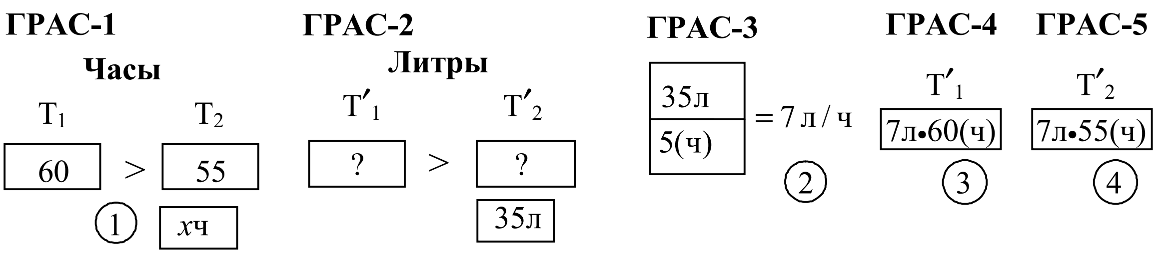


Рис. 23

Отличие от задачи 743_{139} состоит в том, что мы не стали рисовать рисунок, подобный рис. 21, а сразу нарисовали в виде «Больше НА» ГРАС-1. Добавилось одно действие — ГРАС-5.

Кажется, читатель, я вас убедил в том, что «Графику» надо рисовать всегда?

Однако… Ну разумеется, нет в этом мире ничего абсолютного. Дети разные, да и один и тот же ребенок не тождествен самому себе в разные моменты времени. Он растет, он развивается.

Поэтому, совершенно не исключен и такой вариант — рисуются только ГРАС-1, 2. Затем — рассуждают:

• **Видим**, $x = 60 - 55 = 5$ (часов), значит, 35 **литров** соответствуют 5-и **часам**.

• Можем найти сколько литров «содержится» в одном часе:

35 л : 5 (ч) = 7 литров/в час.

• Теперь — умножение:

T'_1 = 7 л•60 (ч) = 420 л,

T'_2 = 7 л•55 (ч) = 385 л.

Все, что написано, включая «размерности» — это решение «с пояснениями», т. е. что следует произносить (в той или иной форме) либо вам, читатель, при объяснении, либо ребенку, чтобы вы убедились, что он действительно работает осознанно, а не механически.

Еще и еще раз напоминаю, что наша цель — решить задачу (**с полным пониманием своих действий!**), а отнюдь не просто нарисовать ее. ГрафАнализ **не всегда** проще или быстрее арифметического решения (правда, это бывает редко, и ГрафАнализ **всегда надежнее**). Есть задачи, которые **просто не рисуются** или рисуются крайне сложно (тоже редко).

Вы, читатель, должны стремиться научить ребенка **разумно пользоваться** инструментарием ГрафАнализа — как средством выявления логической структуры задачи. И ни в коем случае у ребенка не должна возникать иллюзия, что теперь он все нарисует «автоматом».

Нет, он должен научиться размышлять, а не рисовать!

Замечание.

Обозначения со «штрихом» (например, $\mathbf{T'_1}$, ГРАС-4; произносится: «тэ-один штрих»), конечно, могут быть и другими. Например, $\mathbf{T_{1Л}}$, что будет подчеркивать «размерность» — [литры] (ср. задача $661(2)_{119}$, рис. 15: $\mathbf{Д_1}$, $\mathbf{Д_2}$ — [метры] и $\mathbf{Д_{1Р}}$, $\mathbf{Д_{2Р}}$ — [рубли]).

Ответы: 158) $Д_3$ = 100 кг; 159) $У_3$ = 500 кг; 167(1)) $С_1$ = 10 кг; 183) 5 ч.; 239) $К_{АРТ}$ = 1170 кг; 246) $У_1$ = 9 дет.; 281) $Д_3$ = 2200 т; 299) О = 180 кг; 345) $П_2$ = 30 л; 346) N = 50 платьев; 641) В = 288000 руб.; 642) N = 4 ряда; 645(2)) $О_6$ = 3000 руб., $К_4$ = 2000 руб.; 661(1)) 3 м, 2 м; 661(2)) $Д_1$ = 3 м, $Д_2$ = 2 м; 682(1)) $К'_1$ = 48 м, $К'_2$ = 60 м; 682(2)) $К'_1$ = 4 рул., $К'_2$ = 5 рул.; 699(2)) Д = 315 шт., К = 420 шт.; Л = 500 шт., Б >Д на 945 шт., Б + К = 1620 шт.; 742(1)) 6 руб., 743) $Л'_2$ = 120 кг, 747) $Т'_1$ = 420 л, $Т'_2$ = 385 л.

Математика-5

В Математике-5 я не рассматриваю, как и в Математике-3, 6, задачи «на движение» и задачи, имеющие геометрическое содержание, т. е. на применение формул периметра и площади прямоугольника. Графически эти задачи иллюстрируются другими способами, более подходящими к содержательной сущности задач.

Имена слагаемых, как правило, очевидны и поясняются не всегда

53_{57} **⊗□[$\otimes_Х \rightarrow (:)_Р$]** (рис. 24)

Для работников завода было построено 17 одинаковых пятиэтажных домов и 11 одинаковых восьмиэтажных домов. В этих домах было всего 2416 квартир. Сколько квартир в одном пятиэтажном доме, если в одном восьмиэтажном доме 96 квартир? Составьте выражение и найдите его значение.

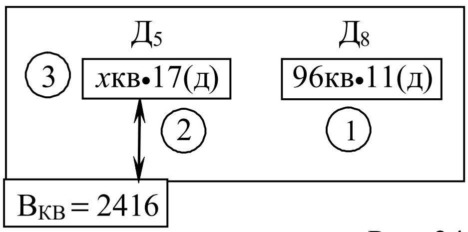


Рис. 24

1). $Д_8 = 96\,кв \cdot 11 = 1056\,кв$

2). $В = Д_5 + Д_8$

$Д_5 = В - Д_8 = 1360\ (кв)$

3). $Д_5 = x\,кв \cdot 17$

$x = \dfrac{Д_5 кв}{17(д)} = 80\,кв$

$Д_5$ — всего квартир в пятиэтажных домах

$Д_8$ — всего квартир в восьмиэтажных домах

Сравните с задачей М-3-167(1)$_{29}$, она совершенно тождественна с нашей. Но если в 3 классе мы вынуждены были разбивать «Графику» задачи на 2 графсхемы, то сейчас, пользуясь тем, что мы знаем, что «деление — это умножение», можем ограничиться рис. 24. Кроме того, еще раз обращаю внимание на запись «размерностей». То, что я их пишу по разному, в разных формах — то в скобках, то без скобок, то сокращенно, то полностью, причем, зачастую, в пределах одной задачи — это вовсе не небрежность. Я показываю **разнообразные варианты пояснений** задачи с помощью «размерностей». Все подобные варианты, само собой, нам не нужны единомоментно, но и вы, читатель, не должны забывать, что ГрафАнализ — всего лишь средство решения задачи, и мы должны по максимуму извлечь из него все, что помогает осмыслению задачи ребенком. Никакой особой строгости не следует придерживаться, а вот пользоваться — по максимуму — наглядностью безусловно нужно!

93_{60} **[$(:)_{РМ} \rightarrow \otimes_Б$] + ⊗⊗(••)** (рис. 25)

В овощехранилище привезли яблоки в ящиках и контейнерах. В одном ящике 6 кг яблок, что в 7 раз меньше всех яблок в одном контейнере. Сколько килограммов яблок привезли в 120 ящиках и 80 контейнерах?

Вспомогательный рисунок для записи «меньше в». Поскольку $Я_1$ — и число, и связано отношением с $К_1$, то переводим «меньше в» в «Больше В» — ГРАС-2.

ГРАС-1

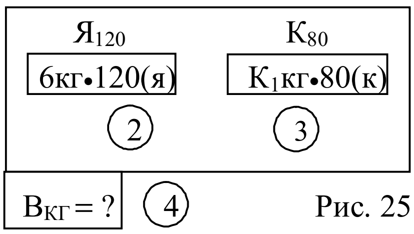
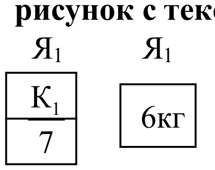
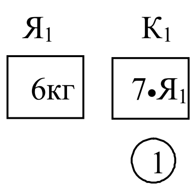


Рис. 25

Вспомогательный рисунок с текста



ГРАС-2



Содержимое слагаемого в 3-м действии $К_{80} = К_1 \cdot 80$ лучше (из соображений единообразия) записать не через букву x, как в предыдущей задаче, а через $К_1$.

$Я_1$ — содержимое одного ящика [кг/1 ящик]

$К_1$ — содержимое одного контейнера [кг/1 контейнер]

$Я_{120}$ — всего в 120 ящиках [кг]
$К_{80}$ — всего в 80 контейнерах [кг]
99_{60} $(:)_{РМ}[\otimes_Б \to (:)_{РМ}]$ (рис. 26–27)

Первая деталь обрабатывается на станке в 4 раза быстрее, чем вторая, а третья деталь обрабатывается в 5 раз медленнее, чем вторая. Сколько времени обрабатывается первая деталь, если на обработку третьей детали уходит 80 мин?

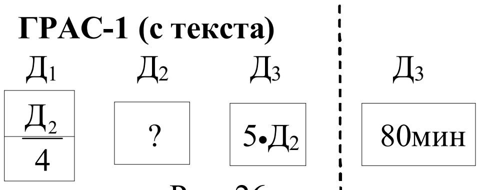


Рис. 26

$Д_1$ — **быстрее** в 4 раза ⇔ **меньше** в 4 раза
$Д_3$ — **медленнее** в 5 раз ⇔ **больше** в 5 раз
$Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ — время на обработку 1-й, 2-й и 3-й деталей соответственно

Если в задаче 93 мы вынуждены были превести «меньше в несколько раз» в «больше в несколько раз» (т. е. $[(:)_{РМ} \to \otimes_Б]$), то здесь наоборот нам приходится (**чтобы нарисовать задачу!**) перевести «больше в несколько раз» в «меньше в несколько раз». ГРАС-1 (с текста) — вспомогательная, решением будет являться ГРАС-2 (рис. 27).

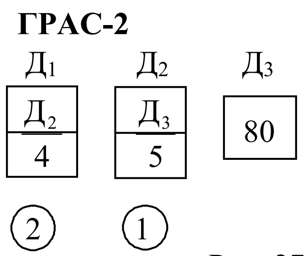


Рис. 27

1) $Д_2 = \frac{Д_3}{5} = \frac{80}{5} = 16$

2) $Д_1 = \frac{Д_2}{4} = \frac{16}{4} = 4\,(\text{мин})$

103_{60} $[\otimes_Б \to (:)_{РМ}](:)_{РМ}$ (рис. 28)

Бочка вмещает воды в 11 раз больше, чем 3 одинаковых ведра. Сколько литров вмещает ведро, если бочка вмещает 297 л?

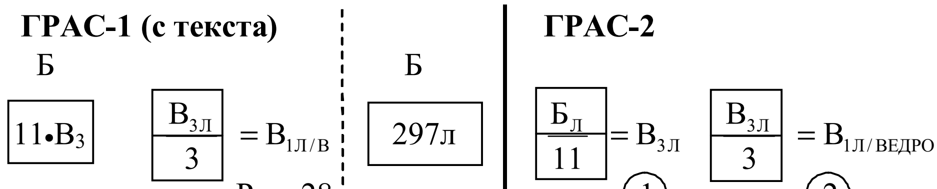


Рис. 28

В 11 раз **больше** на ГРАС-1 переводим в 11 раз **меньше** на ГРАС-2.
$В_3$ — объем 3 ведер [л]
$В_1$ — объем 1 ведра [л]
Б — объем бочки [л]
119_{61} $\square[\otimes_Х \to (:)_С]$ (рис. 29)

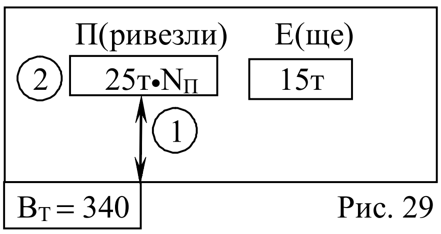


Рис. 29

1). $В = П + Е$
$П = В - Е = 340 - 15 = 325$ (т)
2). $П_{ТЕТР} = N_{ПАЧ} \cdot 25$тетр
$N_П = П : 25 = 325 : 25 = 13$ (пачек)

В киоск привезли несколько пачек тетрадей, по 25 тетрадей в каждой, и еще 15 тетрадей. Всего привезли 340 тетрадей. Сколько полных пачек тетрадей привезли в киоск?

143_{63} (••) + $(:)_Р$ (рис. 30)

Составьте выражение для решения задачи: «Один станок-автомат работал 8 ч, изготовляя по *a* деталей в час, а другой станок-автомат работал 12 ч, изготовляя по *b* деталей в час. Все эти изделия упаковали поровну в 17 ящиков. Сколько деталей упаковали в каждый ящик?

ГРАС-1

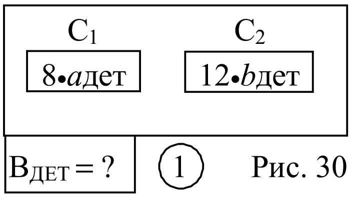
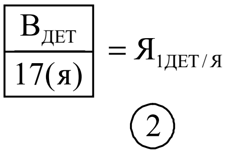


Рис. 30

ГРАС-2



1). $В = С_1 + С_2 = 8a + 12b$

2). $Я_1 = В : 17 = (8a + 12b) : 17$

Выражение: $(8a + 12b) : 17$

Если б нужно было считать, т. е. если бы *a* и *b* были заданы как числа, то действий было бы четыре, а «нотная запись» [⊗⊗](••) + $(:)_Р$. ГРАН как вспомогательный.

336_{75} П ($[(:)_{РМ} \to ⊗_Б](••)_{ПОД}(:)_Р$) (рис. 31)

Требовалось отремонтировать 28,5 км дороги. В первый день отремонтировали в 6,5 раза меньше, чем осталось. Сколько километров дороги осталось отремонтировать после первого дня работы?

ГРАС-1

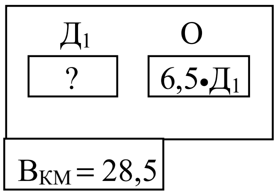


Рис. 31

$В = Д_1 + О = Д_1 + 6{,}5•Д_1 = 7{,}5•Д_1$

Или в виде числового уравнения

$28{,}5 = 7{,}5•Д_1$

$Д_1 = 28{,}5 : 7{,}5 = 3{,}8$ (км)

$В = Д_1 + О$

$О = В – Д_1 = 28{,}5 – 3{,}8 = 24{,}7$ (км)

Замечание.

В таком варианте (**с приведением подобных**) расстановка действий в классическом арифметическом смысле едва ли возможна, да и вряд ли имеет смысл.

«Нотная запись» практически невозможна — следует ограничиться буквой **П** (в круглых скобках видно, как неудобна «нотная запись» в этом случае). **Это одно из ограничений ГРАН**.

Мы имеем как раз тот случай, когда ГрафАнализ служит только вспомогательным средством, только средством анализа задачи «в чистом виде». В конечном итоге, это и является основным способом работы с ГрафАнализом (см. также задачи Д-6(152_{69}) и Д-6(154_{69})).

Ответы: 53) 80 кв.; 93) В = 4080 кг; 99) $Д_1$ = 4 мин; 103) $В_1$ = 9 л; 119) $N_П$ = 13 пачек; 143) (8*a* + 12*b*) : 17; 336) О = 24,7 км.

Математика-6

76_{63} **[(•)(••)]** ▭ (рис. 32–33)

Периметр треугольника MNK равен $\frac{39}{40}$ м, $MN = \frac{9}{20}$ м, NK меньше MN на $\frac{3}{20}$ м. Найдите MK?

Вспомогательный рисунок

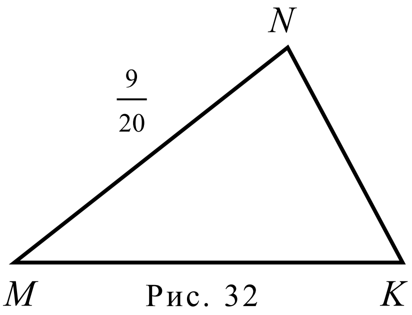


Рис. 32

$MN > NK$ на $\frac{3}{20}$

$MK = ?$

Сначала рисуем **вспомогательный рисунок** (рис. 32). Все данные — на рисунок или «на бумагу», т. е. отношение $MN > NK$ на $\frac{3}{20}$ — **выписываем в форме неравенства**, чтобы не ошибиться, естественно, превратив «меньше на» в «больше на». **Теперь — все перед глазами**. Осознав, что задача **не геометрическая** (не требуется формула периметра), а арифметическая, переходим к ГРАН (рис. 33).

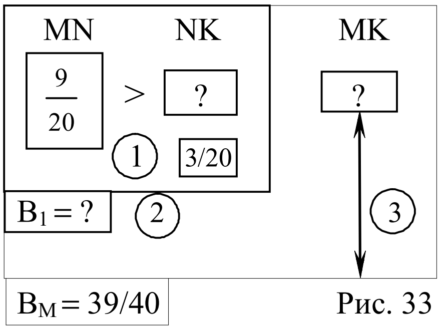


Рис. 33

1) $MN = NK + \frac{3}{20}$

$NK = MN - \frac{3}{20} = \frac{9}{20} - \frac{3}{20} = \frac{6}{20}$

2) $B_1 = MN + NK = \frac{9}{20} + \frac{6}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

3) $B = B_1 + MK$

$MK = B - B_1 = \frac{39}{40} - \frac{3}{4} = \frac{39-30}{40} = \frac{9}{40}$

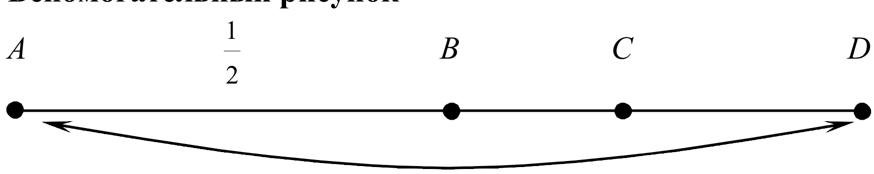
Эта задача — полный аналог задачи 2, цикла V, главы III. Отличие — натуральные числа заменены дробями.

В 1-м действии я **не сократил**, т. к. **видно**, что будут складываться дроби со знаменателем, равным 20, во 2-м действии.

79_{63} **{[(•)(••)](•)}(••)** (рис. 34–35)

На отрезке AD отмечены точки B и C так, что точка B лежит между точками A и C. Известно, что BC меньше AB на $\frac{3}{10}$ м, $AB = \frac{1}{2}$ м, а CD меньше AC на $\frac{27}{40}$ м. Найдите длину отрезка AD.

Вспомогательный рисунок



AD = ?

Рис. 34

AB > BC на $\frac{3}{10}$ («меньше на» перевели в «больше на»)

AC > CD на $\frac{27}{40}$ («меньше на» перевели в «больше на»)

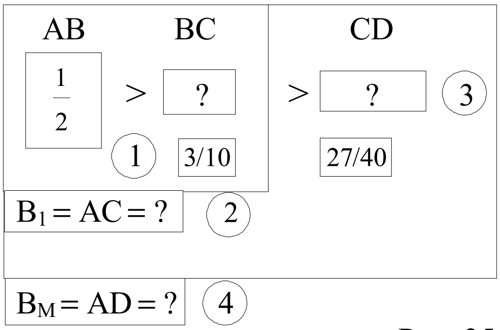


Рис. 35

1) $AB = BC + \frac{3}{10}$

$BC = AB - \frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{5-3}{10} = \frac{2}{10}$

2) $AC = AB + BC = \frac{1}{2} + \frac{2}{10} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$

3) $AC = CD + \frac{27}{40}$

$CD = AC - \frac{27}{40} = \frac{7}{10} - \frac{27}{40} = \frac{28-27}{40} = \frac{1}{40}$

4) $AD = AC + CD = \frac{7}{10} + \frac{1}{40} = \frac{28+1}{40} = \frac{29}{40}$

В 1-м действии я **не сократил**, т. к. **видно**, что нужно будет приводить дроби к знаменателю, равному 10, во 2-м действии.

Задача очень близка к задачам 1, 2 цикла VI, главы III (только не в натуральных числах).

Обратите внимание, что в отличие от задачи 76_{63}, в которой я пользовался и обозначениями условия, и обозначениями ГРАН (В и $В_1$ — для сумм), в этой задаче мы в «Графике» избавляемся от арифметических обозначений и работаем в обозначениях условия. **Но все переобозначения — перед глазами!**

116_{66} $\otimes_D$□ + (=) + $\otimes_D$□ (рис. 36)

От ленты длиной 27 м сначала отрезали 0,7 ее длины, а потом $\frac{2}{9}$ остатка. Сколько метров ленты осталось после этого?

ГРАС-1 **ГРАС-2**

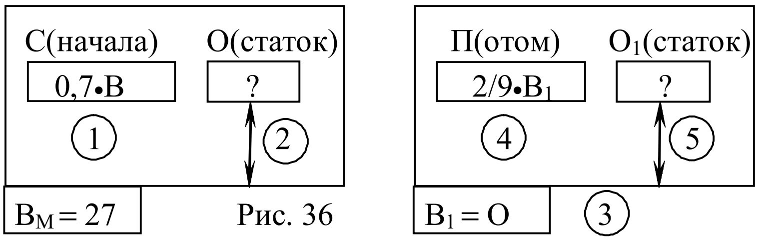


Рис. 36

Видим, что «Графику» удобно рисовать в виде двух графсхем ГРАС-1 и ГРАС-2 (рис. 36).

Теперь, решение:

1). $С = 0{,}7 \cdot В = 0{,}7 \cdot 27 = 18{,}9$

2). $В = С + О$

$О = В - С = 27 - 18{,}9 = 8{,}1$

3). $В_1 = О = 8{,}1$

4). $П = \frac{2}{9} \cdot В_1 = \frac{2}{9} \cdot 8\frac{1}{10} = \frac{2}{9} \cdot \frac{81}{10} = \frac{18}{10} = 1{,}8$

5). $В_1 = П + О_1$

$О_1 = В_1 - П = 8{,}1 - 1{,}8 = 6{,}3$

Замечание.

Имена слагаемых в «Графике» полностью копируем с текста — так нагляднее.

Задача получилась в 5 действий из-за 3-го действия — ГРАЭЛ-(=). Все преследует одну цель: не ошибиться и четко, алгоритмически — а значит без излишнего напряжения! — представлять и осуществлять свои действия. Как видите, читатель, задача очень простая.

В 4-м действии 2 и 10 при умножении **не сократил**, т. к. **видно** (**должно быть видно, если умеем хорошо считать!**), что в 5-м действии потребуется перевод обыкновенной дроби в десятичную (кроме того, в десятичных дробях, в общем-то, считать легче).

117_{66} $\otimes_{D\%}\square + (=) + \otimes_{D}\square$

За три дня вспахали 192 га земли. В первый день вспахали 62,5% этой площади, во второй день $\frac{2}{3}$ оставшейся площади. Сколько гектаров земли вспахали в третий день?

Задача отличается от предыдущей только тем, что нужно проценты перевести в дробь: 62,5% = 0,625. Я приведу только «Алгебру», ради иных имен слагаемых.

В ГРАС-1 вместо **С**(начала) будет **$Д_1$**, **О**(статок) — **$Д_{23}$**. В ГРАС-2 вместо **П**(отом) — **$Д_2$**, **$О_1$**(статок) — **$Д_3$** и **$В_1$ = $Д_{23}$**.

1). $Д_1 = 0{,}625 \cdot В$
2). $В = Д_1 + Д_{23}$
$Д_{23} = В - Д_1$
3). $В_1 = Д_{23}$
4). $Д_2 = \frac{2}{3} \cdot В_1$
5). $В_1 = Д_2 + Д_3$
$Д_3 = В_1 - Д_2$

121_{67} $\otimes_{D}\square + (=) + \otimes_{D}\square$

Сначала Витя прочитал 60% всей книги, а потом 40% остатка. Сколько процентов книги осталось прочитать Вите?

В этой задаче интересно лишь то, что «**размерностью**» являются **проценты**. Так как обозначения совпадают с обозначениями задачи 116, то я ограничиваюсь «Алгеброй» и «Арифметикой».

1). $С = 0{,}6 \cdot В = 0{,}6 \cdot 100\% = 60\%$
2). $В = С + О$
$О = В - С = 100\% - 60\% = 40\%$
3). $В_1 = О = 40\%$
4). $П = 0{,}4 \cdot В_1 = 0{,}4 \cdot 40\% = 16\%$
5). $В_1 = П + О_1$
$О_1 = В_1 - П = 40\% - 16\% = 24\%$

Замечание.

Содержимое **В**(сего) = 100%.

Для наглядности — везде писать в «Арифметике» **знак процентов (%)**.

В 4-м действии мы берем 40% от 40% (результат 3-го действия). Это, как правило, служит источником ошибок. Именно поэтому везде пишем знак процентов, т. е. 0,4•40%.

140_{68} $\{[\otimes_Б \to (:)_{РМ}][(:)_{РМ} \to \otimes_Б]\}(\bullet\bullet\bullet)$ (рис. 37)

Мост состоит из трех пролетов. Длина первого пролета 12 м, что в $1\frac{5}{7}$ раза больше длины второго пролета и в $1\frac{7}{12}$ раза меньше третьего. Найдите длину моста.

Задача интересна построением условия (правда, нам уже знакомым). Так как длина первого пролета $П_1$ известна и именно она сравнивается с длинами второго $П_2$ и третьего $П_3$ пролетов, то переводим «больше в» в «меньше в» для $П_2$ и «меньше в» в «больше в» для $П_3$.

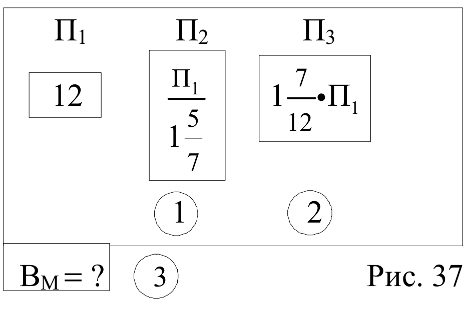


Рис. 37

152$_{69}$ **П** (Рис. 38)

В первый день путешествия туристы преодолели 7% пути. После этого им осталось пройти и проплыть 176,7 км. Каков путь туристов?

К задачам 152, 154 в полной мере относится «Замечание» к задаче Д-5(336_{75}) из «Математики-5» **о подобных** (здесь нумерация не тождественна расстановке действий).

В данном случае — с подобными — ГрафАнализ служит средством анализа задач, а не конструктором решений.

Графика

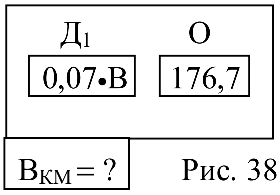


Рис. 38

1). $В = Д_1 + О$

$В = 0{,}07 \bullet В + 176{,}7$

$В - 0{,}07 \bullet В = 176{,}7$

$0{,}93 \bullet В = 176{,}7$

2). $В = 176{,}7 : 0{,}93 = 190$ (км)

154$_{69}$ **П** (Рис. 39)

В первый день маслобойня переработала $\frac{3}{8}$ поступивших семян подсолнечника, во второй день $\frac{3}{5}$ остатка, а в третий день — остальные 10,2 т. Сколько тонн семян подсолнечника переработала маслобойня за эти три дня?

ГРАС-1

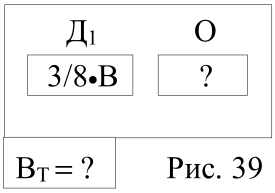
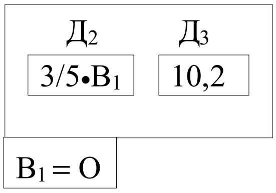


Рис. 39

ГРАС-2



Обратите внимание, что мы начинаем «Алгебру» с ГРАС-2. И понятно почему: мы **видим**, что в ГРАС-2 мы знаем кое-что **об обоих** слагаемых: $Д_2$ связано с $\mathbf{В_1}$, а $\mathbf{Д_3}$ — известно. В то время, как в ГРАС-1 в сумме с двумя слагаемыми есть информация только об одном из трех членов суммы — $\mathbf{Д_1}$.

1). $В_1 = Д_2 + Д_3$

$В_1 = \frac{3}{5} \bullet В_1 + 10{,}2$

$В_1 - \frac{3}{5} \bullet В_1 = 10{,}2$

$\frac{2}{5} \bullet В_1 = 10{,}2$

$0{,}4 \bullet В_1 = 10{,}2$

2). $В_1 = 10{,}2 : 0{,}4 = 25{,}5$

3). $О = В_1 = 25{,}5$

4). $В = Д_1 + О$

$В = \frac{3}{8} \bullet В + 25{,}5$

$В - \frac{3}{8} \bullet В = 25{,}5$

$\frac{5}{8} \bullet В = 25{,}5$

$В = 25{,}5 : \frac{5}{8} = \frac{51}{2} \bullet \frac{8}{5} = \frac{204}{5} = 40{,}8$ (т)

334$_{84}$ $\otimes_D \square$ **+ (=) +** $\otimes_D \square$ (Рис. 40)

В поселке 200 домов. Двухэтажные дома составляют $\frac{1}{4}$ всех домов. Трехэтажные дома составляют 0,3 оставшихся домов, а остальные дома одноэтажные. Сколько одноэтажных домов в поселке?

Закрепляющий аналог задачи 116_{66}.

ГРАС-1

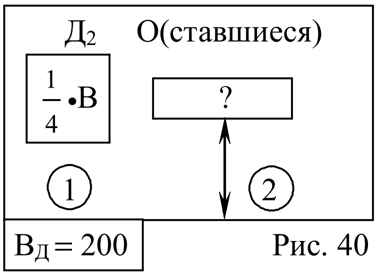
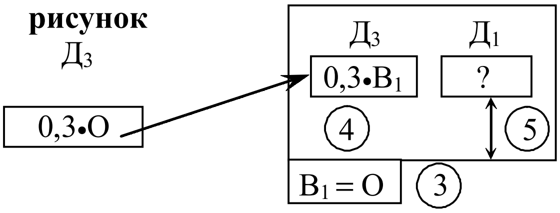


Рис. 40

Вспомогательный рисунок **ГРАС-2**



339$_{84}$ **П** (Рис. 41–42)

Маслобойня переработала поступившие семена подсолнечника за три дня. В первый день она переработала 35% всех семян, что составляет 49 т. В третий день было переработано $\frac{6}{7}$ того, что во второй день. Сколько тонн семян подсолнечника было переработано во второй и сколько в третий день?

ГРАС-1

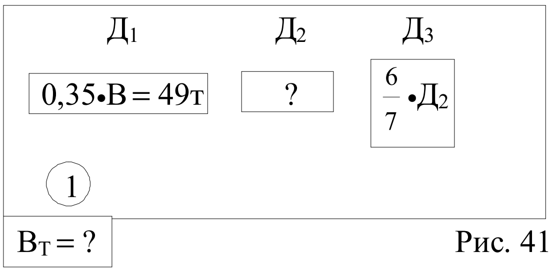


Рис. 41

$Д_2 = ?$
$Д_3 = ?$

35% = 0,35

Д•В = СД — формулу можем использовать в качестве содержимого слагаемого **Д₁** целиком, как готовое действие.

Видим (содержимое слагаемого **$Д_1$ как формула**), можно найти **В**(сего)

1). $0{,}35 \cdot В = 49$

$В = 49 : 0{,}35 = 140$ (т).

Параллельно видим, что содержимое слагаемого **$Д_1$ как число** известно — дано по условию: $Д_1 = 49$ т.

Рисуем ГРАС-2 (рис. 42).

ГРАС-2

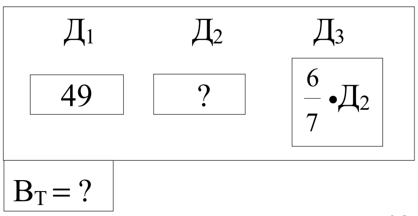


Рис. 42

2). $В = Д_1 + Д_2 + Д_3$

$$140 = 49 + Д_2 + \frac{6}{7} \cdot Д_2$$

$$91 = 1\frac{6}{7} \cdot Д_2$$

3). $Д_2 = 91 : 1\frac{6}{7} = 91 : \frac{13}{7} = \frac{91 \cdot 7}{13} = 49$ (т)

4). $Д_3 = \frac{6}{7} \cdot Д_2 = \frac{6}{7} \cdot 49 = 42$ (т)

Проверка: $В = Д_1 + Д_2 + Д_3 = 49 + 49 + 42 = 140$ — правильно.

Задача интересна тем, что ярко демонстрирует **реальный** способ применения ГрафАнализа. Мы делаем все, чтобы облегчить себе жизнь:

• ГРАС-1 — извлечение данных, включая **содержимое слагаемого $Д_1$**: и как число $Д_1 = 49$ т, и как формулу Д•В = СД.

• Мы не следуем механически по «накатанной» схеме: «Графика», «Алгебра», «Арифметика». В данном случае без ГРАС-1 и **промежуточных вычислений** 1-го действия общая «Графика» практически невозможна.

• Алгебраическая (имена слагаемых и связи между ними) и графическая наглядность делают задачу **предельно прозрачной**, что невозможно при арифметическом способе решения.

Ответы: 76) $MK = \frac{9}{40}$ м; 79) $AD = \frac{29}{40}$ м; 116) $О_1 = 6{,}3$ м; 117) $Д_3 = 24$ га; 121) $О_1 = 24\%$; 140) В = 38 м;152) В = 190 км; 154) В = 40,8 т; 334) $Д_1 = 105$ д.; 339) $Д_2 = 49$ т, $Д_3 = 42$ т.

Небольшое дополнение о пропорциях.

Прямая пропорциональная зависимость.

180_{71} $(:)_Р + \otimes$ $(П_П)$ (Рис. 43–44)

На изготовление 14 деталей расходуется 16,8 кг металла. Сколько потребуется металла на изготовление 27 таких деталей?

ГРАЭЛ-$(:)_Р$	ГРАЭЛ-($\otimes$)	
$\boxed{\dfrac{16{,}8кг}{14(д)}} = Д_{1кг/д}$ 1	$Д_{27}$ $\boxed{27 \bullet Д_1}$ 2	1) $Д_1 = \frac{16{,}8}{14} = 1{,}2\,(кг)$
	Рис. 43	2) $Д_{27} = 27 \bullet Д_1 = 27 \bullet 1{,}2 = 32{,}4\,(кг)$

Так, как на рис. 43, задача решена на уровне 3-го класса (см. задача 6, цикл III, глава V).

14 д. — 16,8 кг 27 д. — x кг	$\frac{27\,д}{14\,д} = \frac{x\,кг}{16{,}8\,кг}$	$x\,кг = \frac{16{,}8кг \bullet 27(д)}{14(д)} = \frac{453{,}6}{14} = 32{,}4\,кг$

Рис. 44

На рис. 44 ее решение дано в виде пропорций, как в 6-м классе.

Обратная пропорциональная зависимость.

178_{71} $\otimes + (:)_Р$ $(П_О)$ (Рис. 45–46)

Теплоход «Ракета» прошел расстояние между пристанями со скоростью 50 км/ч за 4,8 ч. С какой скоростью должен идти теплоход, чтобы пройти это расстояние за 3,2 часа?

ГРАЭЛ-($\otimes$)	ГРАЭЛ-$(:)_Р$	
S_1 км $\boxed{50км/ч \bullet 4{,}8ч}$ 1	$\boxed{\dfrac{S_1км}{3{,}2(ч)}} = V_{2км/ч}$ 2	1) $S_1 = 50 \bullet 4{,}8 = 240\,(км)$
Рис. 45		2) $V_2 = S_1 : 3{,}2 = 240 : 3{,}2 = 75\,(км/ч)$

Так, как на рис. 45 задача решена на уровне 3-го класса.

50 км/ч — 4,8 ч x км/ч — 3,2 ч	$\frac{50\,км/ч}{x\,км/ч} = \frac{3{,}2\,ч}{4{,}8\,ч}$	$x\,км/ч = \frac{50км/ч \bullet 4{,}8(ч)}{3{,}2(ч)} = \frac{240}{3{,}2} = 75\,км/ч$

Рис. 46

На рис. 46 ее решение дано в виде пропорций, как в 6-м классе.

С точки зрения ГрафАнализа в задачах на пропорции интересно лишь то, что они появляются уже в 3-м классе и реализуются в виде двух графсхем.

В 6-м классе ГРАН может использоваться как иллюстрация задач на пропорции, если это будет необходимо.

Разумеется, графически пропорции можно реализовать по-разному. Например, в виде двух ГРАЭЛов деления по содержанию (рис. 47-48) из которых прямо получаются наши пропорции.

(:)$_{\text{СБ}}$ (=) (:)$_{\text{СБ}}$

$$\boxed{\frac{27\text{дет}}{14\text{дет}}} = \boxed{\frac{x\text{кг}}{16{,}8\text{кг}}}$$

Рис. 47

(:)$_{\text{СМ}}$ (=) (:)$_{\text{СБ}}$

$$\boxed{\frac{3{,}2\text{ч}}{4{,}8\text{ч}}} = \boxed{\frac{50\text{км/ч}}{x\text{км/ч}}}$$

Рис. 48

Прямая пропорция звучит так: во сколько раз больше деталей — во столько же раз больше металла требуется на эти детали (рис. 47).

Обратная пропорция звучит так: во сколько раз меньше времени (на одно и то же расстояние) — во столько же раз больше скорость (рис. 48).

Математика-7 — Геометрия

Среди задач 3, 5 и 6 классов я до сих пор сознательно не касался задач, сводящихся, как отчетливо показывает ГрафАнализ, к системам уравнений.

Нужды нет, что эти задачи решаются путем рассуждений (3 класс) или сведением к одному уравнению (5 и 6 классы, а также начало 7 класса — задачи на составление уравнений). Для нас важен тот факт, что системы линейных уравнений с двумя неизвестными **изучаются** в школе **только в конце 7 класса, в четвертой четверти**.

Естественно, при таком подходе дети **просто обязаны испытывать трудности** при решении таких задач.

Я совершенно неуверен, что из соображений, по-видимому, пропедевтики, такой подход оправдан. Точнее — в той форме, в которой он реализуется сейчас.

А реализуется он сейчас таким образом, что понятие (в любой форме) системы уравнений отсутствует.

Задача 1 **$С_2\otimes$**

На блюде и тарелке 20 яблок. На блюде яблок в 3 раза больше, чем на тарелке. Сколько яблок на блюде и сколько на тарелке?

Задачи «… на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению можно назвать «задачами на части», а способ, которым они решаются, «способом частей» [14, с. 123].

Рассуждают, вкратце, приблизительно так.

Примем количество яблок на тарелке за одну часть. Тогда количество яблок на блюде примем за три части, т. к. на блюде в 3 раза больше, чем на тарелке.

Всего у нас 20 яблок и им соответствуют 4 части. Чтобы узнать, сколько яблок соответствуют одной части (содержатся в одной части — знакомая ситуация на смысл дроби), разделим 20 : 4 = 5 (я.).

За одну часть мы приняли содержимое тарелки, значит на тарелке 5 яблок. На блюде — в 3 раза больше, значит на блюде 5 • 3 = 15 (я.).

Все хорошо, все ясно (пока работаем с натуральными числами!). В 3 классе такое рассуждение воспринимается.

Задача 2 **$С_2\Sigma$** (рис. 49)

На блюде и тарелке 20 яблок. На блюде на 10 яблок больше, чем на тарелке. Сколько яблок на блюде и сколько на тарелке?

Здесь рассуждения гораздо сложнее (для наглядности, я воспользуюсь своими иллюстрациями и обозначениями, нам с вами, читатель, давно привычными, но общий стиль будет близок к школе).

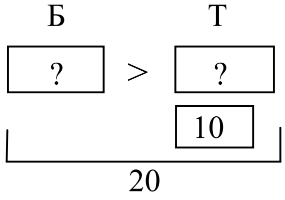


Рис. 49

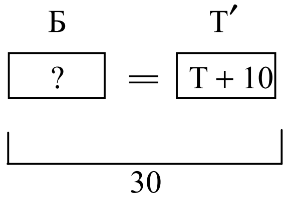


Рис. 50

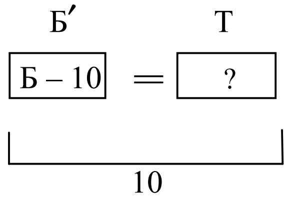


Рис. 51

Уравняем количества яблок на **Б**(люде) и **Т**(арелке), добавив на **Т** 10 яблок. Тогда на **Т′** станет **столько же** яблок, сколько на **Б**. Общее количество тоже увеличится на 10 и станет равным 20я + 10я = 30я. Теперь от рис. 49 можем перейти к рис. 50.

Видим, имеем 2 **равных** слагаемых, а их сумма равна 30. Разделив 30 : 2, получим, что каждое слагаемое равно 15. Значит, на **Б**(люде) — 15 яблок. На **Т**(арелке) на 10 яблок меньше, чем на **Б**(люде), т. к. на **Б** на 10 яблок больше, чем на **Т**. Значит, на **Т** — 15 – 10 = 5 (я).

Эту же задачу можно решить **уравниванием** слагаемых **путем вычитания**.

Глядя на рис. 49. говорим: **уберем** с **Б** 10 яблок. Тогда на **Б′** станет **столько же** яблок, сколько на **Т**, а всего будет 20 – 10 = 10 (я). Рис. 49 перейдет в рис. 51.

Далее, как в первом варианте — 10 : 2 = 5 (я).

На **Т** — 5 яблок, а на на **Б** (5 + 10 = 15) — 15 яблок.

На первый взгляд, читатель, рассуждение, вроде бы, не очень сложное… для нас! А для третьеклассника? Мама одной умненькой (действительно) девочки жаловалась мне: «Ну не знаю, что делать. Сколько уже таких задачек с ней перерешали, а почти бестолку!»

А теперь, читатель, давайте с помощью ГрафАнализа **явно** выделим в задачах 1, 2 системы уравнений. Но не только. — Я выстрою для каждой задачи цепочку задач, ведущих к геометрии-7.

Задача 1 **$С_2$⊗** (рис. 52)

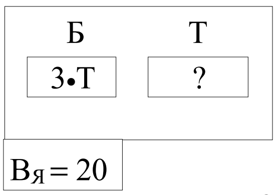


Рис. 52

(1) Б = 3 •Т — подставляя (1) → (2)

(2) Б + Т = 20

получаем **одно** уравнение с одной неизвестной Т

3Т + Т = 20 → 4Т = 20

(3) Т = 5 — подставляя (3) → (1), находим Б

Б = 3 •Т = 3 •5 = 15

Видим, что уравнения (1) и (2) являются системой двух уравнений с двумя неизвестными **Б** и **Т**. Решение — методом подстановки (так, как это дается в конце 7 класса): **Б** из уравнения (1) подставляем в уравнение (2). Для краткости, такую подстановку я буду обозначать так: **подставляя (1) → (2)**. **Произносится**: **подставим** «один» в «два»; вариант — **подставим Б** из первого уравнения (или — из уравнения «один») во второе (или — в уравнение «два»).

Разумеется, в 3 классе и речи не может идти о системах. Но вот начиная с 5 класса — ради Бога! Мы с вами, читатель, давным-давно пользуемся методом подстановки и термином «подставить» (см. п. «О слове «подставить», цикл IV, глава II).

Конечно, можно было б (что очень близко к школе) взять с «Графики» только основное уравнение суммы Б + Т = В (**не выписывая его**) и, пользуясь содержимым слагаемого Б = 3•Т, сразу иметь **якобы одно** уравнение 3Т + Т = 20 → 4Т = 20 → Т = 5. То есть, мы **в уме**, без «Графики», проводим рассуждение типа: пусть количество яблок на тарелке — x, тогда на блюде — $3x$, а всего будет $3x + x = 20$ и т. д.

Но очевидно же, **что реально мы подставили** в основное уравнение суммы величину **$3x$** (или, в наших обозначениях, содержимое слагаемого **Б**, равное, на сей раз, не числу, как раньше, а выражению **3Т** в основное уравнение суммы Б + Т = В) **<u>в ненаписанное</u>** основное уравнение суммы и получили, повторяю, **<u>якобы</u> одно уравнение!**

Не кажется ли вам, читатель, что избегая употреблять **явно** системы уравнений, а между тем, — **реально пользуясь методом решения систем** — методом подстановки, мы занимаемся тем, что я назвал **методическим самообманом**?!

Самое плохое в этом то, что все **реальные действия** с системами ребенок **<u>вынужден</u> проводить в уме**! В подавляющем большинстве случаев ему никогда не придет в голову, что, составляя уравнение для задачи и вводя букву x, он на самом-то деле решает систему уравнений (только **не явным** образом). И все для него в математике так и останется разрозненным, самим по себе.

Спрашиватся, к чему такие сложности!

Спрашивается, зачем затруднять овладение языком математики там, где нужно всячески облегчать!

Конечно же, нет никакой необходимости в употреблении термина «система уравнений». Но давайте будем выписывать два (если нужно — три) уравнения столь легко и естественно считываемые с «Графики» в «Алгебру» и, показав на паре примеров что, куда и как подставляем, говорить: «Ну а теперь, **подставим** первое уравнение во второе». В конце 7-го класса мы уже по-настоящему изучим системы уравнений и методы их решения, а пока давайте-ка **визуализируем**, **материализуем** для ребенка **процесс его реальных действий в уме**.

Далее я даю несколько задач из Математики-5, 6, 7, которые (включая и задачу 1) являются подготовительными для соответствующей геометрической задачи (поэтому этот пункт и носит название «Геометрия-7»). В «Алгебре» дается решение системы, под «Графикой» — для контрастной иллюстрации — соотвествующее уравнение через «букву *x*».

Д-5(128_{62}) C_2⊗ (рис. 53)

Провод длиной 60 м разрезали на два куска так, что длина одного из них оказалась в 5 раз больше другого. Найдите длину каждого куска проволоки.

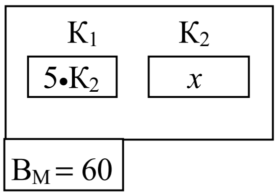


Рис. 53

(1) $К_1 + К_2 = 60$

(2) $К_1 = 5 \cdot К_2$ — подставляя (2) → (1)

$5К_2 + К_2 = 60 \rightarrow 6К_2 = 60$

(3) $К_2 = 10$ — подставляя (3) → (2), находим $К_1$

$К_1 = 5 \cdot К_2 = 5 \cdot 10 = 50$

$5x + x = 60 \rightarrow 6x = 60 \rightarrow x = 10 \rightarrow 5 \cdot 10 = 50$

Д-6(143_{68}) C_2⊗ (рис. 54)

В двух цистернах 120 т нефти. В одной из них нефти было в $1\frac{2}{9}$ раза меньше, чем в другой. Сколько тонн нефти было в каждой цистерне?

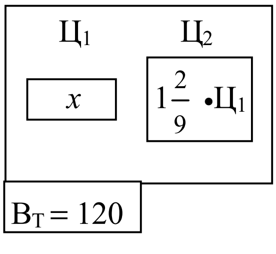


Рис. 54

(1) $Ц_1 + Ц_2 = 120$

(2) $Ц_2 = 1\frac{2}{9} \cdot Ц_1$ — подставляя (2) → (1)

$Ц_1 + 1\frac{2}{9}Ц_1 = 120 \rightarrow 2\frac{2}{9}Ц_1 = 120$

(3) $Ц_1 = 54$ — подставляя (3) → (2), находим $Ц_2$

$Ц_2 = 1\frac{2}{9}Ц_1 = 1\frac{2}{9} \cdot 54 = 66$

$x + 1\frac{2}{9}x = 120 \rightarrow 2\frac{2}{9}x = 120 \rightarrow x = 54 \rightarrow 1\frac{2}{9} \cdot 54 = 66$

М-7(98_{17}) **$С_2$⊗** (рис. 55)

В двух залах кинотеатра 460 мест. Сколько мест в большом зале, если в нем в 3 раза больше мест, чем в малом?

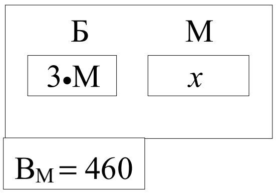


Рис. 55

(1) Б + М = 460

(2) Б = 3 •М — подставляя (2) → (1)

3М + М = 460 → 4М = 460

(3) М = 115 — подставляя (3) → (2), находим Б

Б = 3М = 3 •115 = 345

$3x + x = 460 \rightarrow 4x = 460 \rightarrow x = 115 \rightarrow 3 \cdot 115 = 345$

Не правда ли, читатель, сколь громоздки «Графика» с «Алгеброй» ГрафАнализа и сколь изящна **всего лишь одна** строчка решения через «букву x»?

А вот теперь — самое важное!

Именно «громоздкость» ГрафАнализа и показывает с несомненностью, сколь многое мы заставляем ребенка делать в уме, не отдавая себе в этом отчета. И если в простейших задачах, типа данной, в геометрии мы научимся обходиться без «Графики» (к чему, кстати говоря, мы с вами и стремимся), то «Алгебра» у нас останется в обозначениях отрезков и углов. В геометрии нам необходимо научиться решать задачи в общем виде, «в буквах». Привыкая к этому в ГрафАнализе, мы облегчаем ребенку этот переход — от арифметических методов к алгебраическим в геометрии.

Задача 1(Г) **$С_2$⊗** (Рис. 56)

Отрезок AC разделен точкой B на два отрезка. Чему равен отрезок AB, если известно, что отрезок BC в 4 раза меньше AB, а длина отрезка AC равна 22,5 см?

Вспомогательный рисунок

Дано:
AC = 22,5 см
AB = 4 •BC
AB = ?

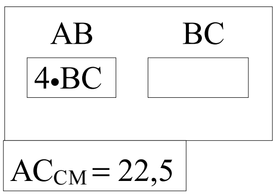


Рис. 56

(1) AB + BC = 22,5

(2) AB = 4 •BC — подставляя (2) → (1)

4BC + BC = 22,5 → 5BC = 22,5

(3) BC = 4,5 — подставляя (3) → (2), находим AB

AB = 4BC = 4 • 4,5 = 18

Разумеется, **никаких «иксов»**, поскольку работаем в геометрических обозначениях. А вот «Алгебра» в смысле ГрафАнализа осталась неизменной. Заметьте, читатель, что следующая геометрическая задача из учебника геометрии для 7 класса уже не потребуют привычной нам «Графики». А вот вспомогательный геометрический рисунок — обязателен.

Поскольку логика задачи совершенно идентична вышерассмотренным, то привожу только текст задачи. При необходимости, ребенок всегда сможет набросать «Графику» и перейти от нее к алгебраическому решению геометрической задачи. Самое главное, правильно нарисовать вспомогательный геометрический чертеж.

Г-7(50_{16}) С$_2$⊗

Угол *AOB* является частью угла *AOC*. Известно, что $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\ \angle BOC$. Найдите угол *AOB*.

Перейдем к задаче 2 и выделим в ней систему уравнений.

Задача 2 С$_2$⊗ (рис. 57)

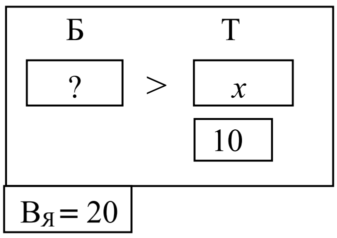


Рис. 57

(1) Б + Т = 20

(2) Б = Т + 10 — подставляя (2) → (1)

(Т + 10) + Т = 20 → 2Т + 10 = 20 → 2Т = 10

(3) Т = 5 — подставляя (3) → (2), находим Б

Б = Т + 10 = 5 + 10 = 15

$(x + 10) + x = 20 \rightarrow 2x + 10 = 20 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5 \rightarrow 5 + 10 = 15$

Как видите, читатель, столь изящная «**всего лишь одна**» строчка через «букву *x*» дается гораздо сложнее даже при наличии «Графики» перед глазами. Что уж говорить, когда ребенку, прежде чем дойти до «буквы *x*», приходится все держать в уме? Ну разве что помогая себе записью типа: обозначим через *x* то-то и то-то, тогда…

Далее я даю несколько задач из Математики-5, 7, которые (включая и задачу 2) являются подготовительными для соответствующей геометрической задачи. Поскольку процесс подстановки освоен, то я привожу только тексты задач. Ребенок же должен рисовать задачи полностью.

Обратите внимание, что при подстановке (2) → (1) я взял подставленное значени **Б** в скобки — Б = (Т + 10). При необходимости напишите уравнение (2) так, как я только что написал, т. е. со скобками. — Это зрительно подчеркивает для ребенка, что мы подставляем именно содержимое слагаемого **Б** в виде формулы. Если потребуется, то в «Графике» вместо знака «?» внутри «квадратика» **Б** пишите его содержимое в виде формулы, т. е. (Т + 10), как мы это делали в задаче 1.

Д-5(294_{73}) С$_2$Σ

В двух цистернах 110,4 т нефти. В одной из них нефти больше, чем в другой, на 8,8 т. Сколько тонн нефти в каждой цистерне?

М-7(101_{18}) С$_2$Σ

На двух станках изготовлено 346 деталей, причем на первом изготовили на 10 деталей меньше, чем на втором. Сколько деталей изготовили на каждом станке?

Задача 2(Г) С$_2$Σ

Длина отрезка *KN* равна 35 см. Отрезок *KM* на 15 см меньше отрезка *MN*. Найти длину отрезка *MN*.

Задача 2$_1$(Г) С$_2$Σ — аналог задачи2(Г)

Отрезок *KM* делится точкой *MN* на два отрезка. Найти длину отрезка *MN*, если длина отрезка *KM* = 85 см, а отрезок *MN* на 15 см больше отрезка *KN*.

Г-7(48_{16}) С$_2$Σ

Луч *OC* делит угол *AOB* на два угла. Найдите угол СОВ, если $\angle AOB = 78°$, а угол *AOC* на 18° меньше угла *BOC* (полный аналог задачи 2$_1$(Г)).

Предупреждение.

Несмотря на предварительную подготовку в решении систем, для ребенка, как правило, **неожиданным** является алгебраическое приведение подобных в геометрических обозначениях. Например, он с легкостью приводит подобные, данные в виде $3x + x = 4x$ или 3M + M = 4M, но встретив выражение $3\angle AOB + \angle AOB$ не видит, что оно равно $4\angle AOB$.

Другие обозначения (через знак угла — $\angle$) — трудность восприятия. Будьте готовы к этому, читатель. По этой же причине нужно (вначале) ставить знак умножения между коэффициентом и углом, т. е. писать $3 \bullet \angle AOB$ и подчеркивать подобные, данные в геометрических обозначениях.

Замечание.

Давая решения задач 48, 49, 50 (см. [59, с. 16]) (**1 четверть 7 класса!**) авторы «Решения задач» прямо пользуются методом подстановки (просто не выписывают именно в виде системы), говоря: «Подставим эти значения в равенство (1)».

А в «Рабочей тетради для 7 класса» задача 77 [61, с. 16] прямо представлена в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными. Другое дело, что все алгебраические выкладки с углами проводятся без слова «подставим». Но система дана со знаком системы (фигурная скобка), одна переменная выражается через другую и подставляется.

Таким образом, я не вижу никаких препятсвий к тому, чтобы пользоваться методом подстановки в том виде, как он мною изложен, и ранее седьмого класса.

О «нотной» записи.

$С_2$ — обозначение системы двух уравнений с двумя неизвестными.

$\otimes$, $\sum$ — тип задачи 1 или 2.

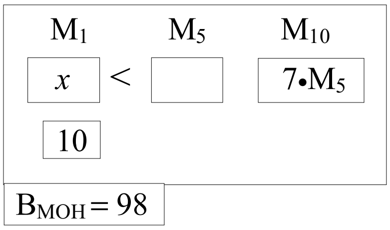
Задачи 1(Г) или 2(Г) — мои вспомогательные подготовительные геометрические задачи.

Ответы: Д-5(128_{62}) $К_2 = 10$, $К_1 = 50$; Д-6(143_{68}) $Ц_1 = 54$ т, $Ц_2 = 66$ т; М-7(98_{17}) М = 115м, Б = 345м; Задача 1(Г) ВС = 4,5см, АВ = 18см; Г-7(50_{16})) $\angle BOC = 27°$, $\angle AOB = 81°$; Задача 2 Т = 5я, Б = 15я; Д-5(294_{73})) $Ц_1 = 50{,}8$ т, $Ц_2 = 59{,}6$ т; М-7(101_{18})) $С_1 = 168$ д., $С_2 = 178$ д.; Задача 2(Г)) $KM = 10$ см, $MN = 25$ см; Задача 2_1(Г)) $KN = 10$ см, $MN = 25$ см; Г-7(48_{16})) $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 48°$.

Математика-7 — Алгебра

А-7(103_{37}) **$C_3\Sigma$** (рис. 58)

В кассе лежит 98 монет по 1, 5, 10 р. Монет по 5 р. на 10 больше, чем монет по 1 р., а монет по 10 р. в 7 раз больше, чем монет по 5 р. Сколько в кассе монет по 1, 5, 10 р.?



(1) $М_1 + М_5 + М_{10} = 98$ — **основное уравнение суммы**

(2) $М_5 = М_1 + 10 = (x + 10)$

(3) $М_{10} = 7 \bullet М_5 = 7 \bullet (x + 10)$

Рис. 58

Через x надо обозначить $М_1$, т. к. через $М_1$ выражено $М_5$ (уравнение (2)), а $М_{10}$, в свою очередь, выражено через $М_5$, а значит — через $М_1$.

Основное уравнение задачи (**в предметных обозначениях**) — это сумма (1)

$М_1 + М_5 + М_{10} = 98.$

Подставляя $М_5$ и $М_{10}$, выраженные через x, мы **<u>явную</u> систему** трех уравнений с тремя неизвестными **сводим к одному уравнению**, в котором **система выражена в <u>неявном</u> виде**

$x + (x + 10) + 7(x + 10) = 98.$

Да, уравнение одно, однако подстановку — как метод решения системы — мы уже осуществили!

Следующая задача — это задача 2, вариант 3 из «Дидактических материалов по алгебре для 7 класса» [62, с. 106].

C_3 **$\otimes\Sigma$** (рис. 59)

За три дня туристы прошли 70 км. В первый день они прошли в 2 раза больше, чем во второй день, а в третий — на 10 км больше, чем во второй. Какой путь был пройден туристами в каждый из трех дней?

ГРАС-1 **ГРАС-2**

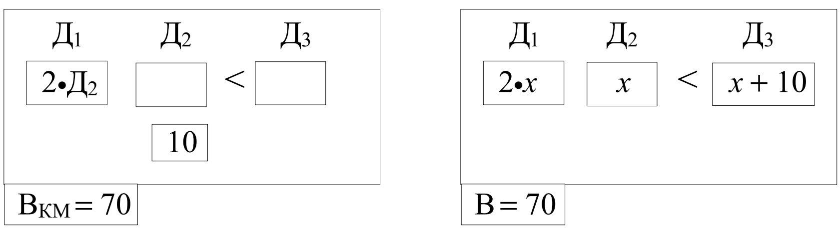


Рис. 59

Быстро набросав ГРАС-1 (**в предметных обозначениях $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$**), видим, что через x нужно обозначить **$Д_2$**, т. к. **$Д_1$** и **$Д_3$** выражены через **$Д_2$**.

Мгновенно создаем ГРАС-2 и формулу $Д_3 = Д_2 + 10 = (x + 10)$, выраженную через x, вводим в качестве содержимого слагаемого **$Д_3$**.

Отношение «Больше НА» не рисуем, т. к. фактически уже произвели **подстановку, и явную систему** трех уравнений **свели к одному уравнению**.

С ГРАС-2 выписываем основное уравнение суммы в предметных обозначения (чтобы не ошибиться) и под ним считываем с ГРАС-2 уравнение с одной переменной x, т. е.

$Д_1 + Д_2 + Д_3 = 70$ и

$2x + x + (x + 10) = 70.$

Откуда $4x + 10 = 70 \to 4x = 60 \to x = 15 = Д_2 \to Д_1 = 2x = 30$ и $Д_3 = x + 10 = 25.$

А-7(120_{41}) $C_3\Sigma$ (рис. 60)

Масса первого и второго советских искусственных спутников Земли составила 592,4 кг. Первый спутник был легче третьего на 1243,4 кг, второй — на 818,2 кг. Найти массу каждого из трех первых искусственных спутников Земли.

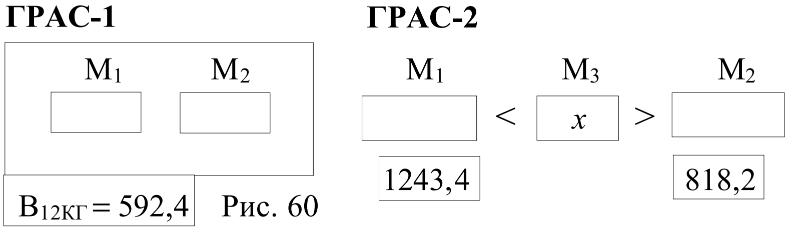


Рис. 60

(1) $M_1 + M_2 = 592{,}4$

(2) $M_3 = M_1 + 1243{,}4$

(3) $M_3 = M_2 + 818{,}2$

$\mathbf{M_3}$ выражено через x понятно почему: $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ **связаны** с $\mathbf{M_3}$. В этой задаче — хочешь не хочешь! — нужно иметь определенный **опыт работы с системами**. Покажу на примере.

Заменим в уравнениях (2) и (3) предметное имя $\mathbf{M_3}$ на x и затем выразим $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ через x.

из (2): $x = M_1 + 1243{,}4 \rightarrow \quad M_1 = x - 1243{,}8 \quad (2')$

из (3): $x = M_2 + 818{,}2 \quad \rightarrow \quad M_2 = x - 818{,}2 \quad (3')$

А вот теперь **видим**, что можем **подставить** $\mathbf{M_1}$ из (2′) и $\mathbf{M_2}$ из (3′), выраженные через **одну неизвестную *x***, в предметное уравнение (1)

(1) $\quad M_1 \quad + \quad M_2 \quad = 592{,}4$

(1′) $(x - 1243{,}8) + (x - 818{,}2) = 592{,}4.$

Выражения для $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ я взял в скобки для наглядности, но, вначале, стоит так и писать, пока ребенок не привыкнет видеть за буквой ее содержимое в виде выражения.

А вот теперь — самое существенное!

Уравнение (1′), как видите, мы получили **хоть и не очень быстро, но легко и безошибочно**. Однако, осталось самое главное — довести до простейшего уравнения **и правильно посчитать** (поскольку имеем десятичные дроби и отрицательные числа)! Именно поэтому эту работу я оставляю вам, читатель (т. е. вашему ребенку).

И наконец — последние две задачи, на которых я хотел бы закончить **демонстрацию возможностей** ГрафАнализа.

На сей раз, как ни странно, но мы обойдемся **без «Графики»**. Тем не менее, мы будем пользоваться именно инструментарием ГрафАнализа, который заключается еще и в такой «**мелочи**», как удобные, мнемоничные, **предметные имена слагаемых**. Не даром мы с вами, читатель, с первых шагов учились выбирать имена! Теперь они заменят нам «Графику» (в данном случае, конечно).

А-7($108(2)_{37}$) **УС** (рис. 61)

В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, на второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах стало зерна поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

($УС_1$) $\boxed{Э_1 = 2 \cdot Э_2}$ — было зерна

($УС_2$) $\boxed{Э'_1 = Э'_2}$ — стало поровну

Рис. 61

Было

$Э_1$ — тонн зерна на 1-м элеваторе

$Э_2$ — тонн зерна на 2-м элеваторе

Стало

$Э'_1$ — тонн зерна на 1-м элеваторе

$Э'_2$ — тонн зерна на 2-м элеваторе

Для удобства, введу понятие «**условие связи**» и его обозначение **УС** ($УС_1$ или, например, $УС_2$. Произносится: условие связи один или два, или просто УС-один, УС-два). Если коротко, то условие связи — это просто уравнение, связывающее две или несколько величин. Скажем, предметные уравнения (1)–(3) предыдущей задачи — это три условия связи между величинами $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ и $\mathbf{M_3}$.

Обратите внимание, условия связи на рис. 61 я **обвел рамкой** — это не слагаемые, но отголосок «Графики», помогающий держать самое существенное в задаче все время перед глазами, в поле внимания.

Далее из текста **выделяем все, что связано с числами** (правда, знакомо?):

вывезли из $Э_1$ 750 т $\Leftrightarrow Э'_1 = (Э_1 - 750)$ (1)

привезли на $Э_2$ 350 т $\Leftrightarrow Э'_2 = (Э_2 + 350)$ (2).

Подставляем (1) и (2) в $УС_2$

$Э'_1 = Э'_2$

$(Э_1 - 750) = (Э_2 + 350)$ (3).

Подставляем $УС_1$ в (3) (сводим к уравнению с одной неизвестной $Э_2$)

$2Э_2 - 750 = Э_2 + 350$,

$Э_2 = 1100$ (т) (4).

Подставляем (4) в $УС_1$

$Э_1 = 2 \bullet Э_2 = 2 \bullet 1100 = 2200$ (т).

«**Всего лишь**» предметные имена вместо *x*, а насколько нагляднее и прозрачнее становится задача!

А-7(119(1)$_{41}$) УС

Собранный виноград предполагалось уложить в ящики, по 9,2 кг в каждый. Вместо этих ящиков взяли другие, вмещающие по 13,2 кг каждый, и тогда потребовалось на 50 ящиков меньше. Сколько килограммов винограда было уложено?

Видим, что имеем величины **разной «размерности»**: [килограммы] — для винограда и [ящики] — для ящиков.

Вводим (по тексту) **обозначения** и выделяем **условие связи**:

M — масса **всего** собранного винограда,

(1) $N_1 = \dfrac{M}{9,2}$ — количество ящиков, в которые **предполагали** уложить виноград,

(2) $N_2 = \dfrac{M}{13,2}$ — сколько ящиков **взяли**.

$(УС_1)$ $\boxed{N_1 = N_2 + 50}$

Обратите внимание на то, что формулы (1) и (2) я не называю условиями связи, поскольку получил их сам из текста, а в тексте как условие связи дано только **отношение** «Больше НА» в форме «меньше на» («… потребовалось на 50 ящиков меньше»).

Если «в лоб» подставим (1) и (2) в $УС_1$, то будем иметь уравнение **с очень неудобными дробями**:

$$\frac{M}{9,2} = \frac{M}{13,2} + 50 \text{ или } \frac{10M}{92} = \frac{10M}{132} + 50.$$

Боже упаси нас работать с подобными знаменателями!

Поэтому, изменяем (1) и (2) следующим образом:

из (1) $\rightarrow M = 9{,}2N_1$ (1′),

из (2) $\rightarrow M = 13{,}2N_2$ (2′).

Одновременно получаем еще одно уравнение связи:

(УС$_2$) $\boxed{M = M}$

Подставим (1′) и (2′) в УС$_2$:

$9{,}2N_1 = 13{,}2N_2$ (4).

А вот теперь, подставляя **УС$_1$** ($N_1 = N_2 + 50$) в (4) получаем уравнение с одной неизвестной $\mathbf{N_2}$

$9{,}2(N_2 + 50) = 13{,}2N_2$, откуда

$N_2 = 115$ (ящиков) (5).

Но нас интересует не количество ящиков [ящики], а количество (масса) винограда в этих ящиках [килограммы].

Приходится проделать еще одну подстановку.

Подставим (5) в (2′):

$M = 13{,}2N_2 = 13{,}2$кг • 115(я) = 1518 кг.

Как видите, читатель, подстановки все усложняются, а количество их растет. Но задача-то, не будем забывать — самое начало Алгебры-7. И ребенка вынуждают обходиться без систем, условий связи и метода подстановки. На мой взгляд, это крайне затрудняет понимание ребенком сути методов решения задач такого рода.

В качестве примера приведу решение задачи из учебника Алгебра-7, тема «Уравнение с одним неизвестным» [60, с. 27].

«Задача. Конверт с новогодней открыткой стоит 170 р. Конверт дешевле открытки на 50 р. Найти стоимость открытки.

Пусть открытка стоит x рублей, тогда конверт стоит $(x – 50)$ рублей. По условию задачи

$x + (x – 50) = 170$,

откуда $2x – 50 = 170$, $2x = 220$, $x = 110$.

В равенстве $x + (x – 50) = 170$ буква x обозначает неизвестное число, или, короче, *неизвестное*».

То, что задача решена способом **неявной** (в уме) **подстановки**, мы с вами, читатель, уже выяснили. И, надеюсь, краткость решения через «букву x» вас уже не соблазнит. Во всяком случае, к букве x стоит переходить не ранее, чем ребенок освоится с наглядными решениями, получаемыми с помощью ГрафАнализа.

О «нотной» записи.

$С_3$ — обозначение системы трех уравнений с тремя неизвестными.

$УС_i$ — условие связи.

Ответы: А-7(103_{37}) M_1 = 2 мон., M_5 = 12 мон., M_1 = 84 мон., $С_3\otimes\Sigma$ $Д_2$ = 15 км, $Д_1$ = 30 км, $Д_3$ = 25 км; А-7(120_{41}) M_3 = 1327 кг; M_1 = 83,6 кг; M_2 = 508,8 кг; А-7($108(2)_{37}$) $Э_1$ = 2200 т, $Э_2$ = 1100 т; А-7($119(1)_{41}$) M = 1518 кг.

Математика-3 — Три основные задачи на встречное движение

«Существуют три основные задачи на встречу, а именно:

1). Задача, в которой даны обе скорости и время до встречи; надо найти расстояние.

2). Задача, в которой даны обе скорости и расстояние; надо найти время до встречи.

3). Задача, в которой даны расстояние, время до встречи и скорость одного из движущихся тел; надо найти скорость второго движущегося тела» [14, с. 129].

Тексты задач я взял из только что процитированной книги Н. С. Поповой (см. [14, с. 130-132]). (Все в текстах задач выделено мной. — В. Х.)

Задача 1

Из двух городов вышли **одновременно** навстречу друг другу легковой автомобиль и грузовик. Скорость автомобиля — 50 *км* в час, скорость грузовика — 40 *км*. Через три часа они **встретились**. Как велико расстояние между этими городами?

В учебнике Математика-3 (см. задача 510(1) [54, с. 91]) эту задачу нарисовали бы так (рис. 62).

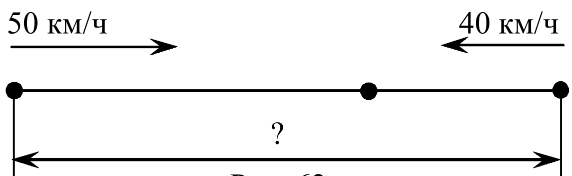


Рис. 62

Мы с вами, читатель, сначала дополним эту иллюстрацию по принципу: **все должно быть перед глазами**, все данные — на бумагу (кстати, подобная «**мелочь**» крайне важна и в геометрии) — рис. 63.

Затем, познакомимся с азами **АИД — алгоритм извлечения данных** (помните, глава II, «Резюме главы II»?) в применении к задачам «на движение».

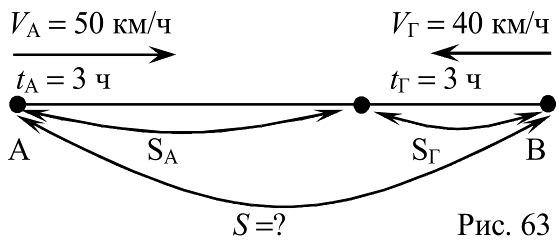


Рис. 63

$V_А$, $V_Г$ — скорость автомобиля, грузовика

$t_А$, $t_Г$ — время до встречи

$S_А$, $S_Г$ — пути, пройденные автомобилем, грузовиком

S — расстояние между городами

Имена совершенно прозрачны (я считаю само собой разумеющимся, что формулу пути при равномерном движении $S = V \bullet t$ и обозначения: S — путь, V — скорость, t — время, вы знаете).

Первое **существенное** уточнение задачи, по сравнению со школьным рис. 62, мы с вами сделали. У нас перед глазами не только **<u>все</u> числовые данные** (на рис. 62 отсутствует время: $t_А = t_Г = 3$ ч), но и **предметные имена величин** (о значимости имен говорить больше не приходится!). На рис. 63 **обязательно пишутся размерности!**

Что касается АИД.

В задачах «на движение» основная цель алгоритма извлечения данных — **выделить условия связи**, причем выделить в форме **содержательных равенств или уравнений**.

Все три задачи на встречное движение имеют только **два условия связи** (УС), которые в тексте заключаются в словах: «**одновременно**» и «**встретились**».

Одновременно — значит время до встречи **одно и то же** (разумеется, то, что время до встречи одинаковое вытекает не только из «одновременно», но и из «встретились», однако я разделяю эти два слова для того, чтобы яснее выделить соответствующее условие связи).

Встретились — значит весь путь S разбивается на две части, **на сумму** двух слагаемых $S_А$ и $S_Г$ (кстати, как в арифметике мы знаем только одно действие — сложение, так и в задачах «на движение» **всегда надо начинать с поиска суммы**).

А вот теперь — важнейший переход от словесной формулировки условий связи к их математической форме, т. е. к равенству и уравнению с которыми уже можно работать (чисто механические операции после подстановки числовых данных).

УС$_1$: $\boxed{t_А = t_Г}$ — одновременно

УС$_2$: $\boxed{S = S_А + S_Г}$ — встретились

Как в задаче А-7(108(2)$_{37}$) я обвел условия связи рамкой — **делать это надо обязательно**.

Поскольку в школьных задачах «на движение» мы знаем только одну формулу $S = V \bullet t$, то ею и пользуемся для всех трех путей. То есть $S_А = V_А \bullet t_А$, $S_Г = V_Г \bullet t_Г$ **подставляем** в УС$_2$ и получаем

$S = V_А \bullet t_А + V_Г \bullet t_Г$.

Осталось **подставить** числовые данные (они у нас **перед глазами** — рис. 63)

$S = 50 \bullet 3 + 40 \bullet 3 = 150 + 120 = 270$ (км).

(Или, пользуясь распределительным законом, который даже третьеклассники знают, выносим общий множитель и получаем $S = 3 \bullet (50 + 40) = 3 \bullet 90 = 270$ (км)).

Так же легко, читатель, будут решаться и следующие две задачи. Но прежде я на примере ГрафАнализа покажу **насколько <u>неудобно</u> пользоваться арифметическим способом решения задач «на движение»**. Взгляните на рис. 64.

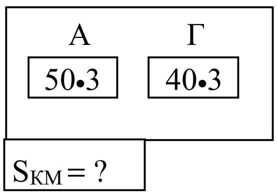


Рис. 64

Вы видите, что **содержательная сущность** задачи «на движение» — совершенно исчезла.

Еще хуже обстоит дело, когда мы просто заставляем ребенка решать задачу по действиям арифметическим способом:

1) $50 \bullet 3 = 150$ (км)

2) $40 \bullet 3 = 120$ (км)

3) $150 + 120 = 270$ (км).

Посмотрите, **какое гигантское расстояние в уяснении и осмыслении задачи** отделяет арифметическое решение по действиям от рис. 63!

Стоит ли удивляться, что в 6–7 классах ребенок, как правило, совершенно не в состоянии справиться с более сложными задачами «на движение».

Задача 2

Из двух городов, которые находятся на расстоянии в 270 км, вышли **одновременно** навстречу друг другу легковой автомобиль и грузовик. Скорость автомобиля — 50 *км* в час, а скорость грузовика — 40 *км*. Через сколько часов они **встретятся**?

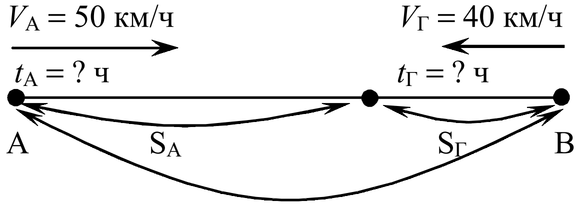


Рис. 65

УС$_1$: $\boxed{t_А = t_Г = t}$ — одновременно

УС$_2$: $\boxed{S = S_А + S_Г}$ — встретились

Внимание.

Время до встречи $\boldsymbol{t_А}$ и $\boldsymbol{t_Г}$ — **неизвестно** (это как раз вопрос задачи), поэтому на рис. 65 указаны только имена времен (**но указаны обязательно!**). Однако, **гораздо существеннее** понимание того, что раз **одновременно** выехали **и встретились**, то, тем самым, времена движения автомобиля и грузовика **одинаковы** (математически это выражается первым **равенством** $t_А = t_Г$ в УС$_1$). А раз одинаковы эти времена и их нам нужно найти, то и **обозначим** эти времена **одной буквой** $\boldsymbol{t}$, и запишем вторым равенством $t_А = t_Г = t$ в УС$_1$.

Подставляем из УС$_1$ $t_А = t_Г = t$ в формулы участков пути $S_А = V_А \bullet t_А$, $S_Г = V_Г \bullet t_Г$, а затем эти формулы в УС$_2$ и получаем

$S = V_А \bullet t + V_Г \bullet t.$

Подставляем числовые данные рис. 65 и получаем

$270 = 50 \bullet t + 40 \bullet t \to 270 = (50 + 40)\bullet t \to 270 = 90\bullet t \to t = 270 : 90 = 3$ (часа).

Замечание.

Буквенный множитель, пользуясь распределительным законом, в начальной школе выносили еще полвека назад. Например, $7 \times x + 10 \times x = 85 \to (7 + 10) \times x = 85$ (см. [14, с. 131]).

Для нас в третьем классе это тоже не составит проблем, если мы вначале позаботимся об умении выносить числовой множитель, как то и положено по программе.

Задача 3

Из двух городов, которые находятся на расстоянии в 270 км, вышли **одновременно** навстречу друг другу легковой автомобиль и грузовик. Легковой автомобиль шел со скоростью 50 *км* в час и **встретил** грузовик **через 3 часа**. С какою скоростью шел грузовик?

Задача дана на рис. 66.

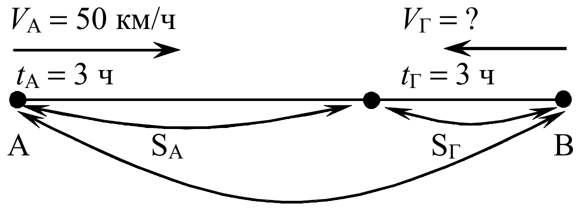


Рис. 66

УС$_1$: $\boxed{t_А = t_Г = 3 \text{ ч}}$ — одновременно

УС$_2$: $\boxed{S = S_А + S_Г}$ — встретились

Подставляем формулы участков пути $S_А = V_А \bullet t_А$, $S_Г = V_Г \bullet t_Г$ в УС$_2$ и получаем

$S = V_А \bullet t_А + V_Г \bullet t_Г.$

Подставляем числовые данные рис. 66 и УС$_1$, получаем

$270 = 50 \bullet 3 + V_Г \cdot 3 \to 270 = 150 + 3\bullet V_Г \to 120 = 3\bullet V_Г \to V_Г = 120 : 3 = 40$ (км/ч).

Мне кажется, читатель, что ребенок, имея опыт работы с ГрафАнализом, довольно легко овладеет методом решений этих трех задач (через условия связи и предметные обозначения) и, тем самым, будет подготовлен к более сложным задачам.