Глава II
СЛОЖЕНИЕ

Понятие о том, что такое сложение возникает из таких простых фактов, что оно не нуждается в определении и не может быть определено формально[1].

М. Я. Выгодский

Числа в простейшем смысле слова, т. е. так называемые натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5,..., отвечают на вопрос «сколько?». Сколько учеников в классе? Сколько книг на столе? Сколько гусей в пруду?

П. С. Александров

Немного о сложении

Основополагающая идея ГрафАнализа (ГРАН) состоит в том, что вся арифметика преподносится ребенку как одно действие — сложение, два понятия — сумма и слагаемые, три отношения — «Больше НА» (сколько-то), «Больше В» (раз), «Равенство».

Первый эпиграф главы утверждает, что действие сложения является неопределимым понятием, т. е. оно — первично. Первичными и неопределимыми, подобно геометрическим понятиям точки, прямой, плоскости являются также понятия суммы и слагаемых — двух основных понятий арифметики[2].

Во втором эпиграфе отражены существеннейшие идеи, заложенные в натуральных числах, из которых и выросло понятие натурального числа: идея счета и идея суммы — «сколько всего?». (Кстати, «понятие о натуральном числе является одним из простейших понятий. Его можно пояснить лишь предметным показом» [10, с. 55]).

Вот эта-то аксиоматическая первичность сложения — «возникающего из таких простых фактов!» — и неразрывно связанных с ним (включенных в него) понятий о целом (сумме) и его частях (слагаемых) и является, на мой взгляд, основой глубокой недооценки роли действия сложения для всего дальнейшего изучения математики.

Задача 1. Пусть на тарелке (Т) лежит **несколько** яблок. **Сосчитайте** их (рис. 1).

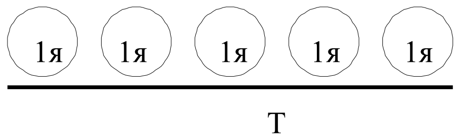


Рис. 1

[1]«Часто даются “определения” вроде таких: “сложение есть действие, посредством которого несколько чисел соединятся в одно”, или “действие, посредством которого находится, сколько единиц содержится в нескольких числах вместе”. Но тот, кто не знал бы, что значит “сложить”, не знал бы и что такое “соединить числа”, так что все подобные “определения” сводятся лишь к замене одних слов другими» [10, с. 67].

[2] Арифметика, да и вся трудная теория чисел опирается на теорию множеств, разработанную в конце XIX века Дедекиндом (1831–1916)и особенно Кантором (1845–1918). Но не будем забывать, что теория множеств — итог сотен и сотен лет развития математики. Достаточно сказать, что в одной из работ группы Бурбаки понятию «1» (единице) отводится… 200 страниц (см. http://ega-math.narod.ru/Bbaki/Bourb1.htm «Николай Бурбаки — математический феномен XX века»).

Что же означает фраза: «Сосчитаем яблоки на тарелке Т»?

Считать мы «умеем». Показываем пальчиком на **каждое** яблоко: раз, два, три, четыре, пять. И говорим: «На тарелке 5 яблок».

Но что же мы делали на самом деле, называя числа: 1, 2, 3, 4, 5?

Мы **«знаем»**, что такое **одно** (1) яблоко, **один** (1) трактор, **один** (1) предмет (любой). А вот что такое **два** (2) яблока, **два** (2) трактора, **два** (2) предмета? Да и просто число: **два** (2)?

Каждое яблоко на тарелке Т — это **одно** (1) яблоко. Берем **одно** (1) яблоко («первое») ДА ЕЩЕ **одно** (1) яблоко, кладем их на блюдце Б, и говорим: «Теперь у нас ВСЕГО **два** (2) яблока» (рис. 2).

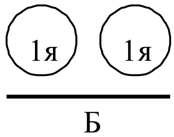


Рис. 2

Кладем на блюдце с тарелки ЕЩЕ **одно** (1) яблоко, и говорим: «Теперь у нас ВСЕГО три (3) яблока» (рис. 3).

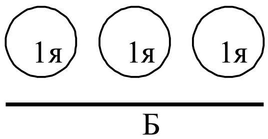


Рис. 3

<u>Видим</u>: два яблока получается, если к **одному** яблоку ПРИБАВИМ еще **одно** яблоко.

Три яблока получится, если к **двум** яблокам ПРИБАВИМ еще **одно** яблоко.

Число «2» получится, если к числу «1» ПРИБАВИМ еще одно число «1».

Число «3» получится, если к числу «2» ПРИБАВИМ еще одно число «1».

И уже ясно, что число «4» мы получим, прибавив к «3» еще «1».

То есть числа 2, 3, 4,… получаем, ПРИБАВЛЯЯ к предыдущему числу **единицу** (1)[3].

Это с одной стороны.

А с другой стороны, когда **считаем**, то мы не просто говорим: на блюдце 2 яблока, или на тарелке 5 яблок. На самом деле мы просто **не произносим** (но подразумеваем!) одно очень важное слово — ВСЕГО, т. е. на самом деле, считая, мы имеем в виду следующее:

ВСЕГО на блюдце — 2я,

ВСЕГО на тарелке — 5я.

И вот, наконец, мы «смело» говорим: «Теперь, похоже, мы знаем, что такое счет. Сосчитать яблоки на тарелке — это значит сказать: сколько ВСЕГО яблок на тарелке. А так как **каждое** яблоко — это **одно** яблоко (единица), то посчитать — означает сказать: сколько ВСЕГО «единиц».

Но не обольщайтесь! На самом деле мы **не знаем**, что такое «счет». Разве нам известно, что такое «ВСЕГО»? Разве нам известно, что такое «ПРИБАВИТЬ единицу»?!

Ну а «научившись» считать, мы, не менее смело, усложняем нашу задачу.

Задача 2. На одной тарелке ($Т_1$) 5 яблок (5я), а на другой тарелке ($Т_2$) — 3 яблока (3я). Сколько яблок на двух тарелках?[4] (рис. 4).

---

[3] Замечу, что я ни словом не обмолвился о значении слова «прибавить». Но так же вынуждены поступать и авторы учебника для учителей: «Каково бы ни было множество **М** численности **а**, к нему всегда можно **присоединить** ЕЩЕ **один** элемент; получаем новое множество **М** численности **а′**. Таким образом можно составить ряд (<u>множество</u>) чисел: 1, 2, 3, 4… **прибавляя** каждый раз число **один** (единицу) к предшествующему числу» (все выделено мной. — В. Х. [11, с. 11]).

[4] В дальнейшем я часто буду употреблять индексные сокращения: $Т_1$, $Т_2$ — тарелка-1, тарелка-2 и указание «размерности» (именованные числа): 5я — 5 яблок. Это не должно вызвать никаких затруднений. К тому же, весь ГРАН построен на использовании таких обозначений.

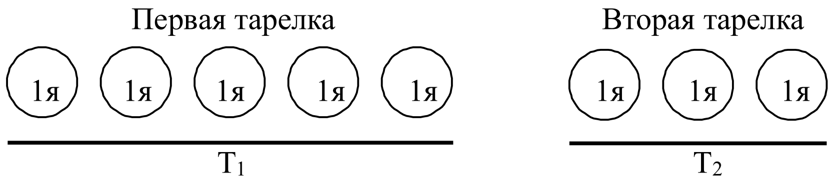


Рис. 4

Поскольку считать мы умеем и знаем, что сосчитать яблоки — это сказать, сколько ВСЕГО яблок, то мы (по-прежнему тыкая пальчиком в каждое яблоко) приступаем к счету, начиная с первого яблока, с **единицы**, и ПРИБАВЛЯЯ по **единице**. Сначала сосчитываем яблоки на T_1: 1, 2, 3, 4, 5. Всего 5 яблок на T_1. Затем переходим ко второй тарелке и, **не переставая прибавлять по «1»**, продолжаем счет: 6, 7, 8.

Все яблоки сосчитаны. Всего мы насчитали 8 яблок. Значит на обеих тарелках — 8 яблок.

Замечательно!

Ну а если у нас будет на T_1 — 100 яблок, а на T_2 — 200 яблок — мы так и будем считать: один, два, три… десять… 100… 150…?

Долгонько же нам придется считать!

Что же делать?

Однако человек, как известно, существо сообразительное, думающее и «ленивое».

Поэтому он быстренько (этак лет тысяч за пятьдесят) додумался, как жизнь себе облегчить. Считать-то надо было уметь: сколько воинов в моем племени, а сколько во вражеском; сколько охотников надо, чтобы добыть пещерного медведя? Да мало ли что еще. А жизнь была трудная, суровая. Пока будешь прибавлять по единице — медведь всех охотников сожрет одного за другим.

Но вернемся к нашей задаче 2.

А кто нас, собственно говоря, заставляет начинать счет с единицы (1)? Допустим, что мы уже посчитали яблоки на первой тарелке: всего на T_1 — 5 яблок. Ну и давайте-ка продолжим к 5 яблокам ПРИСЧИТЫВАТЬ (по одному) яблоки со второй тарелки, т. е. начинаем счет в этом случае не «1», а с «5».

Всего было 5я. Продолжаем счет: 6, 7, 8.

Видим, уже гораздо лучше, гораздо быстрее. А все потому, что мы знали, сколько на первой тарелке яблок.

И все-таки нас и это не устраивает. Чего ради я, зная, что на первой тарелке 5 яблок, а на второй — 3 яблока, по-прежнему должен прибавлять по «1»? — Лень ведь. Да и некогда. Нельзя ли еще упростить себе жизнь?

Оказывается, да, можно.

Возьмем, и один раз, не поленившись, сосчитаем разные количества яблок на двух тарелках (суммы однозначных чисел) **путем пересчета**. Например (рис. 5):

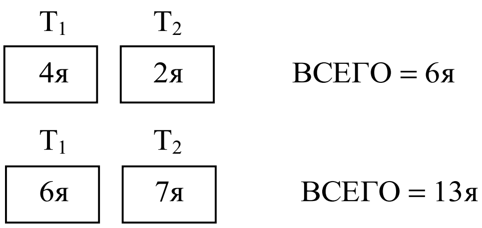


Рис. 5

И запомним результаты счета. Лень, конечно, но, зато раз потрудившись, мы уже навсегда облегчим себе жизнь, т. к. будем знать, что 4 **И** 2 — Всего = 6, а 6 **И** 7 — Всего = 13 (уже каких угодно предметов и просто чисел).

Что же мы сделали?

Мы научились **сразу, не прибавляя по единице**, из 4 и 2 получать 6, а из 6 и 7 — 13.

Облегчим себе жизнь окончательно (уж слишком много слов приходится говорить) и скажем, что ДЕЙСТВИЕ: получить из 4 и 2 — число 6 будем называть **сложением** двух чисел — 4 и 2, а обозначать будем вместо буквы (союза) «**и**» — знаком «+» (плюс). Ну, а то, что из 4 и 2 получаем ВСЕГО 6, будем обозначать знаком «=» (равно).

Итак, **вместо фразы**: «из 4 и 2 получили ВСЕГО 6» будем писать символы (знаки) — $4 + 2 = 6$.

И запоминать!

Говорить: складываем 4 и 2, или 4 плюс 2 равняется 6.

Ну а что же все-таки мы делали, облегчая себе жизнь? — То есть что же такое сложение?

Ответ мы знаем (вроде бы!). Ответить на вопрос: **сколько** яблок на обеих тарелках, **значит сосчитать** яблоки. Сначала на одной тарелке: $Т_1$ = 5я, потом на другой тарелке: $Т_2$ = 3я. И, тем самым, узнать: сколько ВСЕГО яблок: 5я + 3я = 8я.

Великолепно!

Сложить числа, значит, **сосчитать**, «сколько единиц в одном числе» — 5 единиц, «в другом» — 3 единицы. А потом **сосчитать**, сколько всего — 8 единиц. И заявить: «сложить два числа — значит, составить новое число, содержащее столько единиц, сколько их находится в данных числах» [11, с. 31].

Вкратце: **сложить** — значит **сосчитать.**

Вернемся на минутку назад и вспомним, что такое **счет**. А мы говорили, что **считать — это прибавлять** (т. е. складывать) по единице.

Вот те раз! Приехали.

Сложить — означает сосчитать, а сосчитать, как выясняется — это складывать.

Масло масляное.

Недаром я предупреждал: не обольщайтесь, что мы знаем что такое счет. Но теперь выясняется, что на самом деле мы **не знаем** ни что такое счет, ни что такое сложение (в этом и проявляется первичность, неопределимость действия сложения).

А ведь начал я с того, что предложил разобраться в том, что такое счет и сложение.

Но, мне кажется, я отчасти сдержал слово.

Вы, читатель, увидели, что **счет** — это, во-первых, **<u>сложение</u>**, путем прибавления по единице, а во-вторых, **<u>ответ на вопрос</u>** «сколько всего».

Сложение же, во-первых, **<u>счет</u>** числа единиц «в обоих числах», а во-вторых, **<u>нахождение суммы</u>** (всего), путем счета «блоками» единиц (4 и 2 — Всего = 6).

***

К сожалению, «сложение возникает из операции над множествами,… а счет сводится к установлению взаимно однозначного соответствия между элементами данного множества и числами натурального ряда» [11, с. 14, 30].

Однако будем все время помнить о Бурбаки и о том, что теория множеств возникла всего лишь в конце XIX века. А вот считают люди уже в течение многих тысячелетий. И ребенок в своем развитии идет не от конца к началу, а, как и положено — от начала (онтогенез, как говорят психологи, повторяет филогенез). В связи с этим я скажу, что полностью согласен с одним замечанием М. Я. Выгодского: «Евклид (III в. до н. э.) определял число (натуральное) как «множество, составленное из единиц»… Но слово «множество» (или «собрание», или «совокупность» и т. п.) отнюдь не понятнее слова «число» [10, с.55].

Поэтому, обучая ребенка сложению, давайте будем опираться на интуитивно ясные ему понятия: «всего», «целое» (сумма), «части целого» (слагаемые), «целое состоит из частей» (сумма «складывается» из слагаемых) и т. п.

Давайте все же будем говорить ему: **сложить — значит, сосчитать, сколько предметов, сколько единиц ВСЕГО**. И отнюдь не только в первом классе.

Все остальные арифметические действия сводятся к сложению. Это означает, что, научившись отлично складывать, мы легко научимся и всему остальному. Простые, можно было бы сказать — тривиальные соображения. Но увы, все трудности с текстовыми задачами, на мой взгляд, лежат именно здесь, в самом начале, в действии сложения. Особенно наглядно это будет видно в главе III «Вычитание», когда вы будете учить детей отношению «меньше на» и разностному сравнению (на сколько меньше-больше), опираясь исключительно на основное отношение «Больше НА», т. е. на понятие суммы.

Тот факт, что арифметика это одно действие — сложение, означает еще и то, что мы должны придавать огромное значение задачам на сложение, поскольку в дальнейшем **<u>всегда будем искать основные элементы задачи: сумму и слагаемые</u>**. Всегда, будь то задачи на вычитание, деление или умножение.

Итак, читатель, вперед, повторю я вслед за автором «Мастера и Маргариты» М. А. Булгаковым.

Серия задач «на сложение» состоит из 6 циклов. Мы с вами будем работать следующим образом. Я показываю весь цикл задач, от 6 до 14 задач в цикле (без учета задач с дробными числами, предназначенных для 5-6-х классов). Начиная с 5–6-го классов, один цикл рассчитан на одно занятие, примерно 40 минут. Если речь идет о 2–3-м классах, то будьте очень осторожны со временем (см. «Предисловие для родителей»).

На мой взгляд, практически все задачи серии «Сложение» доступны и второкласснику, но это требует аккуратной экспериментальной проверки.

Для работы со вторым классом я не указываю отдельных числовых данных. Тут уж вам самим придется видоизменять данные в объеме счетной практики ребенка.

После листа задач идет подробный «сценарий» работы с данным циклом (я буду ориентироваться на 3–5-й класс). ***Жирным шрифтом будут выделены все «ключевые фразы»***, которые, как я считаю, в той или иной форме ребенку необходимо слышать.

Как правило, речь будет идти об удобных мнемонических обозначениях, удобном расположении графики, типичных ошибках и чисто «психологических фразах», которые помогают концентрации внимания.

Если будет возникать необходимость, то в «сценарии» будет подробно рассматриваться более одной задачи.

Также к большинству задач будут даваться полные графсхемы-решения.

Важные замечания.

Теперь несколько очень важных моментов, которые необходимо реализовывать на всем протяжении ГрафАнализа.

I. Решать все.

Вплоть до 4-го цикла графсхемы задач каждого цикла практически повторяются. Меняются только числовые данные и текстовое оформление задач.

Ни в коем случае не пропускайте ни одной задачи 1-го и 2-го циклов (1. Сколько ВСЕГО; 2. Больше НА)! Особенно с 5-классниками, и, тем более, с детьми старшего возраста.

Эти два цикла имеют **основополагающее значение** для всего дальнейшего обучения!

Наша цель не в том, чтобы просто «посчитать задачу» (уже второклассник решит ее в уме, особенно если учесть, что числа подобраны очень простые специально для того, чтобы ребенок не отвлекался на проблему счета).

Наша цель научить его:

1. Видеть сумму и слагаемые.
2. Выбирать удобные (**мнемоничные**) обозначения для слагаемых.
3. Переводить «Графику» в «Алгебру» **(Считывать** «Алгебру» с «Графики»).
4. И довести ви́дение ребенка **до автоматизма**, чтобы он **пропускал всю «словесную шелуху» и сразу видел сумму и слагаемые**.

Первые два цикла играют огромную роль еще и потому, что их содержанием являются первые 2 из 8 ГРАЭЛов. С точки зрения решения текстовых задач, арифметика сведена к 14 основным логическим элементам, реализуемых в ГрафАнализе соответствующими графическими элементами — ГРАЭЛами.

Эти два ГРАЭЛа отражают еще и тот факт, что все задачи «на сложение» сводятся к двум типам: «1. Когда по данным частям (слагаемым) некоторого целого надо найти это целое (сумму). 2. Когда данное число надо увеличить на несколько единиц или прибавить к данному числу несколько единиц» [11, с. 33].

II. Заповеди ученика.

1. Только вслух.
2. Не бояться ошибок, а быть уверенным, что они наверняка будут, поэтому —
3. Обязательная проверка.

Пояснение:

1. Только вслух.

Требуйте, чтобы ребенок произносил вслух все: от чтения текста до вычислений. Бывает, что ребенок просто плохо читает — какое уж тут «выделение слагаемых», особенно в задачах с массой логических отношений и «словесной шелухи», как, например, в цикле VI. В таком случае вы сразу это **увидите** — и поймете, что сначала речь должна идти не о математике, а о технике чтения.

Далее.

По чтению вслух условия, по паузам (или, наоборот, «сплошному» чтению) вы **увидите**: может ребенок выделять слагаемые или нет, видит отношения между слагаемыми или нет. То есть у вас появится возможность ВИДЕТЬ, как идет первичный (самый важный) анализ задачи (не думайте, что речь идет о первоклассниках только. Плохая техника чтения сейчас довольно распространенное явление. И если я говорю: «ребенок», то это относится ко всем школьникам, ко всем возрастам).

То же самое можно сказать о блоках «Алгебра» и «Арифметика». Часто встречается, что ребенок произносит одно, а пишет совсем другое. И здесь уже надо внимательно разбираться, в чем дело: «словил ворону» (т. е. случайно отвлекся) или же это неумение концентрировать внимание **на технической работе** (алгебра, вычисления)? В последнем случае вам предстоит серьезный труд по формированию произвольности внимания (умения целенаправленно удерживать внимание на какой-то деятельности в течение длительного времени).

Итак — требуйте: только вслух!

2. Не бояться ошибок, а быть уверенным, что они наверняка будут.

Обязательно (и не раз!) произнесите эту фразу.

Для детей, включая старшеклассников, — зачастую полная неожиданность: как это так, будут ошибки?! Ведь нас учат: будь внимателен, работай без ошибок.

Но мы-то, взрослые, знаем, что в новой деятельности ошибки бывают всегда. Путь к овладению новым лежит через ошибки. Да и в знакомой работе, мало ли что случается: устал, тебя отвлекли…

«Принцип ошибок» приводит к тому, что ребенок перестает (не сразу, ой не сразу!) бояться сделать ошибку. А такая боязнь приводит, в частности, к тому, что он «медленно решает», как говорит учитель. А он просто… боится ошибиться, не ведая того, что и до́лжно ошибаться.

Скажите ему даже большее: если (особенно в самом начале овладения какой-то работой) у тебя нет ошибок, то это должно настораживать: может попросту задачи тривиально-легкие! Ошибки должны нас разочаровывать только тогда, когда мы потратили достаточно времени на овладение техникой и свободно владеем ею. Вот тогда, действительно, обидно. **Но до тех пор — радуйся ошибке**. Ведь это значит, что удалось заметить какую-то «мелочь», «блоху» там, где, казалось бы, мы все знаем, все умеем.

Итак — ошибки должны не огорчать, а радовать до тех пор, пока мы не овладеем свободно какой-либо техникой (вычислительной, прежде всего).

Как только ребенок поверит, что ошибки почти неизбежны (если только он уже не владеет первоклассной вычислительной и логической техникой), то он естественным образом сам придет к мысли об обязательности проверки.

Но не уповайте на его самосознание, ведь он только ребенок. А научиться самопроверке — это **годы и годы** практики.

3. Обязательная проверка.

Обязательно требуйте проверки на каждом из 3-х этапов решения, особенно на первом, решающем, этапе «Графики».

Три уровня проверки:

Графика

Нарисовал графсхему (ГРАС) — **ни в коем случае не идешь дальше! Вернись к тексту** задачи **и уже бегло** — ведь слагаемые и отношения выделены на этапе создания ГРАС — **проверь**, прямо следуя за текстом построчно (точнее, по предложениям или логическим частям предложения): **соответствует ли твоя графсхема тексту**? Примеры такой проверки — цикл IV, задача 1 и цикл VI, задача 6.

Если ошибка внесена в ГРАС, то дальнейшие «Алгебра» и «Арифметика» — совершенно бессмысленны! (Вот, кстати, почему ребенку нужно постоянно говорить, что графсхема — это уже решение).

Алгебра

Проверяется «в общем виде». Смотрим на формулу, выражающую действие задачи, **и спрашиваем себя: можем посчитать или нет, если подставим числа**. Примеры такой проверки вы найдете в сценариях циклов IV и VI.

Арифметика

Постоянно обращайте особое внимание ребенка на проверку правильности вычислений. **Скажите ему что-нибудь вроде**: «Представь, что инженеры верно поработали с формулами, но ошиблись в вычислениях на 1000 км. Куда упадет боевая ракета и что при этом случится?».

То есть ребенок должен отчетливо понять, что **грош цена** любому графанализу, **если**, в конечном счете, **он ошибся в вычислениях, в простой арифметической технике**! Пользуйтесь **каждой** его вычислительной ошибкой, чтобы сказать: ну и что толку, что лихо нарисовал такую сложную задачу (например задачу о пиратах из цикла VI) и не менее лихо расписал «Алгебру»? **А счет**! — Из-за того, что ты неправильно сложил — все коту под хвост. То, что ты ошибся в вычислениях, — не страшно, ты же знаешь, что ошибки не только будут, но и обязаны быть в мало-мальски сложной задаче. А вот то, что, посчитав, ты не проверил — действительно плохо. В школе у вас гораздо более простые задачи: ну не обидно ли получать «два балла» из-за того только, что 2 + 2 неверно посчитал!

Итак — добивайтесь реализации 3-х уровней самоконтроля (проверки). Должен предупредить, что чем старше ребенок, тем труднее этого добиться, поскольку **привычка к проверке воспитывается годами**.

Будьте терпеливы!

И наконец (это замечание, вроде бы, не имеет отношения к математике, но только «вроде бы»):

III. Почерк — этим словом все сказано!

Не нужно требовать каллиграфического почерка или аккуратнейшего рисования графсхем.

Но почерк должен быть ясный, «читабельный». Цифры должны выписываться четко (чтобы 2 не путалось с 8 или 5 с 3). Знаки арифметических действий — отчетливы.

И никакого хаоса зачеркиваний! **Если уж решил зачеркнуть, — обведи аккуратным прямоугольником и зачеркни внутри 2–3 линиями. Никакого черкания «кое-как»**. Все должно, и прежде всего на черновике! — «**быть перед глазами**». **Взгляд не должен «рыскать по листу»**. Иначе проверка будет, как минимум, затруднена или просто невозможна.

Не удалось верно нарисовать ГРАС — отчеркни аккуратной линией вдоль всего листа и нарисуй снова.

Особенно надо обращать внимание на рисование ГРАС, ведь это — решение задачи!

Учтите, читатель, что дети сейчас с большим трудом могут рисовать линию или квадратик. Поэтому они хватаются за линейку.

Не позволяйте пользоваться линейкой или шаблоном! Нам графсхема нужна не как произведение искусства, а как инструмент решения задачи. Добейтесь того, чтобы прямоугольники сумм и слагаемых ребенок буквально набрасывал на скорую руку (но аккуратно). Для этого вначале пусть он пару минут потренируется в том, чтобы просто от руки проводить прямую линию, от руки рисовать прямоугольнички. И крайне желательно, не на листах в клеточку. Он, наверняка, будет возмущаться, говорить, что «он не умеет», что «в школе им не разрешают рисовать без линейки». Для вас это не должно быть доводом.

Помните, что в вашем распоряжении всего 40 минут (одно занятие), и вы должны постараться успеть «пройти все» (весь цикл).

То же самое нужно сказать о калькуляторе: **не позволяйте пользоваться калькулятором** в ГрафАнализе. Калькулятор, в лучшем случае, только для проверки вычислений, и то **лишь после того**, как вычисления проверены «вручную».

Ну и наконец, самое последнее: почему нужно рисовать и решать **все** задачи каждого цикла? Да просто, чтобы «**набить руку**». Чтобы рисовать число слагаемых — не задумываясь, так же не задумываясь, — отношения «Больше НА» или «Больше В». Автоматически давать слагаемым имена. Автоматически решать простейшие уравнения. Быстро и правильно вычислять.

IV. Не навреди.

Помните, что вам необходимо готовиться к занятиям. А для этого вы должны **сами, с карандашом в руке, решить все задачи**, т. е. нарисовать их, выбрать обозначения, записать уравнения. Только привыкнув к ГрафАнализу, вы сможете эффективно и в темпе интенсива вести занятие. Только ваш собственный опыт применения ГРАН позволит вам увидеть и понять все технологические рекомендации — от почерка и компактного распределения листа, до выбора обозначений и верного счета. **Если вы сами не будете готовы, не будете выполнять технологические требования ГРАН, то вы можете только навредить своему ребенку**.

Для учителя, как и для врача, первая заповедь: не навреди!

Цикл I. Сколько ВСЕГО (задачи с 2 слагаемыми в одно действие, ГРАЭЛ-(∑))

1. На одной тарелке 5 яблок,
на другой — 3 яблока.
Сколько яблок на обеих тарелках? (••)

2. В одной коробке 50 яблок,
в другой — 30 яблок.
Сколько яблок в двух коробках? (••)

3. Одна машина привезла в магазин 500 ящиков конфет,
другая машина привезла 300 ящиков конфет.
Сколько ящиков конфет привезли в магазин? (••)

4. У Саши было 100 копеек,
у Маши было 150 копеек.
Они купили на рынке упаковку спичек и заплатили все свои деньги.
Сколько стоили спички? (••)

5. Один автобус проехал 88 км,
а другой автобус — 102 км.
Какое расстояние проехали оба автобуса? (••)

6. За 3 часа путешественник дошел от реки до горы,
а от горы до озера он дошел за 5 часов.
Сколько времени шел путешественник от реки до озера? (••)

(удаляется графическая разбивка задачи)

7. Маша поехала к бабушке в деревню. Первые 18 часов она ехала поездом, а потом 3 часа — автобусом. За какое время Маша доехала до деревни? (••)

8. После каникул Маша вернулась из деревни домой. До вокзала она ехала автобусом и проехала 120 километров, а затем на поезде она проехала 780 километров. Каково расстояние от деревни до города? (••)

Задачи с синонимичными выражениями[5]

9. С дерева сначала улетели 5 синиц, затем **еще** 3.
Сколько синиц улетело с дерева? (••)

10. Маша съела утром 3 яблока, вечером **еще** 2. Сколько яблок съела Маша? (••)

11. У Коли было 4 марки. Ему подарили **еще** 2. Сколько марок стало у Коли? (••)

Дроби[6]

12. За 1-й день Маша прочитала $\frac{1}{3}$ книги. За 2-й день — $\frac{2}{3}$ книги. Какую часть книги Маша прочитала за два дня? (••)

Задачи 9–11 взяты из книги Н. Б. Истоминой [7, с. 30–31] (все выделено мной. — В. Х.).

[6] См. глава III — Вычитание, начало раздела «Немного о дробях». В этой главе я включаю несколько задач с дробными числами исключительно в методических целях: мы сразу увидим, что задачи 5–6 классов по своей логической структуре ничем не отличаются от задач 1–3 классов, и главной проблемой является проблема грамотного счета, а отнюдь не умение решать текстовые задачи.

Ответы: 1) 8 я.; 2) 80 я.; 3) 800 я.; 4) 250 к.; 5) 190 км; 6) 8 ч.; 7) 21 ч.; 8) 900 км; 9) 8с.; 10) 5я.; 11) 6м; 12) — $\frac{3}{3}=1$ всю книгу.

Сценарий.

Сначала несколько пояснений общего характера.

Поскольку, как уже сказано, я в своем изложении ориентируюсь на 3–5 классы, то, мне думается, лучше всего **вместе с ребенком** прочитать пункт «Немного о сложении», начиная с задачи 1 и до конца, отмеченного тремя звездочками (***). При этом **выделить** для него следующее:

Считать — это отвечать на вопрос «**сколько ВСЕГО**».

Сложить два числа — тоже ответить на вопрос «**сколько ВСЕГО**».

Далее **сказать** ему, что всегда будем называть числа, которые складываем, **слагаемыми**, а результат сложения — **суммой** или **всего** (понятия суммы и слагаемых вводятся уже в начале 1-го класса).

Обратите особое внимание **на обозначения** (имена) слагаемых вот почему: когда мы думаем об обозначениях, то тем самым мы **уже анализируем задачу**[7].

Столь же внимания следует уделять «**<u>размерности</u>**» величин. Попросту говоря, что складываем: яблоки + яблоки, часы + часы, ящики + ящики. А вот тракторы и часы (тракторы + + часы) мы сложить никак не можем. Это величины разной «размерности», неоднородные.

Конечно, использование термина «размерность», если подходить строго, не совсем корректно (поэтому я пишу его в кавычках). Но пусть он будет в нашем лексиконе. Во-первых, он удобен, а во-вторых, он крайне поможет нам разобраться с двумя формами деления. В-третьих же, мы навсегда приучим ребенка к тому, что в дальнейшем, прежде всего в физике, он будет работать с размерными величинами: скорость — метры в секунду, плотность — килограмм на метр в кубе и т. п. (о размерностях без кавычек см. глава V).

Наконец, — и это самое главное, — используя «размерные» величины, ребенок **опредмечивает** для себя графическую схему (модель) задачи: не просто число «3», а «3 яблока».

<u>Поэтому бойтесь «просто чисел».</u>

Теперь о первом графическом элементе (сокращенно — ГРАЭЛ). Сумму и составляющие ее два слагаемых будем **называть ГРАЭЛ-(Суммы)**. **Обозначать — ГРАЭЛ-(Σ)**[8].

А рисовать так, как в задаче 1 этого цикла (ниже).

Переходим к работе с ребенком.

Вы помните, то, что выделено жирным шрифтом и далее, в той или иной форме ребенок должен услышать.

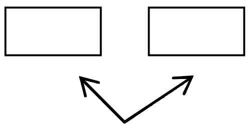
Задача 1

1. Скажите ему, что вы уверены в том, что все задачки цикла I он и в уме решит. Уж что-что, а на таком уровне считать он умеет. Но у вас с ним другая задача: научиться быстро и правильно решать очень сложные задачи, а для этого нужно кое-что узнать.

[7] «Выбор обозначений является важным моментом в решении задачи. К нему следует отнестись очень внимательно. Потраченное на выбор обозначений время с лихвой компенсируется тем временем, которое мы сэкономим, избежав *путаницы* в работе. *Более того*, тщательно выбирая обозначения, мы будем хорошо разбираться в тех элементах задачи, которые подлежат обозначению. Таким образом, выбор обозначения может существенно помочь нам понять задачу. Хорошая система обозначений должна удовлетворять следующим требованиям: она должна быть *однозначной, содержательной, легко запоминающейся*» (все выделено мной. — В. Х. [12, с. 119]).

[8] Греческая буква Σ (сигма) в математике используется для обозначения суммирования.

2. Пусть он прочитает **задачу 1** (**вслух!**). Разумеется, он сразу скажет ответ — 8 яблок. На что вы ему ответите, что это в общем-то и не задача, а простенький элемент (логическая деталька) почти всех сложных задач, и что вы покажете ему, как **нарисовать** эту задачу, буквально **говоря следующее**: «Какие числа мы складываем? — 5 и 3. Значит, это у нас **слагаемые**. Давай будем рисовать слагаемые квадратиками (рис. 6) (**прямоугольниками** удобнее, но я буду говорить «квадратики», чтобы подчеркнуть, что речь идет о слагаемых).



слагаемые Рис. 6

Внутри квадратиков — писать наши числа 5 и 3. Но обрати внимание, что в нашей задаче это не просто числа, как в примере 5 + 3 = 8, а совершенно конкретные числа.

Что мы хотим **посчитать**? — Сколько яблок, верно? Вот для того, чтобы не забыть о том, **чтó именно мы считаем** — яблоки, или, упаси Боже, не сложить в какой-нибудь задачке **тракторы и яблоки**, будем писать не просто 5 и 3, а 5я и 3я. Сразу **видно**, что мы считаем в нашей задаче **яблоки**».

И вписываете в квадратики-слагаемые 5я и 3я (рис. 7).

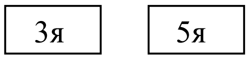


Рис. 7

Продолжаете: «Нам надо узнать (посчитать), сколько ВСЕГО яблок на обеих тарелках? Давай наши слагаемые поместим внутри прямоугольника-суммы».

И рисуете прямоугольник, а внутри него слагаемые (рис. 8).

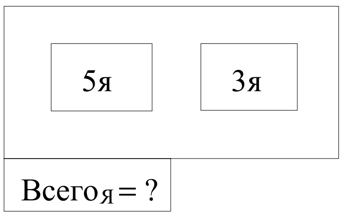


Рис. 8

Продолжаете: «Ведь все ВИДНО?! Все понятно? — Как две тарелки на столе: на одной 5 я(блок), на другой 3 я(блока). А слово «Всего$_я$» (с маленькой буквой «я» внизу будет обозначать у нас **сумму** и напоминать, что вопрос задачи: «Сколько ВСЕГО яблок?».

3. Об обозначениях!

Скажите ему: «Все хорошо, но давай сделаем еще одну вещь, которая очень пригодится нам в дальнейшем и облегчит жизнь. Яблоки на тарелках лежат, верно? Давай дадим нашим слагаемым **имена**, обозначим их буквами. Но возьмем не любые буквы, а такие, чтобы сразу было **видно**, что речь идет о нашей задаче. Раз «тарелка», то и **обозначим слагаемое буквой Т**. Но у нас сказано: **на одной** тарелке, **на другой** тарелке.

Чтобы и это было **видно**, будем обозначать первую тарелку — $\mathbf{T_1}$, а вторую тарелку — $\mathbf{T_2}$»[9].

[9] Маленькие цифры внизу у буквы Т называются индексами. Читается: «тэ-один и тэ-два». Точно также индексом (буквенным) является буква «я» у Всего.

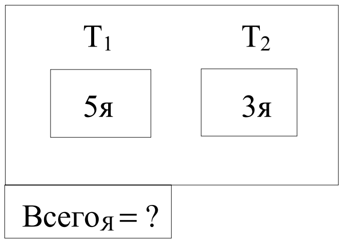


Рис. 9

Нарисуйте целиком заполненный ГРАЭЛ-(**∑**) — графэлемент суммы (рис. 9).

И спросите ребенка: «Посмотри, правда же все понятно? Мы нарисовали нашу задачу полностью. На нашем рисунке есть и одна, и другая тарелки (**T_1** и **T_2**). На них, соответственно, 5 яблок и 3 яблока (5я и 3я). И вопрос задачи — «Всего$_я$ = ?». Мы указали, что считаем именно яблоки, — видишь, буква «я» внизу? — и добавляете — Рисунок задачи будем **называть графической схемой** задачи (графсхемой). А само решение задачи в виде графсхемы будем **называть** блоком «Графики» или просто **Графика**.

4. Пришла пора блока «Алгебра».

Скажите ребенку: «А ты знаешь для чего мы обозначили тарелки **T_1** и **T_2**? Для того, чтобы научиться легко и безошибочно считать. В 7-м классе у вас будет алгебра. Сейчас ты узнаешь, что это такое. Чуть-чуть, конечно, но нам с тобой будет достаточно. Смотри».

И пишете:

Всего = $T_1 + T_2$

Говорите: «Видишь, мы просто нашу нарисованную задачу записали так, как пишут математики. Помнишь, у вас еще в первом классе было уравнение: $x - 3 = 5$? И как вы его решали? А вот так: $x = 5 + 3$. Почему его решают так, мы с тобой разберемся, когда будем «проходить» действие вычитания. А сейчас посмотри, как похоже то, что мы написали, и школьное уравнение».

Пишете одно под другим:

Всего = $T_1 + T_2$

$x = 5\ +\ 3$

Говорите: «Ну, разве это не одно и то же?! В уравнении мы ищем «*x*», а в задаче — «Всего». Просто по-разному **назвали** то, что нам неизвестно. В уравнении **складываем** числа 5 и 3 — **два** слагаемых. И в нашей задаче — **сложение** и **два** слагаемых.

Но мы же можем складывать (считать) только числа, а у нас — буквы. А вспомни, что означают эти буквы? Это просто **имена слагаемых**. Ну, а сами слагаемые **чему равны**, **из чего состоят**, **что содержат** внутри?». — **Обязательно все три синонимических вопроса должны быть произнесены!** Мы постоянно будем пользоваться терминами: **слагаемые** (т. е. тем самым — **их имена**) и **содержимое** слагаемых (**их числовые значения**). Это полностью соответствует понятиям: величина и числовое значение величины. Например, величина — **T_1**, ее числовое значение — 5я.

Продолжаете: «Значит, если мы в наше уравнение

Всего = $T_1 + T_2$ подставим содержимое (числовые значения) слагаемых **T_1** и **T_2**, то получим обычное школьное уравнение. Только вместо буквы «*x*», у нас будет написано слово «Всего» (ведь мы **ищем неизвестную сумму**)».

Пишете:

(1) Всего = $T_1 + T_2$

(2) Всего = 5я + 3я

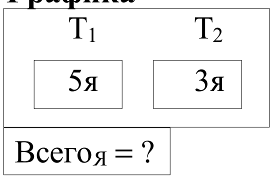
(3) Всего = 8я

Говорите: «Уравнение (1) мы будем называть «блок алгебры», а когда подставим вместо букв (имен) слагаемых их содержимое: 5я и 3я, то уравнение (2) будем называть «блок арифметики».

То есть у нас с тобой при решении задачи **будет 3 блока**, три шага, три этапа, которые мы просто будем называть: **Графика**, **Алгебра**, **Арифметика**».

Наконец, подводя итог, вы **говорите**: «Соединим теперь все три шага решения вместе. Все у нас должно быть **перед глазами**, поэтому будем **записывать** решение так (рис. 10).

Графика



Алгебра

Всего $= T_1 + T_2$

Арифметика

Всего = 5я + 3я | = 8я

Всего = 8я

Рис. 10

Обратите внимание на цепочку равенств (два знака «=») в «Арифметике». В школе детей приучают к следующей форме записи решения уравнений:

$x = 5 + 3$
$x = 8,$

то есть цепочка равенств в уравнениях **непозволительна**. Но для нас очень удобно при нескольких действиях **видеть сразу** числовой результат. Чтобы наша вспомогательная форма записи не противоречила школьной, я отделил вертикальной чертой второй знак «=».

О непротиворечивости форм записи решения методами ГрафАнализа и школьной я расскажу в конце этой главы.

Я очень много внимания уделил простейшей задаче 1. Но, во-первых, самый ответственный этап — первоначальное знакомство ребенка с принципами применения ГРАН. Во-вторых, эта книга не учебник, а изложение технологии решения, т. е крайне важна **последовательность ввода** тех или иных элементов, та или иная **акцентировка внимания** и т. п. В-третьих, самое важное то, чтобы ребенок «**почувствовал**», «**опредметил**» для себя «Графику» и «Алгебру», поэтому, в отличие от учебника, нам важна **не формальная строгость математической лексики**, а глубинное «чувствование» способа действия, из которого рождается вначале — интуитивное понимание, переходящее с годами в истинное знание. Ведь знать — значит уметь!

В силу этого я сохраняю математическую строгость изложения лишь в части основополагающих понятий и определений, основных терминов и отдаю предпочтение синонимичности употребления лексики, пользуюсь любой возможностью пояснить, опредметить тот или иной шаг, термин, понятие, действие, что, конечно, совершенно не означает безалаберности в использовании лексики, математической некорректности.

Автор учебника математики просто **не может** себе позволить подобных пространных «отступлений». Хотя бы в силу ограниченности объема учебника и столь **необходимых требований** соблюдения математической строгости и точности в использовании лексики. Именно поэтому я надеюсь, что «отработка» строгости будет осуществляться в дальнейших школьных уроках, а ГРАН будет тем, чем и должен быть — дополняющим учебник средством.

И еще. Слово «Всего» в уравнениях блоков «Алгебра» и «Арифметика» **до поры до временимы будем писать полностью**, с целью «впечатать» в память и сознание то, что сложение или счет отвечают на вопрос: «Сколько ВСЕГО?». Потом будем пользоваться сокращением — «**В**».

Однако продолжим.

Теперь, после подробного знакомства с основными принципами ГрафАнализа, вы предлагаете ребенку решить остальные задачи этого цикла по схеме: «Графика», «Алгебра», «Арифметика». **Все задачи построены на одном ГРАЭЛ-(∑)**. В задачах 2–6 сохраняется графическая разбивка логической структуры задачи: на каждой строке — одно слагаемое; вопрос выделен отдельно.

Сосредоточиваемся на:

1. ВИ́ДЕНИИ слагаемых и вопросе задачи — умении **видеть** «сколько ВСЕГО» в разных формах.

2. Удобных (мнемоничных) именах слагаемых (указаны рекомендуемые обозначения).

3. «**Размерности**» величин.

Задача 2

После прочтения ребенком текста **спрашиваем**: «**Ви́дим** слагаемые? Сколько их?.. Правильно, два. Как **удобно** их обозначить (назвать)?»

Может последовать ответ: $\mathbf{Я_1}$ и $\mathbf{Я_2}$.

Мгновенно направляем его вопросом: «**Что считаем**: яблоки или коробки?.. Верно, **считаем яблоки**. А **где** лежат яблоки?.. Правильно, в коробках. **Сравни** с первой задачей: **считали** яблоки, а яблоки лежали **на тарелках**. Слагаемых было **два**, по числу тарелок. И нам **удобно** было **назвать слагаемые** $\mathbf{Т_1}$ и $\mathbf{Т_2}$. А вот то, **что считали** — 5я и 3я — было у нас **содержимым** слагаемых.

Теперь мы опять **считаем яблоки**, а яблоки **лежат в коробках**. Так как **удобнее обозначить** слагаемые?»

Ответ наверняка будет правильным: $\mathbf{К_1}$ и $\mathbf{К_2}$ (одна и другая коробки, читается, как мы помним, ка-один и ка-два) Содержимым слагаемых будут 50я и 30я («размерность» — яблоки [я]).

Внимание!

Все время, в любой задаче, спрашивайте: «**ВИДИМ** слагаемые?» Употребление слова «**ВИДИМ**» — **крайне важно**. Ведь мы именно этому и хотим научить: **ВИДЕТЬ** слагаемые и отношения между ними.

Задача 3

«**Видим** слагаемые?.. Правильно, 500 и 300. Как обозначим?»

Опять может последовать $\mathbf{Я_1}$ и $\mathbf{Я_2}$ или $\mathbf{К_1}$ и $\mathbf{К_2}$, т. к. ребенка сбивает то, что написано: 500 ящиков конфет (два предмета — ящики и конфеты).

Вопрос: «**Что считаем** — ящики или конфеты» сразу наводит ребенка на нужную мысль. Раз <u>считаем ящики</u>, то это — **содержимое** слагаемых. <u>Где</u> лежат ящики? — **В машинах**. Значит, **удобные обозначения** (имена) слагаемых: $\mathbf{М_1}$ и $\mathbf{М_2}$. Содержимое слагаемых: 500я и 300я («размерность» — ящики [я]).

Внимание!

В вопросе задачи не употребляется <u>явно</u> «сколько ВСЕГО» (не сказано: «Сколько ящиков **на двух** машинах?») Если ребенок затрудняется с вопросом, поясните ему, что «сколько ВСЕГО» подразумевается, поскольку у нас написано «сколько… в магазин», т. е. подразумевается (слышится) фраза: <u>сколько всего</u> ящиков привезли в магазин <u>обе</u> машины?

То же относится к вопросам задач 4, 6, 7, 8. Подразумевается, соответственно: 4. Сколько стоили (ВСЕГО) спички? 6. Сколько времени (ВСЕГО) шел путешественник? 7. За какое время… — за какое (ВСЕ) время… 8. Каково расстояние… — каково (ВСЕ) расстояние, сколько (ВСЕГО) километров?

Задача 4

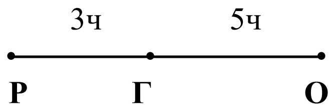
Обозначения слагаемых: **С** и **М** (Саша, Маша).
Содержимое слагаемых: 100к и 150к («размерность» — копейки [к]).

Задача 5

Обозначения слагаемых: $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ (автобусы один и другой).
Содержимое слагаемых: 88км и 102км («размерность» — километры [км]).

Задача 6

Задача арифметическая, а не «на движение». Чтобы увидеть это, сначала нарисуем задачу стандартным графическим способом в виде отрезков (рис. 11).



(Р, Г, О — река, гора, озеро) Рис. 11

<u>Видим</u>, что речь идет <u>о слагаемых</u>: 3 часа и 5 часов, а отнюдь не о движении ($S = V \cdot T$). Значит, используем ГРАЭЛ-(∑).

Обозначения. Если 3-й класс, то лучше так и оставить, прямо по тексту: **Г** — время до горы, **О** — время от горы до озера. Если 5-й класс и старше, то они уже знакомы с формулой вычисления пути при равномерном движении. А поскольку в дальнейшем в физике всегда будут использоваться эти три буквы: ***S*** — путь, ***T*** — время, ***V*** — скорость, то предложите ребенку «привыкнуть на будущее» и ввести обозначения в общем-то ему знакомы: $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ или $\mathbf{T_Г}$ и $\mathbf{T_О}$ (лучше $\mathbf{T_Г}$ и $\mathbf{T_О}$, в данном случае — мнемоничнее).

Содержимое слагаемых: 3ч и 5ч («размерность» — время, часы [ч]).

Замечание

Пусть ГРАН не будет для вас абсолютно универсальным средством. Если необходимо, пользуйтесь сначала **любыми** графическими иллюстрациями, например, как та, которую я нарисовал.

Но осознав арифметическую суть задачи, т. е. то, что речь идет о слагаемых и суммах, мгновенно переходите к ГРАН.

Задача 7

Обозначения слагаемых аналогичны задаче 6.
3-й класс: **П** и **А** (поезд, автобус).
5-й класс и старше: $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ или $\mathbf{T_П}$ и $\mathbf{T_А}$ (время поездом, время автобусом, **Т** — время).
Содержимое слагаемых: 18ч и 3ч («размерность» — время, часы [ч]).

Задача 8

Обозначения слагаемых — аналогичны задаче 7:

А и **П** (автобус, поезд), либо $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$ или $\mathbf{S_А}$ и $\mathbf{S_П}$ (расстояние автобусом, расстояние поездом, **S** — путь).

Содержимое слагаемых: 120км и 780км («размерность» — путь, километры [км]).

Задачи 9–11

Слово «еще» вместе с вопросом «сколько…» (т. е. сколько всего) дает нам очевидный ГРАЭЛ-(Суммы) и задача 9 на фоне задач 10–11 не должна вызвать никаких затруднений, хотя и может показаться, что речь идет о вычитании: синицы **улетели**.

Внимание!

На рис. 12 я воспроизвожу решение третьеклассника на 3-м занятии (задачи цикла III).

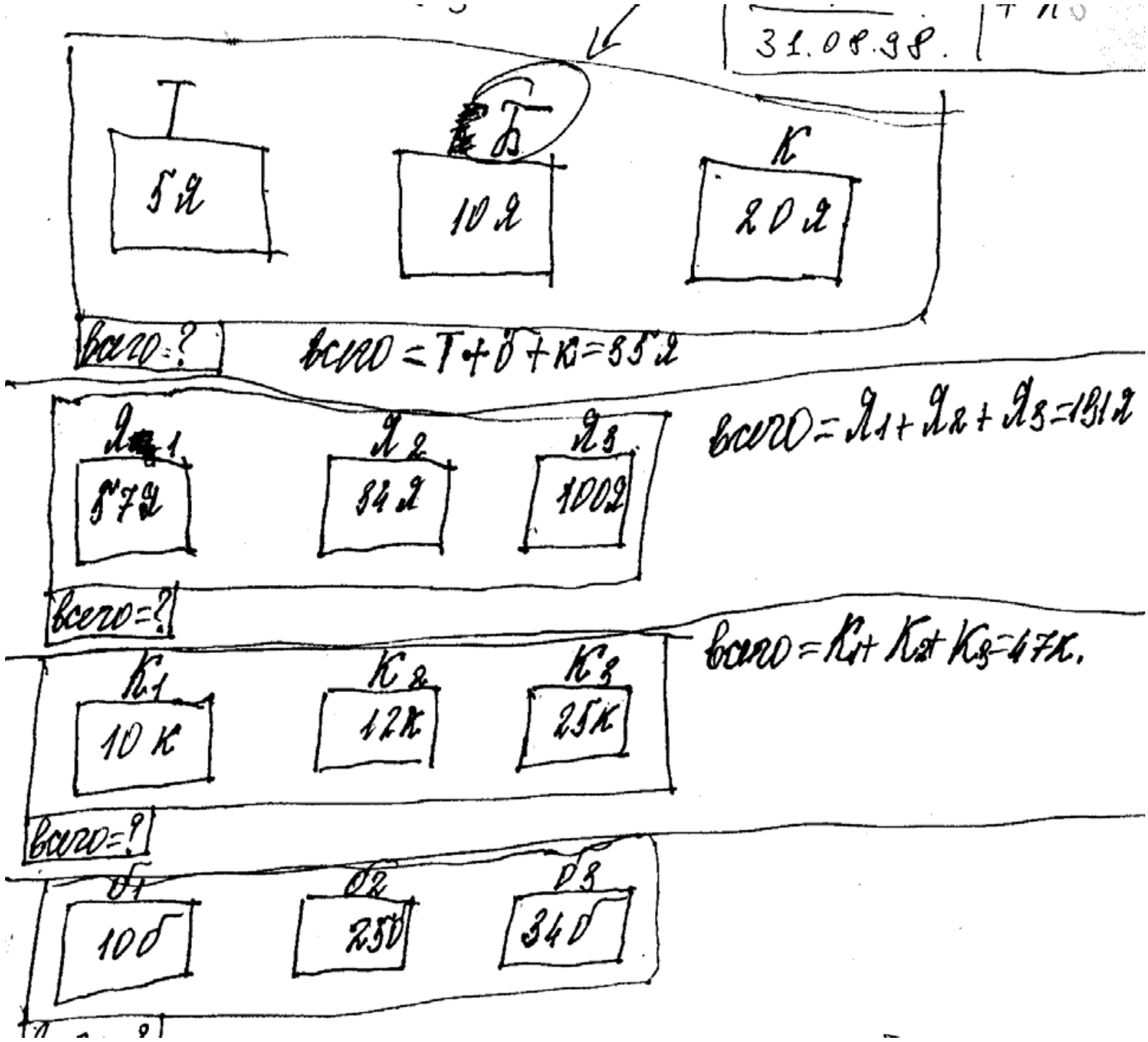


Рис. 12

Вы видите, с каким трудом рисуются «квадратики» слагаемых и прямоугольник суммы, как неэффективно используется пространство листа, как наезжает верхняя линия «суммы» на обозначения слагаемых ($б_1$, $б_2$, $б_3$). Учтите, что это может продолжаться **довольно долго**. Ребенок должен **привыкнуть**, «**набить руку**», просто научиться **набрасывать** «Графику»; **научиться рассчитывать** нужное для рисунка и решения место на листе с учетом числа слагаемых, с учетом того, что ему нужно **поставить над** «квадратиками» имена слагаемых, **а внутри** «квадратиков» — вписать их содержимое. Сравните с рис. 13, который я именно «набросал». У меня линии тоже **не очень ровные**. Но **ясно видны** все существенные элементы задачи. Все компактно, **но не тесно**. Числа и буквы **легко читаются**. Все обозримо, **но не растянуто** на весь лист. Вот такой аккуратности графики вы должны добиваться (не спеша, приучая постепенно!). Должны добиваться того, чтобы **минимум** времени (в пределах 1–3 минут в зависимости от степени сложности задачи, возраста и практики ребенка) уходило на рисование, а главным было б ВИДЕНИЕ слагаемых и сумм, быстрое — автоматическое — именование слагаемых и т. п.

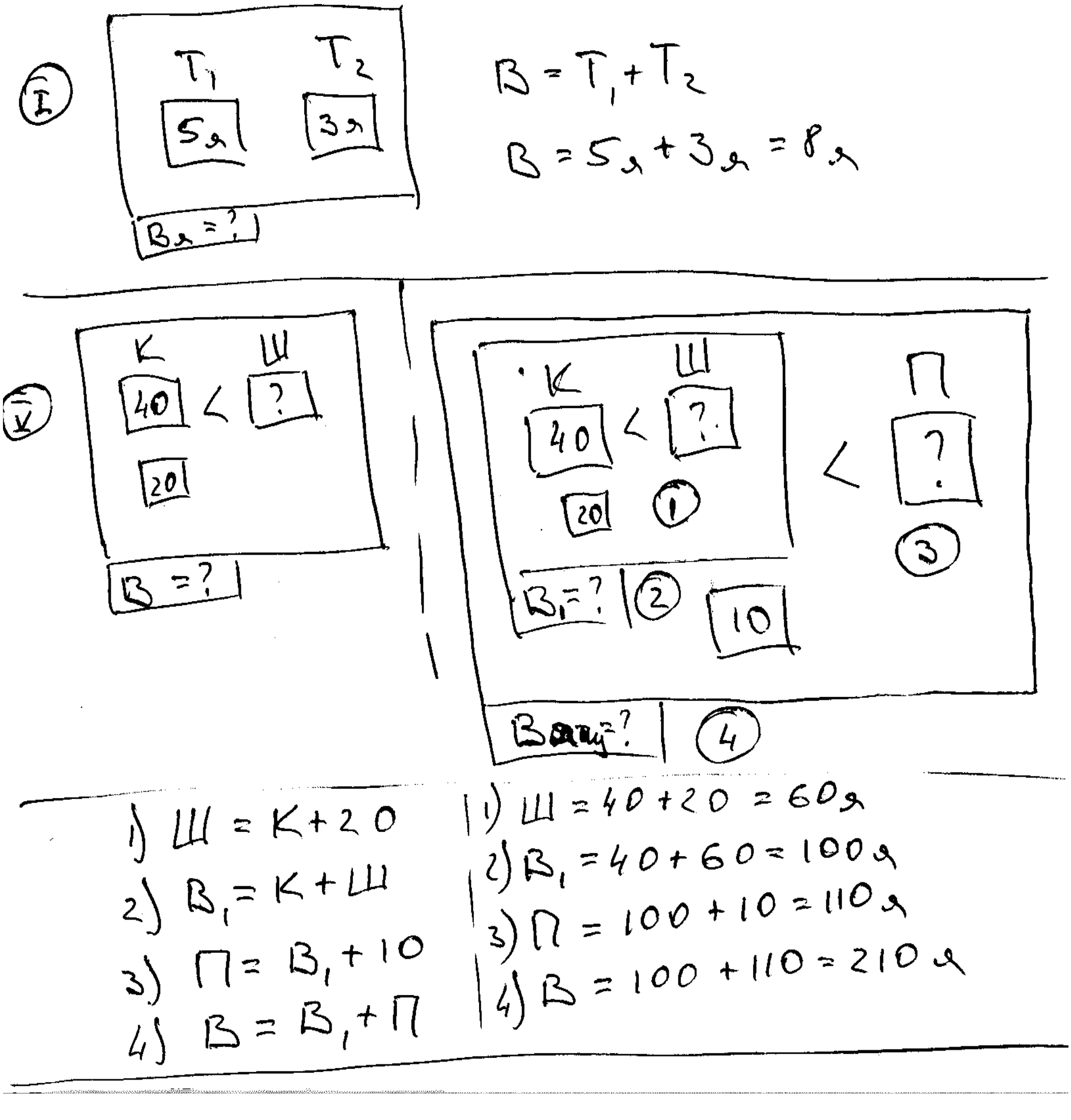


Рис. 13

В дальнейшем, в физике и химии, школьники постоянно будут пользоваться не «рукописными», а печатными буквами. Вы видите на рис. 12, что имена слагаемых написаны так, как этому учат на уроках русского языка. Взгляните, как выписана буква «**Б**» на верхней картинке, буква «**К**», маленькие (строчные) буквы «**б**» на нижних рисунках — прямо по прописям, со всеми завитушками. Ребенок будет вам говорить, что так ему удобнее, так он привык. **Требуйте, чтобы буквы — имена слагаемых — были только «печатными» и большими (прописными)! Объясните**, что вы занимаетесь не русским языком, во-первых, а во-вторых, это ему пригодится в дальнейшем на уроках физики и химии. **Добавьте**, что у вас с ним **нет времени** на то, чтобы «выводить буковку», а вот печатную букву он, после небольшой тренировки, будет писать очень быстро, и она будет легко и однозначно читаться (будет легка для восприятия, для ви́дения). Пусть он сам сравнит рис. 12 и рис. 13 и скажет, где изображение (**включая уравнения из «Алгебры»**) легче для чтения и ви́дения.

Заметьте, что задачи 7–8 даются сплошным текстовым потоком, т. е. слагаемые и вопрос уже не выделены на отдельных строках. К тому же, задачи явно стали многословнее. **Очень важно, чтобы к этому моменту** первого занятия ребенок уже сразу **ВИДЕЛ** слагаемые! Если вы **не пропустите** ни одной предыдущей задачи **и скрупулезно выполните все технологические рекомендации**, описанные в сценарии задачи 1, то для вашего ребенка это ви́дение не составит проблем. Но в задачах 7–8 на первый план выходит нечто иное, чем ви́дение двух слагаемых. После того, как на ваш вопрос: «ВИДИМ слагаемые?» — ребенок, **добросовестно прочитав весь текст**, скажет, что да, два слагаемых, как и прежде, — **обязательно** спросите его вот о чем: «Скажи, вот эта фраза «Маша поехала к бабушке в деревню» («После каникул Маша вернулась из деревни домой») **что-нибудь говорит нам**? Нужна она нам?.. А раз не нужна, то будем впредь просто «скользить глазами» по таким фразам. Для нас это будет **словесный мусор**, на который вообще **не стоит обращать внимание**. Мы же знаем, **что́ надо искать в задаче: слагаемые и суммы!** Значит, читая задачу, **мы ищем, прежде всего**, **числа** — они опорные точки для нашего внимания. **Раз число, значит — слагаемое!**»

Немного о рисовании.

Обычно дети рисуют прямоугольнички сумм и слагаемых одним движением пера и прямоугольники получаются кособокими и некрасивыми. Сразу приучайте ребенка рисовать отдельными линиями — отрезками. Пожалуй, лучше всего такая последовательность: левый вертикальный отрезок, верхний — под прямым углом, нижний и правый **параллельно** первым двум. Тогда легко будет получаться нечто подобное рис. 13. Кроме того, умение набрасывать прямоугольнички таким образом крайне пригодится на уроках геометрии.

Цикл II. Больше НА
(задачи с 2 слагаемыми в одно действие, ГРАЭЛ-(> на))

1. На одной тарелке 5 яблок,
на другой — на 3 яблока больше.
Сколько яблок на другой тарелке? (*)

2. В одной коробке 50 яблок,
в другой — на 30 яблок больше.
Сколько яблок в другой коробке? (*)

3. Одна машина привезла в магазин 500 ящиков конфет,
другая машина привезла на 300 ящиков больше.
Сколько ящиков конфет привезла в магазин вторая машина? (*)

4. У Саши было 100 копеек.
у Маши было на 150 копеек больше.
Сколько денег было у Маши? (*)

5. Один автобус проехал 88 км,
а другой автобус проехал на 102 км больше, чем первый.
Какое расстояние проехал второй автобус? (*)

6. За 3 часа путешественник дошел от реки до горы.
Чтобы дойти от горы до озера он потратил на 5 часов больше.
За какое время путешественник добрался от горы до озера? (*)

(удаляется графическая разбивка задачи)

7. Маша поехала к бабушке в деревню. Поездом она ехала до Ростова 3 часа, а от Ростова до деревни — автобусом на 2 часа дольше. Сколько времени Маша ехала от Ростова до деревни? (*)

8. После каникул Маша вернулась из деревни домой. До вокзала она доехала автобусом и проехала 120 километров. А затем на поезде она проехала на 1080 километров больше. Какое расстояние Маша проехала на поезде? (*)

Задачи с выражениями, синонимичными отношению Больше НА

9. Рубашка стоит 150 рублей, а джинсы — на 430 рублей дороже. Сколько стоят джинсы? (*)

10. Сыну 8 лет. Отец старше сына на 22 года. Сколько лет отцу? (*)

11. Третьеклассница Саша делает уроки за 40 минут. Девятиклассница Маша сидит за уроками на 80 минут дольше. Сколько времени тратит на уроки Маша? (*)

12. До ближайшей к Солнцу звезды — α Центавра — 4 световых года. Самая яркая звезда — Сириус — на 3 световых года дальше от Солнца, чем альфа Центавра. Каково расстояние от Солнца до Сириуса?[10] (*)

Дроби

13. В первый день турист проехал $\frac{5}{12}$ всего пути, а во второй — на $\frac{2}{15}$ больше. Какую часть пути турист проехал во второй день? (*)

[10] Световой год — расстояние, которое свет проходит за год ~ 10^{16}м

Ответы: 1) 8 я.; 2) 80 я.; 3) 800 я.; 4) 250 к.; 5) 190 км; 6) 8 ч.; 7) 5 ч.; 8) 1200 км; 9) 580 руб.; 10) 30 л.; 11) 120 м(инут); 12) 7 л (световых лет); 13) $\frac{11}{20}$.

Сценарий.

В этом цикле мы с вами рассмотрим второй логический элемент арифметики — отношение «Больше НА» (столько-то). Это первое (**и важнейшее**) из трех основных отношений. Ему будет соответствовать в ГрафАнализе графический элемент, который будем **называть** ГРАЭЛ отношения «Больше НА» или просто **ГРАЭЛ-(Больше НА)**. **Обозначать**: **ГРАЭЛ-(> на)**. И **рисовать** так, как на рис. 14.

$\boxed{\boldsymbol{a}} > \boxed{\boldsymbol{b}}$

на $\boxed{\boldsymbol{c}}$

Рис. 14

Сразу скажу, что понятие отношения «Больше НА» так же неопределимо, как и понятие суммы. В нем выражена идея упорядоченности, строгой последовательности ряда натуральных чисел, т. е. то, что число 2 следует за числом 1, число 3 — за числом 2 и т. д[11].

Однако формальная неопределимость отношения «Больше НА» никоим образом не должна нас смущать. Ведь уже дошкольник может сказать, что больше — 3 яблока или 5 яблок, если только эти яблоки будут у него перед глазами.

Давайте поэтому по-прежнему опираться на интуитивно ясные ребенку понятия целого (суммы) и частей целого (слагаемые).

Цель этого цикла состоит в том, чтобы исходя из представления: **целое состоит из частей** — научить ребенка уверенно и безошибочно ВИДЕТЬ отношение «Больше НА». А поскольку «больше-меньше» — понятия относительные: если $\boldsymbol{a > b}$ **то** $\boldsymbol{b < a}$, и наоборот, **то твердо усвоив отношение «Больше НА»**, **сводящееся к действию сложения**, в более сложном действии вычитания мы не будем испытывать никаких затруднений с понятиями «меньше на» и «на сколько больше-меньше?».

Кратко как технологический принцип: **в арифметике мы не знаем, что такое «меньше» — только «больше»**!

Самую суть отношения «Больше НА» составляют, как я уже сказал, понятия целого и частей. Что означает фраза «5 яблок БОЛЬШЕ, чем 3 яблока»? То, что **целое** — 5 яблок (ВСЕГО) — можно разбить **на две части**: 3 яблока и 2 яблока. Аналогично по отношению к высказыванию «число 5 больше числа 3» мы можем сказать, что сумма — число 5 — состоит из двух слагаемых — чисел 3 и 2.

Вот, собственно, и все, что мы должны уяснить. Предельно просто. Но вы сами, читатель, к концу этой главы, увидите, каких удивительных результатов в решении задач можно добиться, опираясь только на ГРАЭЛ-(Суммы) и ГРАЭЛ-(Больше НА).

---

[11] В математической логике опираются на отношение, выражаемое термином «предшествует» («В теории множеств... отношение $x < y$... называется отношением порядка. Для элементов, находящихся в отношении порядка x < y, иногда употребляется выражение «*x* предшествует *y*») [13, с. 133]. К сожалению, — для методики! — арифметика, опираясь на отношение порядка, приходит к тому, что центральным становится отношение «меньше на» (столько-то). Когда в арифметике говорят о равенстве и неравенстве натуральных чисел, то центральным неравенством определяют неравенство «меньше на»: «Если же A есть правильная часть множества B, то говорят: число *a* меньше числа *b* — и пишут: $a < b$» [11, с. 11]. Такое формальное следование за математической логикой нас совершенно не устраивает, так как порождает трудноустранимые проблемы у ребенка с дифференциацией понятий «больше-меньше».

Приступаем к работе.

Задача 1

1. Скажите ребенку, что сегодня вы покажете ему **вторую — очень важную — логическую детальку** почти всех сложных задач. Что это опять будут для него не задачки, а просто один из элементов задач, и что через 2–3 дня он сам увидит, как легко из двух основных деталек (ГРАЭЛов) **конструировать** решения задач.

2. Пусть он прочтет задачу 1 (разумеется, **вслух**!). И опять он сразу скажет ответ — 8 яблок. Но вы просто **предложите**: «Давай **по-настоящему** разберемся с тем, что значит: на другой тарелке **на 3 яблока больше**, чем на первой. И научимся **правильно рисовать** это «больше».

3. Говорите: «Как ты узнал, что на другой тарелке 8 яблок… Ты просто прибавил к 5я ЕЩЕ 3я, верно? А если записать, то будет:

5я + 3я = 8я,

то есть получается, что 8 яблок состоят **из двух частей**: 5 яблок и 3 яблока. И просто число 8 — это сумма двух слагаемых: 5 и 3, то есть:

(1) $5 + 3 = 8$.

8 яблок **больше** 5 яблок? Число 8 **больше** числа 5?.. Правильно.

Для слова «больше» в математике есть специальный **знак** «>», ты этот знак «>» (больше) **с 1-го класса знаешь**. И мы **вместо фразы** «8 больше 5» можем написать **отношение**: $8 > 5$ (читается: восемь больше пяти). **Отношение** — это просто **какая-то связь** двух «предметов»,— **поясняете вы мимоходом**. — Наши числа **связаны друг с другом**?.. Конечно, одно из них больше другого. Мы их сравниваем. Вот мы и говорим: **отношение «Больше НА»**.

А теперь давай **не просто** напишем $8 > 5$, а как в нашей задаче — там ведь сказано, что «больше на 3 яблока». Вот и напишем:

(2) $8 > 5$ на 3.

Взгляни на нашу сумму (1). Что получается, видишь?..

А то, что сказать: $8 > 5$ на 3 и написать: $8 = 5 + 3$ — это ОДНО И ТО ЖЕ!

То есть самое важное то, что **неравенство**[12] (2) и **равенство** (1) означают, что 8 «**состоит**» из 5 и 3.

Но с неравенством мы не знаем, что делать, а вот **с равенством обращаться умеем** — можем посчитать.

Давай поэтому договоримся навсегда: **как только** мы видим, что одно число ***a*** **больше** другого числа ***b*** **на сколько-то единиц** ***c***, то **сразу пишем неравенство** (3), подобное неравенству (2):

(3) $a > b$ на c.

А такое неравенство, как мы выяснили «на числах», мгновенно переводится в равенство:

(4) $a = b + c$.

То есть если число ***a*** **больше** числа ***b*** **на** ***c*** единиц, то это будет означать, что число ***a*** «**состоит**» из чисел ***b*** и ***c***».

[12] Если строго, то (2) в виде неравенства нужно писать: $8 > 5$. Но нам удобно будет говорить: неравенство по отношению к форме (2).

Внимание!

Если — и почти наверняка! — вы увидите «**по глазам**» ребенка, что (3) и (4) для него непонятны, слишком абстрактны, — сразу же приведите несколько числовых примеров. Например, **скажите**: «Давай конкретно, на числах. У нас есть два числа: 4 и 6. Какое из них **больше**?.. Правильно, **6 больше 4**. **На сколько** больше?.. Верно, **на 2**. Значит, можем записать **отношение «Больше НА» как неравенство**:

(5) $6 > 4$ на 2.

А сколько будет 4 **и** 2? Можем написать **сумму** (ВСЕГО) **как равенство**:

(6) $6 = 4 + 2$.

Правильно мы с тобой написали? (**Прочитываете вслух** (5) и (6)).

Так значит (5) и (6) — ОДНО и ТО ЖЕ?

Сравни-ка с нашими «буквами» (показываете на (3) и (4)): буква ***a*** — это наше число 6, буква ***b*** — число 4, буква ***c*** — число 2. Верно?»

Если понадобится, несколько раз проведите всю цепочку рассуждений, идущих после «**Внимание**!»

Предупреждение!

В зависимости от возраста ребенка и его меры восприятия будьте осторожны. Не добивайтесь, так сказать, «абсолютного» понимания, «**сразу**». В дальнейшем, при любой заминке в записи отношения «Больше НА» «в буквах» — сразу приводите числовой пример, сопоставляемый с буквенным.

4. Рисунок ГРАЭЛ-(> на).

Говорите: «А теперь, смотри, как мы будем **рисовать** то, что одно число больше другого — наше отношение «Больше НА». Прямо по нашей задаче.

Что мы ВИДИМ?.. — Две тарелки. Ну и нарисуем их быстренько, это мы умеем».

Рисуете (рис. 15).

T_1 T_2

$\boxed{}$ $\boxed{}$

Рис. 15

Говорите: «На первой тарелке $\mathbf{T_1}$ — 5 яблок. Это мы можем нарисовать. А вот на второй тарелке T_2, мы **не знаем** сколько яблок. Это еще нужно узнать, посчитать. Давай **внутри «квадратика» поставим вопросик — «?»** (рис. 16).

T_1 T_2

$\boxed{5я}$ $\boxed{?}$

Рис. 16

«Теперь **нарисуем** то, что на второй тарелке $\mathbf{T_2}$ НА 3 яблока БОЛЬШЕ, чем на первой».

Рисуете (рис 17).

T_1 T_2

$\boxed{5я} < \boxed{?я}$

$\boxed{3я}$ на

Рис. 17

Внимание!

Ребенок может сказать, что вы неправильно нарисовали знак «больше». Что на самом деле вы нарисовали знак «меньше». Кстати, подобная ошибка восприятия является стандартной у школьников.

Связано это вот с чем.

Обычно, в школе пишут **знак «больше»** острием, **вершинкой ВПРАВО**. Например:

$8 > 5$.

А **знак «меньше»** — **острием ВЛЕВО**. Например:

$3 < 7$.

На нашем рис. 17 знак «больше» (ведь $\mathbf{T_2}$ больше, чем $\mathbf{T_1}$) нарисован острием ВЛЕВО. Вот ребенок и делает вывод, что вы нарисовали знак «меньше».

Этот пример — яркая иллюстрация того, что ребенок не понимает самой сути отношения «Больше НА», того, что **большее** число «**состоит**» **из меньшего** числа **и** ЕЩЕ «**чего-то**» и не может увязать свое «понимание» с математической символикой.

Нарисуйте рядом с рис. 17 еще один — рис. 18, расположив «слагаемые» так, чтобы знак «больше» был обращен **острием ВПРАВО**.

$$\begin{array}{ccc} T_2 & & T_1 \\ \boxed{?я} & > & \boxed{5я} \\ & на & \boxed{3я} \end{array}$$

Рис. 18

Скажите: «А сейчас — правильно?..» Он, конечно же, ответит «да». **Продолжайте**: «Давай посмотрим на оба рисунка. Что значит, что $\mathbf{T_2}$ **больше** $\mathbf{T_1}$ **на** 3, помнишь?.. Это значит, что $\mathbf{T_2}$ «**состоит**» из $\mathbf{T_1}$ (5я) и еще 3я. У нас на рис. 18 как раз и ВИДНО: с одной стороны (**слева**) — $\mathbf{T_2}$, а с другой стороны (**справа**) T_1 = 5я и ЕЩЕ 3я.

Знак «больше» своим **острием** как раз и **показывает**, **из чего «состоит»** $\mathbf{T_2}$.

Сравни с рис. 17.

Опять, с одной стороны (**теперь уже справа**) — $\mathbf{T_2}$, а с другой стороны (**теперь уже слева**) T_1 = 5я и ЕЩЕ 3я.

И знак «<» опять же **острием показывает**, **из чего «состоит»** $\mathbf{T_2}$.

Вывод какой?.. А тот, что я правильно нарисовал знак «**больше**» **в обоих случаях**. То есть нужно смотреть **не на то** — вправо или влево направлено острие знака «больше», а запомнить, что **со стороны «раструба»** находится **большее** число, а **со стороны острия** — **меньшее**».

Внимание!

Напомните ребенку, что в арифметике мы «**не знаем**», **что такое «меньше»**. Мы **знаем только «больше»!!!**

5. Наконец, вы **говорите**: «А теперь нарисуем все вместе — «Графику», «Алгебру» и «Арифметику». И воспроизводите рис 19.

Графика

$$\begin{array}{ccc} T_1 & & T_2 \\ \boxed{5я} & < & \boxed{?я} \\ \boxed{3я} & на & \end{array}$$

Алгебра

(7) $T_2 > T_1$ на 3

(8) $T_2 = T_1 + 3$

Арифметика

$T_2 = 5я + 3я \mid = 8я$

$T_2 = 8я$

Рис. 19

Внимание!

<u>**Последовательность**</u> **«ввода» всех трех блоков:**

1. Нарисовав «Графику», вы **говорите**: «**Переведем** «Графику» в «Алгебру». — **После этого** вы выписываете неравенство (7) в «Алгебре» и добавляете: — Посмотри на «Алгебру», неравенство, которое я написал (7). Четко видно, что это знак «больше» острием ВПРАВО, как обычно в школе.

Сравни с «Графикой». На «Графике» наш знак — острием ВЛЕВО.

Но все равно это знак «больше», хоть и выглядит как знак «меньше», т. к. $\mathbf{T_2}$ больше, чем $\mathbf{T_1}$.

Теперь ты уже не спутаешь знаки. **ВИДНО, что из чего состоит** — большее число находится со стороны «раструба», а меньшее — со стороны острия».

2. Продолжаете: «Мгновенно неравенство переводим в равенство».

Пишете равенство (8).

3. Говорите: «Ну вот, нам все знакомо — осталось в «Арифметике» подставить содержимое $\mathbf{T_1}$ и посчитать».

Остальные задачи этого цикла построены на том же ГРАЭЛ-(> на).

Задачи 1–8 дословно повторяют аналогичные задачи цикла I, только вместо суммы мы рисуем отношение «Больше НА». Сделано это для того, чтобы ребенок закрепил умение автоматически выбирать имена слагаемых.

Все технологические пояснения к циклу I используются и в цикле II. Ребенок должен уже уметь относительно быстро набросать «Графику» с графэлементом «Больше НА».

Сосредоточиваемся на:

ВЙДЕНИИ отношения «Больше НА». Достигается это направляющими вопросами, типа: что видим?.. видим «Больше НА»? (перемежая полным вопросом: видим отношение «Больше НА»?)… что больше чего?..

В «Алгебре» **обязательно пишем сначала неравенство** (см. рис. 19, (7)) **и только потом** равенство (8).

В «Графике» и «Алгебре» **постоянно следим** за ПРАВИЛЬНЫМ написанием знака «больше».

В «Графике» **обязательно пишем** предлог «**на**».

Неторопливо стремимся к тому, чтобы расположение всех 3 блоков решения на листе было четким и компактным (но не тесным). За образец берем рис. 19 **и ваш собственный опыт решения задач средствами ГРАН. — Ведь вы сами, читатель, нарисовали ВСЕ задачи?!**

При малейшей заминке, неточности, сомнении — сразу говорите: «А что больше?.. Что из чего состоит?.. Напиши сначала неравенство с «Графики», а потом переведи в равенство». — **Как технологический прием**.

Стандартная ошибка в рисовании ГРАЭЛ-(> на) (рис. 20)

Смысл ошибки ясен из рис. 20. Она **отражает непонимание** ребенком того факта, что **большее** число ($\mathbf{T_2}$) **состоит** из **меньшего** числа (слагаемое $\mathbf{T_1}$) и ЕЩЕ «чего-то» (слагаемое 3я).

T_1		T_2		T_1		T_2
$\boxed{5я}$	>	$\boxed{?я}$	**либо**	$\boxed{5я}$	>	$\boxed{?я}$
$\boxed{3я}$ на						на $\boxed{3я}$

Рис. 20

Ликвидируется уже знакомыми **направляющими вопросами**: «Что из чего состоит? Тарелка-1 **из** Тарелки-2 и ЕЩЕ 3-х яблок или Тарелка-2 — **из** Тарелки-1 и 3я? **Что больше чего**? По тексту у нас $\mathbf{T_2}$ больше $\mathbf{T_1}$, так? Значит, $\mathbf{T_2}$ **состоит** из…»

Как избежать путаницы «больше-меньше», которая возникает при поверхностном восприятии знаков «>» или «<», когда ребенок ориентируется не на смысл отношения, а на «направление острия» знака (право-лево), мы с вами обсудили выше.

Далее. Обратите внимание на задачи 9–13. Тексты задач специально перегружены «словесным мусором» Это уже не должно (почти) составлять какую-либо трудность для ребенка. Задачи служат той цели, чтобы ребенок ВИДЕЛ отношение «Больше НА» в ряду **синонимичных** выражений: дороже (на), старше (на), дольше (на), выше (на), дальше (на). Синонимы, в конечном итоге, не должны становиться препятствием в процессе осмысления задачи.

Резюме Циклов I и II.

Мы узнали, что **действие сложения**, выросшее из счета, — первично, неопределимо.

С ним неразрывно связаны первичные понятия суммы и слагаемых, в которых и выражается действие сложения. Для суммы мы ввели **первый** из графических элементов — **ГРАЭЛ-(Σ)**.

Отношение «Больше НА», отражающее упорядоченность ряда натуральных чисел, также является первичным. Оно углубляет понятие суммы. Для него введен второй графэлемент — **ГРАЭЛ-(> на)**.

С точки зрения ГрафАнализа, для нас наиболее важным является вот что. **Большее** число в отношении «Больше НА» есть СУММА двух слагаемых. Тем не менее, вы, наверное, обратили внимание на то, что сумма (ВСЕГО) и «Больше НА» рисуются совершенно поразному: два **разных** ГРАЭЛа. **Большее** число в «Больше НА» рисуется **не как сумма, а как слагаемое**. И это не случайно. В дальнейшем вы убедитесь в том, что большее число в ГРАЭЛ-(> на) практически всегда выступает в роли слагаемого, а не суммы. Более того, сумма тоже часто является слагаемым. Поэтому мы с вами постоянно будем пользоваться «вопросами ви́дения»: «Видим слагаемые?.. Сколько их?..»

Вы заметили, несомненно, и то, как подробно — может показаться на первый взгляд, что до утомительности подробно — я расписываю каждый ваш шаг: «скажите», «нарисуйте» и т. п. На самом деле вы, разумеется, не должны учить наизусть все технологические фразы. Но рисуя задачи «**пошагово**», вы сами почувствуете дух ГрафАнализа, и сами **увидите**, что **на первых порах** ничего нельзя пропускать. Два первых — важнейших! — ГРАЭЛа нужно вводить только последовательно, обращая внимание ребенка на все «мелочи». Конечно же вы будете говорить «своими словами», но цель — научить ребенка ВИДЕТЬ ГРАЭЛы — будет основной и ее достижение возможно только на уровне технологических приемов.

В последующем мои комментарии будут кратки, поскольку я буду опираться на знание и усвоенность технологических приемов первых 2-х циклов.

И последнее. Не будьте **слишком серьезны** во время занятия. 40 минут проходят быстро, но они наполнены интенсивнейшей работой. Смейтесь, шутите. У вас наверняка найдется в запасе пара-другая реплик, типа: «Ну, ты даешь!», «Шестью восемь — сорок два? — Великолепно! Новое слово в математике!» и т. п. Однако ни в коем случае не подавляйте ребенка фразами, сводящимися к тому, что он «дубина» и им подобными.

Занятие должно быть для ребенка источником радости и зарождающейся уверенности в собственных силах. — **Об этом я говорю как об одном из важнейших технологических приемов!**

Цикл III. Сколько ВСЕГО (задачи более чем с 2 слагаемыми: 1–2 действия)

1. На кухонном столе на тарелке лежат 5 яблок, на блюде — 10 яблок, а в кастрюле — 20 яблок. Сколько яблок на кухне? (•••)

2. В погребе стоят 4 ящика. В одном ящике 35 яблок, в другом ящике — 53 яблока, в третьем — 100 яблок, а в четвертом — 150 яблок. Сколько яблок в погребе? (••••)

3. В магазин привезли овощи. Первая машина привезла 57 ящиков помидоров. Вторая — 34 ящика моркови, а третья — 100 ящиков капусты. Сколько ящиков с овощами привезли в магазин? (•••)

4. На вокзал привезли 10 клеток со львами, 12 клеток с дрессированными собачками и 25 клеток с попугаями. Сколько клеток с цирковыми животными привезли на вокзал? (•••)

5. Рыбаки баркаса в Тихом океане засолили 10 бочек хамсы, 25 бочек сельди и 34 бочки хека серебристого свежемороженного. Сколько бочек рыбы засолили рыбаки? (•••)

(в вопросе задачи вводится проверка выполнение условия)

6. У коллекционера был кляссер (альбом для марок) на 100 марок. На день рождения ему подарили 30 английских марок, 50 французских и 20 японских. Уместятся ли подаренные марки в кляссер? (•••)+С

7. Трое продавцов собрались ехать на рынок. У одного было 5 сумок с вещами для продажи, у другого — 7 сумок, а у третьего — 12 сумок. Они наняли машину, в которую вмещалось 24 сумки. Смогли ли продавцы погрузить в машину весь свой товар? (•••)+С

8. У Саши было 50 рублей, а у Маши — 37 рублей. Ване мама дала 18 рублей. Коробка конфет стоит 100 рублей. Хватит ли у ребят денег, чтобы купить коробку конфет? Как изменится ответ, если у Саши было 45 рублей, 40 рублей? (•••)+С

9. Во время интервью говорящий попугай сказал 150 слов по-французски, 250 слов по-русски и еще 300 слов добавил по-испански. На магнитофонную ленту умещается 550 слов. Смогли ли записать на ленту все слова, сказанные попугаем? (•••)+С

10. Туристу надо было добраться до Африки. На машине он проехал 320 километров. На поезде — 680 километров. На пароходе он проплыл 200 километров. А самолетом за 1 час пролетел 800 километров. Добрался ли турист до Африки, если до Африки 2500 километров? (••••)+С

11. Туристическая фирма «Хоть к черту на кулички» в понедельник продала путевок на 250 $, во вторник — на 300 $, в среду — на 150 $, в четверг — на 500 $, а в пятницу не купили ни одной путевки. Сколько долларов за неделю заработала турфирма? (•••••)

Дроби.

12. Рабочий выполнил за первый день $\frac{4}{13}$ всей работы, за второй — $\frac{5}{13}$, за третий — $\frac{3}{13}$ а) Выполнил ли рабочий за три дня всю работу? б) Решить задачу с другими данными: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ и $\frac{5}{24}$ (•••)

Ответы: 1) 35 я; 2) 338 я; 3) 191 я; 4) 47 к; 5) 69 б; 6) В = 100 м, уместятся; 7) В = 24 с, смогут; 8) а. В = 105 р, хватит, б. В = 100 р, хватит, в. В = 95 р, не хватит; 9) В = 700 с, не смогут; 10) В = 2000 км, не добрался; 11) 1200 \$; 12) а. $В = \frac{12}{13}$ (меньше 1 — всей работы, не выполнил), б. $В = \frac{24}{24}$ — выполнил.

Сценарий.

Данный цикл закрепляет понятие суммы, ее ви́дение.

Если рассматривать задачи цикла арифметически, то это будут задачи в несколько действий, поскольку для нахождения суммы нескольких слагаемых нужно в каждом действии работать с двумя слагаемыми.

Но вот если подходить к задаче алгебраически, то каждая задача будет выражена одним уравнением (в качестве неизвестного — сумма).

Еще одной целью цикла является знакомство с разными системами обозначений слагаемых, что подробно отражено в комментарии к задаче 3.

Наконец, задачи 6–10 введены для того, чтобы видеть отношение «Больше НА» в форме «выполнения условия» (не осуществляя реального счета — на сколько больше-меньше, а опираясь на натуральный ряд как упорядоченный, в котором одно число обязательно больше другого, кроме совпадающих с самими собой).

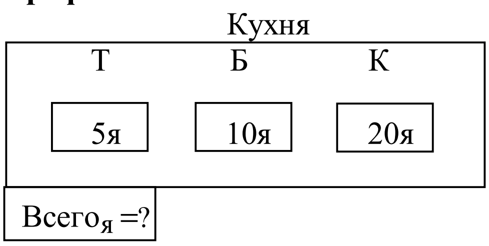
Приступаем к работе.

Задача 1

Скажите ребенку, что он наверняка легко нарисует слагаемые и суммы, т. к. уже умеет их **видеть**. Так же легко он справится и с обозначениями. Вы будете только кое-что пояснять по ходу дела.

Когда он нарисует «Графику» (полностью заполненную графсхему, рис. 21), попросите его записать «Алгебру». У него должно получиться уравнение (1). Если его смутит наличие нескольких слагаемых, то напишите это уравнение сами, пояснив, что сумма может состоять и из нескольких слагаемых, поскольку «не все ли нам равно» — считать «сколько всего» на двух или нескольких тарелках).

Графика



Алгебра

(1) $В = Т + Б + К$

Арифметика

(2) $В = 5 + 10 + 20 \mid = 35я$

$В = 35я$

Рис. 21

В «Арифметике» вычисления могут проводиться как в уме (наиболее рациональным способом: сначала: 20 + 10, затем: 30 + 5), так и в столбик — сразу три слагаемых.

Повторю, что о соответствии со школьной формой записи решений я расскажу в конце этой главы.

Задача 2

Обозначения слагаемых: $\mathbf{Я}_1$, $\mathbf{Я}_2$, $\mathbf{Я}_3$, $\mathbf{Я}_4$ (ящики 1–4), «размерность» — яблоки [я].

Задача 3

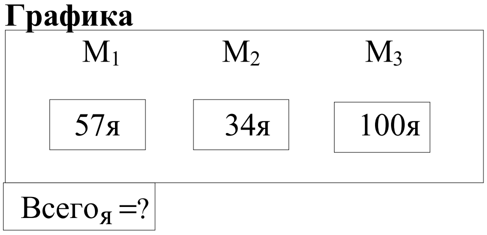
Разумеется, если при выборе обозначений и выяснении содержимого слагаемых, вы зададите стандартные вопросы: «Что считаем? — Ящики. — Где находятся ящики? — В машинах», — вы почти наверняка увидите такую «Графику», как на рис. 22.

Сейчас мы с вами рассмотрим три разные системы обозначений к одной и той же задаче, реализованные на рис. 22–24.

1. Стандартная индексная (рис. 22).

Эта система обозначений возникает из стандартных вопросов: что считаем? — Ящики. Это задано в самом вопросе задачи: сколько ящиков?.. Следовательно, содержимое слагаемых — число ящиков. А где лежат ящики? — В машинах. Следовательно, имена слагаемых: $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ (машины 1–3).

Графика



Алгебра

$$B = M_1 + M_2 + M_3$$

Рис. 22

Сравните с задачей 3, цикл I.

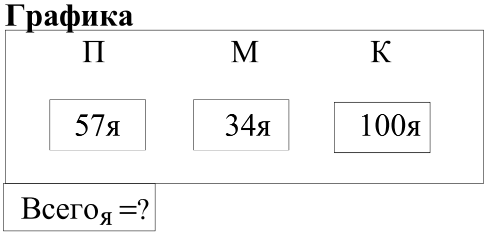
С точки зрения строгой математической стилистики эта система выглядит предпочтительней. Но она затрудняет проверку «Графики».

Посмотрите сами. Слово «машина» используется только в первом **содержательном** предложении, т. е. в предложении, говорящем о первом слагаемом. И поэтому при проверке говоря себе: $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ (машина-1, 2, 3), ребенок невольно будет искать слово «машина» в тексте задачи. А поскольку во втором и третьем содержательных предложениях слово «машина» отсутствует, то это будет — пусть ненадолго, на чуть-чуть — сбивать ребенка, вносить лакуны в его восприятие; в конечном счете, вести к ошибкам. Обозначения же должны быть таковы, чтобы не только не мешать проверке, но всячески ей способствовать. — Вспомните, что говорил Д. Пойа о важности содержательных обозначений (сноска [7], цикл I).

Строгая математическая стилистика обозначений хороша при окончательном оформлении решения, когда решение задачи предполагается рассматривать «со стороны» (экзамен, контрольная…), но никак не на этапе разбора задачи, ее осмысления, поиска решения.

2. Предметная (рис. 23).

Графика



Алгебра

$$B = П + М + К$$

Рис. 23

Иная система обозначений — более зримая, более бросающаяся в глаза, в данном случае, более предметная.

Вместо безликих машин ($\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$) — **наглядные** помидоры, морковь, капуста. Даже логическое ударение предложений падает на «предметы», привезенные машинами: первая машина что привезла? — помидоры и т. д.

С учетом вышесказанного ясно, **что наиболее предпочтительной на первом этапе** анализа является именно предметная система обозначений: **П**, **М**, **К**. Тем более что на «предметы» падает логическое ударение. Сравните рис. 22 и рис. 23.

И чем младше ребенок, тем разумнее использовать чисто предметные обозначения. Ведь в этом — одно из важнейших достоинств ГрафАнализа: максимальное опредмечивание математической модели задачи.

3. Синтезная индексная (рис. 24).

Но возможна и еще одна система обозначений, объединяющая стандартные индексные обозначения и «опредмечивание», даваемое ГРАН: $Я_П$, $Я_М$, $Я_К$ — ящики с помидорами, морковью и капустой. Синтезную систему я часто буду называть просто индексной, в отличие от стандартной индексной.

Графика

$Я_П$ — 57я; $Я_М$ — 34я; $Я_К$ — 100я

$Всего_я$ =?

Алгебра

$В = Я_П + Я_М + Я_К$

Рис. 24

Не будем забывать, что в ходе дальнейшего математического образования требования к соблюдению строгости математической стилистики будут постоянно возрастать. И не только на уроках математики. Поэтому синтезная система обозначений (индексная плюс предметная) должна будет выдвигаться на первый план. И если ребенок в 5–6-м классе и старше, то стоит при любой возможности приучать его именно к этой системе обозначений. Замечу только, что не стоит злоупотреблять индексами при большом числе разнородных слагаемых. Причина — та же, что в п. 1 — затрудненность проверки (а ведь для нас всегда самым главным должно быть не само по себе то или иное решение, а правильное — **до числа** — решение!). Скажем, в задачу 6, цикла VI, разумеется, нерационально вводить индексные обозначения (или, тем более, применять их в задаче, подобной приведенной в приложении 4).

Вывод.

Как видите, в одной и той же задаче, мы можем использовать разные системы обозначений с разным соотношением уровней наглядности и абстрагирования. И конечно же нельзя указать каких-то универсальных правил по выбору обозначений, кроме тех общих соображений, которые приведены выше.

Что именно нужно сделать, так это показать ребенку (разумеется, с учетом меры его восприятия!) все три системы (рис. 22–24) и пояснить ему сравнительные достоинства разных систем.

Задача 4

Могут использоваться две разные системы обозначений слагаемых:

предметная: **Л**, **С**, **П** (львы, собачки, попугаи);

индексная: $К_л$, $К_с$, $К_п$ (всего клеток со львами…)

Содержимое слагаемых: 10к, 12к, 25к, «размерность» — клетки [к].

Очевидно, что стандартная индексная: $К_1$, $К_2$, $К_3$ — менее предпочтительна в силу малой наглядности.

Задача 5

Обратите внимание на совпадение первых букв 1-го и 3-го слагаемых (**х**амса, **х**ек). Довольно частая ситуация. Возможные обозначения слагаемых, как кажется:

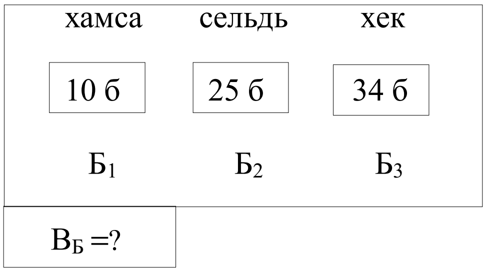
предметная: $\mathbf{Х_{А}}$, **С**, $\mathbf{Х_{Е}}$;

индексная: $\mathbf{Б_{ХА}}$, $\mathbf{Б_{С}}$, $\mathbf{Б_{ХЕ}}$;

стандартная: $\mathbf{Б_{1}}$, $\mathbf{Б_{2}}$, $\mathbf{Б_{3}}$.

Для предметной системы лучше буквы «а» и «е» не как строчные: Х**а**, Х**е**, а как прописные печатные: $Х_{А}$, $Х_{Е}$. Во-первых, из соображений единообразия, а во-вторых, руководствуясь «эстетикой восприятия».

Графика **Алгебра**



$В = Б_1 + Б_2 + Б_3$

Рис. 25

Очевидно, что предметная система здесь предпочтительнее индексной, поскольку индексная слишком громоздка и неудобна. **И на это нужно обратить внимание ребенка**. Однако — замечание: как ни странно может показаться в связи со всем вышесказаным, но по-настоящему удобней оказывается стандартная индексная система: $\mathbf{Б_{1}}$, $\mathbf{Б_{2}}$, $\mathbf{Б_{3}}$. Единственное, что нужно сделать, так это написать «в лоб» имена слагаемых (хамса, сельдь, хек), например, над «квадратиками» — слагаемыми (рис. 25). То есть на одной графсхеме мы вводим две системы обозначений: над слагаемыми — «полная предметная», под — стандартная индексная (или наоборот). С последней мы и будем работать в уравнении: $В_Б = Б_1 + Б_2 + Б_3$, не испытывая никакого дискомфорта при проверке: ведь соответствие двух систем перед глазами (**вместо «Всего» будем в дальнейшем писать сокращенно букву «В»**).

Задача 6

Общее замечание к задачам 6–10.

Основной вопрос в этих задачах — не нахождение суммы (к этому моменту уже тривиальному для ребенка), а **сравнение** двух величин. Причем «не в лоб»: скажи, что больше, а **в синонимической форме**. К тому же впервые появляется задача в **2-а действия**.

Теперь о задаче 6.

Графика

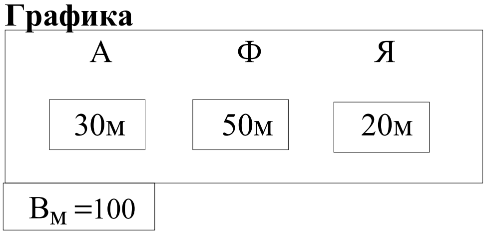


Рис. 26

Вполне вероятно, что вы увидите следующую «Графику» (рис. 26).

Только в случае, если ребенок не будет знать, что делать со 100 марками, которые умещаются в кляссере, и что делать со слагаемыми **А**, **Ф**, **Я** — это будет говорить о том, что он смутно понимает смысл слова «сравнить» (указать, что больше чего). В большинстве случаев такая «Графика» свидетельствует о необходимости расширить средства ГрафАнализа, а именно: мы введем теперь **две суммы**, причем одну из них — в скрытой форме. Посмотрите на рис. 27.

Сумме подаренных марок дадим — **как слагаемому** — имя: «Подарили».

Величина 100 марок — это «скрытая сумма». Подразумевается: **всего** умещается 100 марок. Этой сумме также дадим имя: «Кляссер».

Теперь видно, что $В_М$ = ?, как и положено, — неизвестная сумма подаренных марок. Содержимым же кляссера являются 100 марок, которые в нем могут уместиться.

.Подарили

А Ф Я

30м 50м 20м

$В_М$ = ?

Кляссер

$В_1$ = 100м

Рис. 27

Внимание.

Поскольку **видим**, что **суммы** «Подарили» и «Кляссер» — разные, то и обозначения у них должны быть разные, в данном случае: **В** и $\mathbf{В_1}$.

Скажите ребенку: «Когда мы посчитаем сумму «Подарили» (**В**), то получим величину 100 м(арок). Эту сумму мы должны были найти (посчитать). Мы ее не знали заранее. Те же 100 марок, которые указаны в тексте задачи, относятся к другой сумме — «Кляссер». Теперь мы можем нарисовать так (рис. 28).

Подарили Кляссер

В = 100м $В_1$ = 100м

Рис. 28

Было — **2-е СУММЫ**, а стало **2-а СЛАГАЕМЫХ**, верно? И так теперь у нас будет часто: сумма будет превращаться в слагаемое.

Теперь совершенно ясно, что делать с этими слагаемыми. В задаче сказано: «Уместятся ли подаренные марки в кляссере?» «Уместятся ли» означает: **сравните** число марок подаренных (**В**) и в кляссере ($\mathbf{В_1}$). А что значит: сравнить? В самом простом случае — просто сказать: **одинаковое или разное** число марок.

Если бы в кляссере умещалось 90 марок, то у нас было бы:

В = 100 м — подаренные марки;

$В_1$ = 90 м — марки, которые можно положить в кляссер.

Ну-ка, скажи: 100 и 90 — **одинаковые** числа?.. Нет конечно, разные. А поскольку **разные**, то одно из них **непременно больше** другого. Видишь, какое больше?.. Ну разумеется, 100 м(арок) **больше, чем** 90 м(арок); слагаемое (сумма) В = 100м больше слагаемого (суммы) $В_1$ = 90м. Ничего не надо считать, — и так **видно**! Мы знаем, что 100 больше, чем 90.

Вывод — уместятся?.. Нет, **не уместятся**, так как подаренных марок **больше**.

Если бы в кляссере умещалось 110 марок, т. е. $В_1$ = 110м, вывод был бы какой?.. Правильно, т. к. в кляссере умещается **больше** марок, чем подарено, то значит — уместятся.

А что мы имеем в задаче?

Подарено: В = 100м.

Умещается: $В_1$ = 100м.

Вывод?.. Верно, уместятся тютелька в тютельку».

Резюмируете: «Итак, **сравнить** числа (содержимое двух слагаемых), значит сказать, **равны они или не равны**. **Если не равны, то одно из чисел непременно больше другого**. — мимоходом добавляете: — Ты видишь, я все время говорю «**больше**» — мы же не знаем в арифметике «меньше». Конечно, ты прав, будут у нас и такие задачи, в которых речь будет идти о «меньше». Но ты увидишь, что все равно все сведется к отношению «Больше НА». К тому же, разговор о «меньше» начнется в главе «Вычитание», а мы пока занимаемся **исключительно сложением**.

И еще, посмотри-ка: до сих пор наши задачи были в одно действие, а сейчас — в два.

Сначала мы должны были посчитать сколько марок подарено:

1). В = А + Ф + Я = 30 + 50 + 20 = 100 (м).

Но основной-то вопрос задачи был не в том, чтобы посчитать сколько подарили, а в том, чтобы сравнить (уместятся ли?):

2). В = 100м — подарено

$В_1$ = 100м — умещается

Видим:

В = $В_1$ (100м = 100м)

Вывод: да, уместятся.

Задача 7

На рис. 29 вы видите краткую запись решения, уже не требующую пояснений.

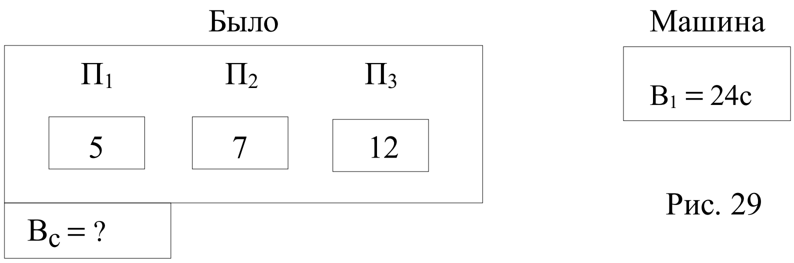


Рис. 29

Алгебра

В = $П_1 + П_2 + П_3$

Арифметика

Действия: формулируем их с «Графики».

1). Сколько всего сумок было у продавцов?

В = 5 + 7 + 12 = 24 (с)

2). Сравнение.

В = 24с

$В_1$ = 24с

В = $В_1$

Вывод: **видим**, что В = $В_1$ (24с = 24с), т. е. продавцы **смогли** погрузить все сумки.

Замечание.

Стандартные индексные обозначения **$П_1$, $П_2$, $П_3$** (продавец–1, 2, 3) удобнее, т. к., в отличие от задачи 3, у нас однородные «предметы без содержимого» — сумки.

С этого момента мы можем позволить себе роскошь не указывать «размерность» [с] — сумки в «квадратиках» слагаемых и в «Арифметике». **Оставляем** «размерность» **только в суммах** (Всего). Это совершенно не противоречит тому, с чего мы начинали: непременно указывать «размерность». Просто ребенок сейчас уже подготовлен не забывать проставить «размерность» в суммах (**$В_С$**), слегка «набил руку» на выделении слагаемых, обозначениях, и его (особенно детей постарше) начинает раздражать **замедленность темпа** рисования «Графики» и «Арифметики», связанная с необходимостью проставлять «размерность». Кроме того, начинает раздражать «**загромождение**» слагаемого лишней, тавтологичной информацией. Посмотрите на рис. 30.

$П_1$ $П_1$

$\boxed{5\underline{\mathbf{с}}}$ и $\boxed{5}$ Рис. 30

Задача 8

«Графика» аналогична задаче 6, изображенной на рис. 27–28. В слагаемом «Было» я, для краткости, указываю одновременно все три варианта суммы (рис. 31).

Было	Стоит
В = а) 105р б) 100р в) 95р	$В_1$ = 100р

Рис. 31

Задача 9

Аналог задачи 6.

Замечание.

В задачах 8–9 предметная система обозначений просто «просится на лист».

Задача 10

С именами слагаемых разумнее поступить так, как в задаче 5, рис. 25.

Машина	Поезд	Пароход	Самолет
S_1	S_2	S_3	S_4

Имена сумм:

Проехал	Надо (проехать)
В = 2000км	$В_1$ = 2500км

Рис. 32

Так как $В_1 > В$ (2500 > 2000), то вывод: не добрался (рис. 32).

Обратите внимание ребенка **на лишние данные**: за **1 час** самолетом. **Спросите** его: «Интересуют ли нас «часы»? Что нужно посчитать: часы (время) или километры (расстояние)?.. А раз расстояние, то величина «1 час» нас совершенно не интересует в этой задаче».

Задача 11

Обратите внимание ребенка на содержимое слагаемого «пятница». Очень часто дети говорят в таких случаях: «Ничего нет… Ничего не заработали…» На самом деле «ничего» они должны переводить **в число 0** (ноль $ в пятницу).

Задача, подобно задаче 2, иллюстрирует тот факт, что, сколько бы ни было слагаемых, алгебраически это задача «в одно действие» (имеем одно уравнение):

$В = П_О + В_Т + С + Ч + П_Я$

Не забудьте напомнить, что обозначения: **В** — всего и $\mathbf{В_Т}$ — вторник, $\mathbf{П_О}$ — понедельник и $\mathbf{П_Я}$ — пятница — **должны различаться**. Поэтому введены индексы.

Цикл IV. Больше НА (задачи с 2 и более слагаемыми в 2–3 действия)

1. В спальне стоит 3 стула, на кухне на 2 стула больше, а в гостиной на 4 стула больше, чем в кухне. Сколько стульев стоит в кухне? Сколько в гостиной? (*)(*)

2. В одной коробке 50 яблок. В другой на 30 яблок больше, а в бочке на 150 яблок больше, чем во второй коробке. Сколько яблок во второй коробке? Сколько яблок в бочке? (*)(*)

3. У папы в кармане было 300 рублей. У мамы в кошельке — на 1000 рублей больше. Сколько денег было у мамы? Сколько было денег у мамы с папой? (*)(••)

4. На одном автобусе приехало 35 пассажиров. На другом приехало на 15 пассажиров больше. Сколько пассажиров приехало на втором автобусе? Сколько всего приехало пассажиров? (*)(••)

5. На лодке турист проплыл 15 километров, а на катере на 43 километра больше. Какое расстояние проплыл турист? (*)(••)

6. Вертолетом перевезли 250 кг груза, а самолетом — на 1250 кг больше. Сколько всего перевезли груза? (*)(••)

7. Одна машина привезла в магазин 300 коробок конфет. Вторая — на 50 коробок больше, а третья — на 100 коробок конфет больше, чем вторая. Сколько коробок конфет привезла в магазин третья машина? (*)(*)

8. Полярникам на льдину нужно доставить аппаратуру массой 250 кг и разборный домик, масса которого на 5000 кг больше, чем масса аппаратуры. Им выделили вертолет, который поднимает 11000 кг груза. Смогут ли они перевезти весь груз? (*)(••)+С

9. В 5-А классе — 25 учеников. В 5-Б классе — на 7 учеников больше. В школьной библиотеке 50 учебников. Хватит ли ученикам обоих классов школьных учебников или кому-то придется покупать отдельно? (*)(••)+С

10 У Саши было 15 рублей. У Маши на 5 рублей больше, а у Леши — на 20 рублей больше, чем у Маши. Билет в цирк стоит 40 рублей. Хватит ли Леше денег на билет? (*)(••)+С

11. Пешком ученый кот прошел 3 км. На машине он проехал на 10 км больше. На электричке на 100 км больше, чем на машине. А бегом он пробежал на 5 км больше, чем прошел пешком. Сколько километров ученый кот проехал на электричке и сколько пробежал бегом? (*)(*)(*)

12. Дома у Маши было 100 книг. В школьной библиотеке — на 1200 книг больше. В районной библиотеке — на 7000 книг больше, чем в школьной. А у Машиной подруги — на 350 книг больше, чем у Маши. Сколько книг у Машиной подруги? А в районной библиотеке? (*)(*)(*)

13. Фирма «Гвоздь» продала за рубеж гвоздей на 5000 $. Фирма «Болт» продала болтов на 1500 $ больше, чем фирма «Гвоздь». Фирма «Гайка» продала гаек на 2000 $ больше, чем фирма «Болт». А фирма «Труба» продала труб на 1000 $ больше, чем фирма «Болт». Сколько долларов заработала фирма «Труба». А фирма «Гайка»? (*)(*)(*)

14. В Аргентине 1 кг бананов стоит 10 центов. В Нью-Йорке он уже на 20 центов дороже. В Париже еще на 25 центов больше. А в Ростове 1 кг бананов стоит на 35 центов дороже, чем в Париже. Сколько стоит 1 кг бананов в Ростове? (*)(*)(*)

Ответы: 1) К = 5 с., Г = 9 с.; 2) $К_2$ = 80 я., Б = 230 я.; 3) М = 1300 руб., В = 1600 руб.; 4) $А_2$ = 50 п., В = 85 п.; 5) В = 73 км; 6) $В_1$ = 1750 кг; 7) $М_3$ = 450 к.; 8) В = 5500 кг, $В_1$ = 11000 кг (вертолет), смогут; 9) В = 57 ч., $В_1$ = 50 у. (библиотека), не хватит; 10) Л = 40 руб., $В_1$ = 40 руб. (цирк), хватит; 11) Э = 113 км, Б = 8 км; 12) Р = 8300 кн., П = 450 кн; 13) Т = 7500 $, $Г_А$ = 8500 $; 14) 90 ц.

Сценарий.

В этом цикле впервые по-настоящему вводятся т. н. составные задачи (задачи в несколько действий). Составные задачи, по сути своей, разбиваются на ряд логических фрагментов (шагов) таким образом, что результатом предыдущего шага является слагаемое, необходимое для последующего шага.

В ГрафАнализе, анализируя задачу, мы идем не от данных к вопросу и не от вопроса к данным (синтетический и аналитический способы разбора задачи), а от целостной логической структуры задачи: выявляем слагаемые и отношения между ними и записываем их в виде набора ГРАЭЛов, т. е. в виде графсхемы (ГРАС) задачи. И только реализовав в «Графике» логическую структуру полностью, мы переходим к расстановке действий, причем этот процесс расстановки осуществляется в большинстве случаев «**автоматически**».

Как известно, для «выполнения арифметического действия необходимо и достаточно два числа» [14, с. 95]. Поэтому критерий при расстановке действий очень прост: известны нам два слагаемых в соответствующем ГРАЭЛе или нет? Поскольку **вся логическая структура** задачи перед нами (в виде ГРАС), то мы «одним взглядом» пробегаем по цепочке ГРАЭЛов от конца задачи к началу (не в смысле сюжетного текста, а в смысле структуры) и находим тот ГРАЭЛ, в котором **известны два слагаемых**. Это и будет наше 1-е действие. Затем мы смотрим, в какой ГРАЭЛ входит найденное в 1-м действии слагаемое (сумма), — так мы переходим ко 2-му действию и т. д.

На самом деле, как вы, читатель, вскоре убедитесь, процесс расстановки действий происходит гораздо быстрее, чем я об этом рассказываю.

А так как и рисование «Графики», и расстановка действий при некотором навыке происходят очень быстро, то вот здесь-то мы и получаем тот огромный выигрыш во времени, о котором я говорил в главе I. И чем сложнее задача, тем, как ни парадоксально, этот выигрыш больше.

Переходим к работе.

Задача 1

Я не сомневаюсь, что «Графика», состоящая из двух ГРАЭЛов «Больше НА», была нарисована без каких-либо затруднений. Посмотрите на рис. 33, каким образом мы приходим к

Графика

С 1 К 2 Г

$\boxed{3}$ < $\boxed{?}$ < $\boxed{?}$

$\boxed{2}$ на $\boxed{4}$

Рис. 33

расстановке действий (ваш ребенок, разумеется, нарисовал «Графику» без действий). Мы видим, что 1-е действие задается первым вопросом задачи: «Сколько стульев на кухне?», а 2-е действие — вторым вопросом : «Сколько (стульев) в гостиной?».

Но эти вопросы играют вспомогательную роль. Фактически они являются планом решения задачи и в школе служат для записи решения «с вопросами».

Посмотрим, как возникает расстановка действий в ГрафАнализе.

Два ГРАЭЛа «Больше НА» мы, безусловно, видим. Возьмем в качестве 1-го действия второй ГРАЭЛ, связывающий слагаемые **К** и **Г** (кухня, гостиная):

Г > К на 4
Г = К + 4

Подставим из «Графики» содержимое слагаемого **К** (число стульев на кухне).

$Г = \boxed{?} + 4$

Видим, что сумма **Г**, состоящая из двух слагаемых К = ? ст. и 4 ст. **не может быть посчитана**! Ведь, по определению, для нахождения суммы нам нужно знать все слагаемые ее составляющие.

Но это мы видим уже в «Графике»: К = ? — неизвестно. То есть **видим**, что посчитать **Г** не можем.

Идем по цепочке ГРАЭЛов, составляющих графсхему (ГРАС) задачи, дальше.

Видим, что в первом ГРАЭЛе, связывающем слагаемые **С** и **К** (стулья в спальне и на кухне), сумму **К** мы посчитать **можем**.

К > С на 2
К = С + 2
К = 3 + 2 = 5 (ст.)

А посчитав **К**, можем **теперь** посчитать и **Г**. — Расстановка действий абсолютно прозрачна.

Итак, расстановка действий возникает **естественным** образом в «Графике». **Критерием** при расстановке действий является: можем посчитать сумму или нет? — т. е. известны нам оба слагаемых или нет.

Внимание.

Вы обратили внимание на то, что в одном и том же предложении, более того, в одном и том же ГРАЭЛе, я назвал **К** сначала **слагаемым**, а затем **суммой**? В этом нет противоречия и путаницы понятий также не возникает. С точки зрения общей логической структуры задачи **К**, несомненно, слагаемое. Мы это видим на рис. 33. **К** — как элемент ГРАЭЛа, разумеется, — сумма: мы это знаем из цикла II. (Сказав: «в одном и том же ГРАЭЛе», я хотел подчеркнуть тот момент, что в ГрафАнализе сумма и слагаемое неразрывно связаны благодаря общей логической структуре задачи. Работая с ГРАН, мы настолько привыкаем видеть как общую структуру задачи, так и составляющие ее элементы, что подобное двуединство становится неотъемлемым свойством нашего ви́дения).

Важное замечание.

Как вы помните, читатель, общая структура решения (средствами ГРАН) состоит из трех блоков: «Графика», «Алгебра» и «Арифметика». Основной из них — «Графика» (графсхема задачи). «Алгебра» — перевод графсхемы в «математику». «Арифметика» — уже только вычислительная работа.

Пока мы работали с простыми задачами (в одно действие), соблюдение этой структуры не создавало ребенку никаких проблем. Но задачи в несколько действий (вплоть до 7-го класса) на первых шагах могут повести к затруднениям в работе **отдельно** с блоками «Алгебры» и «Арифметики». В конечном счете нам, разумеется, нужно овладеть свободным конструированием решения в общем виде (в виде уравнений блока «Алгебры»). Особенно пригодится умение решать задачу в общем виде на уроках геометрии и физики. Но даже в физике подобное умение в наше время, насколько я могу судить по опыту, формируется только в 9–10 классах.

I. Алгебра

1) К = С + 2

2) Г = К + 4

Арифметика

1) К = 3 + 2 = 5 (ст.)
2) Г = 5 + 4 = 9 (ст.)

Рис. 34а

II. Алгебра **Арифметика**

1) К = С + 2 = 3 + 2 = 5 (ст.)

2) Г = К + 4 = 5 + 4 = 9 (ст.)

Рис. 34б

Поэтому мы должны позаботиться о том, чтобы не возникало разрыва между уровнем абстрагирования «Алгебры» и числовой конкретикой арифметических вычислений.

Достигается это следующим образом: как только мы написали первое уравнение (1-е действие), **сразу же подставляем** значения (содержимое) известных слагаемых. Затем переходим ко 2-му действию, и т. д.

Сравните две формы записи.

В отличие от стандартной формы I: сначала полностью выполняется блок «Алгебры», затем — «Арифметики» (рис. 34а), форма II **сразу же конкретизирует** для ребенка каждый алгебраический шаг соответствующим числом.

С «Графики», после расстановки действий, он пишет: К = С + 2 и превосходно понимает (видит), что стоит только **подставить** содержимое слагаемого **С** = 3 (ст.), как он тотчас сможет **посчитать** содержимое слагаемого **К**.

Самое важное здесь то, что слева в 1-м действии (рис. 34б) стоит символ (имя слагаемого — **К**), а справа — через цепочку равенств — числовое значение символа (содержимое = 5 ст.). То есть в поле восприятия ребенка находится равенство К = 5 (ст.) — **уже известная, посчитанная** величина. И когда он пишет 2-е действие Г = К + 4 — стоит только спросить его: «К — известно?» — как он не задумываясь ответит, что К = 5.

Если у ребенка возникнут с этим затруднения, то нужно объяснить, что он знает содержимое **К** из 1-го действия и поэтому может подставить К = 5 во 2-е действие (я это указал стрелкой).

Но конечно же форма II записи решения является для нас вспомогательной, обучающей. По мере приобретения опыта работы с ГРАН, возрастания легкости владения «Алгеброй», необходимо переходить к форме I.

Наконец о проверке.

С самого начала работы с составными задачами нужно требовать осуществления трех уровней проверки (самоконтроля). Напомню, как это делается.

Первый уровень.

Нарисовав «Графику», мы должны вернуться к тексту задачи и быстро поэлементно проверить соответствие «Графики» тексту примерно таким образом (все данные: числа, отношения, имена — **только вслух**, пусть и негромко!):

• спальня, кухня, гостиная — **3 слагаемых** — у нас **есть**;

• в спальне — 3 (слово: стула — не произносим, только число) — есть;

• на кухне — **на 2 больше** (чем в) столовой — **есть** (проверяем, что больше чего, правильно ли нарисован знак «больше», правильно ли нарисован сам ГРАЭЛ-(> на) — см. рис. 20, стандартная ошибка);

• в гостиной — **на 4 больше** (чем в) кухне — есть.

Внимание.

Очень важно (кроме произнесения вслух каждого логического элемента — они выделены), чтобы проверка **шла не «на глаз»**, чтобы **работали обе руки**!

Что это значит?

Ребенок в школе с 1-го класса приучается «хорошо» сидеть за партой: руки перед собой или, при письме, левая рука придерживает тетрадь, а правая — пишет. И практически никто не обращает внимания на то, что столь похвальное (и необходимое в первые годы обучения) поведение приводит к возникновению незаметной и **крайне вредной и трудноустранимой привычки** у ребенка: смотреть на текст **только глазами**. При мало-мальски сложном тексте задачи (например, цикл 6) — это прямой источник ошибок. **Даже тогда, когда мы заставляем ребенка проверять!**

Еще и еще раз: при проверке — на каждом уровне! — **должны работать обе руки**. Буквально так: ручка, в правой руке, скользит по тексту, останавливается на значимых элементах (число — значит слагаемое или отношение), а палец левой руки останавливается на соответствующем элементе графсхемы. Один элемент — пауза, взгляд с текста на ГРАС; другой элемент — пауза, взгляд… **И так — до конца текста**.

То же самое — при проверке правильности переписанного условия с доски.

Проверка расстановки действий на графсхеме (рис. 33):

• 1-е действие: **С** и **2** — известны, ⇒ можем посчитать **К**;

• 2-е действие: **К** известно (посчитано в 1-м действии) и 4, ⇒ можем посчитать **Г**.

Проверку расстановки действий в общем виде по основному критерию: известны ли оба слагаемых? можем ли посчитать? — **проводим обязательно**.

Первый уровень самоконтроля — самый ответственный: если «Графика» верна, то это уже решение. Дальше — только формальные операции перевода в «Алгебру» и счета в «Арифметике». Поэтому я не пожалел места и вашего времени, читатель, чтобы подробно описать процесс проверки первого уровня.

Запомним как **технологический прием**: должны работать обе руки!

Дальнейшее в общем-то уже известно, поэтому — кратко.

Второй уровень.

Написав «Алгебру» (см. форма I, рис. 34 а), останавливаемся и проверяем каждое действие (уравнение): **С** известно, ⇒ **К** — считаем; **К** известно, ⇒ **Г** — считаем (**и опять**, **не «на глаз»**, а пальцем или кончиком пера указываем на **С**, **К**, **Г** — внимание, взгляд сосредоточиваем тем самым на нужном элементе уравнения).

Третий уровень.

Посчитали, — и обязательно проверяем вычисления, как бы ни были просты числа:

• и опять — **вслух**: три плюс два — пять; пять плюс четыре — девять;

• и опять — **работают руки**: указываем на каждое число.

Все вышесказанное крайне важно для свободного и грамотного владения ГрафАнализом (и, замечу, для владения матаппаратом вообще).

Если не считать краткого описания других арифметических действий, введения их ГРАЭЛов, то все дальнейшее сведется, по большому счету, к относительно небольшому числу технологических приемов и комментариев, расширяющих арсенал средств ГРАН.

Можно сказать, что с этого момента мы владеем базовой технологией ГрафАнализа.

Задача 2

Закрепляющий аналог задачи 1.

Задача 3

Графсхема (ГРАС) этой задачи является одним из основных «сложных» (составленных из нескольких ГРАЭЛов) графических элементов, на которых базируются составные арифметические текстовые задачи. Здесь мы сталкиваемся с совместным использованием двух известных нам ГРАЭЛов: **ГРАЭЛ-(∑)** и **ГРАЭЛ-(> на)**. Последовательность ввода этих ГРАЭЛов в «Графику» и создание ГРАС задачи показаны на рис. 35–37.

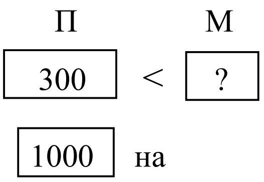


Рис. 35

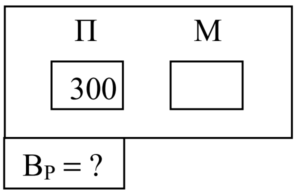


Рис. 36

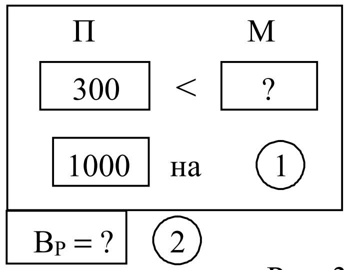


Рис. 37

Из первых двух предложений задачи мы извлекаем ГРАЭЛ-(> на) (рис. 35). Тем самым мы можем уже ответить на первый вопрос задачи.

Из последнего вопроса задачи извлекаем ГРАЭЛ-(∑) (рис. 36).

А теперь легко рисуется полностью заполненная ГРАС задачи (рис. 37).

Внимание.

Обратите внимание ребенка на то, что исходя из основного вопроса задачи мы имеем **два**, а не три слагаемых: П(апа) и М(ама). Это предельно ясно отражено на рис. 36: сколько (всего) было денег у папы с мамой (два слагаемых)?

В принципе возможна ситуация (хоть и маловероятная), что выполняя 2-е действие (рис. 37), ребенок может попытаться записать уравнение В = П + М + 1000 — ведь он видит три слагаемых. Подобный казус будет свидетельствовать о плохо понятом отношении «Больше НА», в котором **М** является **суммой** (состоит из **П** и 1000, включает в себя 1000, рис. 35), и в то же время **М** является **слагаемым** в сумме (рис. 36).

Расстановка действий ясна. Поскольку в слагаемом **М** стоит «?», то В = П + М не может быть 1-м действием.

Еще о расстановке действий.

1. Записывать их следует так, как на рис. 37: неизвестно слагаемое М = ? — значит «1» пишем **рядом**; неизвестна сумма В = ? — значит «2» пишем **рядом**. Никакого хаоса! При будущей проверке внимание должно сразу концентрироваться на тех объектах, которые участвуют в действии.

2. Цифры должны быть четкими, достаточно крупными (но не чрезмерно) и обводятся кружочком (все та же цель — сосредоточение внимания).

3. Кружочки с цифрами действий рядом, но не наползают на другие элементы ГРАС.

Все это вы, читатель, вероятно, уже прочувствовали на себе.

Задача 4

Закрепляющий аналог задачи 3.

Задача 5

Начиная с этой задачи, вспомогательные вопросы 1-го действия удаляются из текстов. Аналог задачи 3.

Задача 6

Аналог задачи 3.

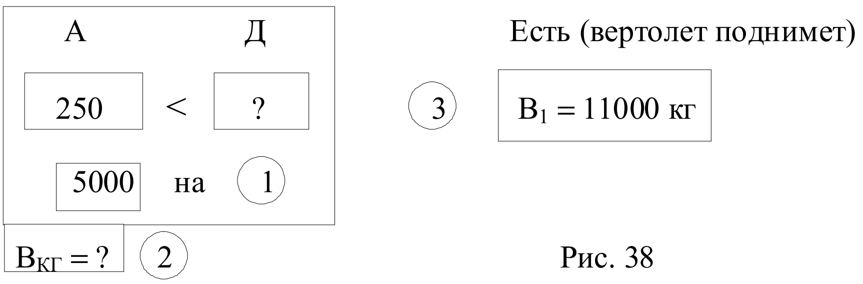
Задача 7

Аналог задачи 1.

Задача 8

Аналог задачи 3, плюс сравнение (рис. 38).

Графика Надо (перевезти)



Алгебра

1). Д = А +5000
2). В = А + Д
3). Сравнить В и $В_1$

Рис. 38

Начиная с этой задачи, мы можем приближаться к школьной форме записи решения «по вопросам». Посмотрите, как прямо с «Графики» естественным образом возникают и вопросы, составляющие план задачи. Смотрим на «Графику» (рис. 38) и прямо по действиям формулируем вопросы:

1). Какова масса домика?
2). Какова масса аппаратуры и домика?
3). Сравнить В и $В_1$ (груз, который надо перевезти и груз, поднимаемый вертолетом, т. е. сказать, что больше: В кг или $В_1$ кг).

Необходимо показать ребенку процесс «считывания» вопросов с «Графики» по действиям. **Этот процесс собственно сводится к тому, что мы озвучиваем «Графику»!** Видим (и уже знаем), что та же «Графика» абсолютно безошибочно переводится в «Алгебру» — этому мы научились **раньше, чем начали формулировать вопросы**.

В дальнейшем — для практики — нужно, чтобы ребенок, расставив действия, **устно** формулировал вопросы, соотнося их с «Графикой» и «Алгеброй». Единственное чего стоит добиваться: вопросы должны быть краткими и точными, без лишних слов. Тогда при оформлении школьного решения «по вопросам» (вопросы + «арифметика») у него не будет никаких проблем.

Задача 9

Закрепляющий аналог задачи 8 (рис. 39).
Имена слагаемых: $\mathbf{А_5}$, $\mathbf{Б_5}$ (5-а и 5-б классы).
«Размерность»: количество детей, человек [ч] или учебников [у].

Как видим, «размерность» тоже может быть, порою, в нашем распоряжении. В данном случае лучше выбрать [ч], чтобы стало ясным установление взаимно однозначного соответствия между числом учеников и числом имеющихся учебников.

Графика Надо (5-е классы)

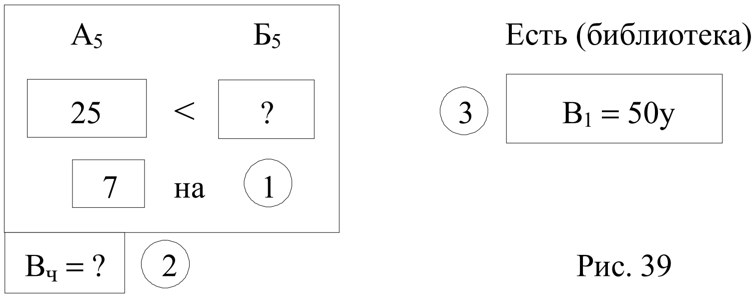


Рис. 39

Хоть «размерности» **В** и **$В_1$** на первый взгляд и разные: **В** — ч(еловек), **$В_1$** — у(чебников), но **каждому** ученику нужен **один** учебник. То есть число учеников мы **можем заменить** числом необходимых им учебников. Поэтому при сравнении **В** и **$В_1$** мы сравниваем величины одной «размерности» [у] (рис. 40):

В = 57 у(чебников) — Надо
$В_1$ = 50 у(чебников) — Есть
$В > В_1$
Вывод: не хватит.

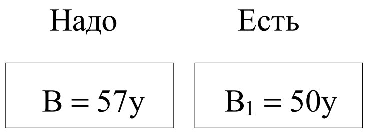


Рис. 40

Задача 10

Аналог задачи 1, плюс сравнение (рис. 41).

Графика

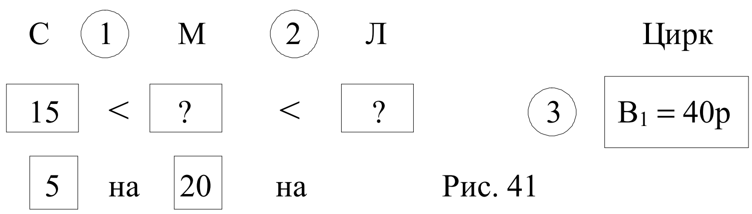


Рис. 41

«Графика», «?» внутри слагаемых, расстановка действий должны идти к этому моменту в хорошем свободном темпе — «набросать задачу». То же относится к «Алгебре».

Задача 11

Наверняка — и быстро — будет нарисована «Графика», соответствующая появлению слагаемых в тексте задачи (рис. 42).

1-й вариант «Графики»

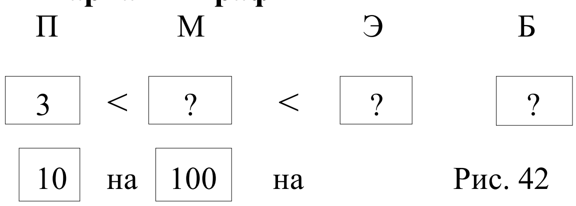


Рис. 42

Как только, расставляя знаки отношений «Больше НА» (и еще не начав расстановки действий) ребенок дойдет до слагаемого **Б**(егом), то он вас непременно спросит о том, как же ему поставить знак «>» между слагаемыми **Б** и **П**(ешком) — ведь они **не рядом**, **как он привык**.

Важное замечание.

Я написал: «Как только, расставляя знаки…». Мне кажется, что вы уже заметили, что в задачах подобного рода, вы, читатель, бегло выяснив **количество слагаемых**, **сразу рисуете все слагаемые** («квадратики»), **а потом**, вторым прочтением — тоже беглым, поскольку опыт имеется, — вы, по тексту, **расставляете знаки «больше»**, верно?.. Так и следует поступать в большинстве случаев, а именно: в случае «**линейной**» структуры задачи или больших кусков ее, т. е. когда **сразу видна цепочка** ГРАЭЛ-(> на).

Более того, приучайте ребенка видеть такие случаи «линейной» структуры, задавая ему направляющий вопрос: «Сколько слагаемых видим?». И предложите ему **сразу** нарисовать **пустые** «квадратики». **Вторым прочтением** — заполнить их содержимое. И **третьим прочтением** — расставить знаки отношений «Больше НА». (Если только он сам уже не пришел к подобному естественному процессу работы с ГРАН!)

Конечно же второе прочтение может быть совмещено с первым или третьим, но такая многошаговая схема работы с текстом задачи позволяет добиться беглого ви́дения числа слагаемых, отношений; незаметным образом вырабатывает автоматические проверочные действия, сосредоточение именно на главных логических элементах задачи. В своем роде такой процесс очень похож на работу с гаммами при обучении музыке, только мы отрабатываем **не просто беглость пальцев** (хотя и это тоже), **а точную беглость анализа и самоконтроля**.

Вопросы же: «Сколько слагаемых видим?.. Видим все «Больше НА» между ними?..», задаваемые **в быстром темпе**, идут **как технологический прием**.

Внимание.

Обязательно воспользуйтесь этой задачей для того, чтобы объяснить ребенку: ГрафАнализ — вовсе **не бездумное рисование**! «Автоматическое» выделение слагаемых и отношений совсем не означает того, что не нужно думать. Просто ГРАН — очень мощный аппарат решения многих арифметических задач, и он действительно освобождает нас от необходимости думать или изобретать там, где **не надо думать**, там, где требуется простое владение техникой, готовыми логическими деталями и конструкциями. — Жалок (попросту — безграмотен) был бы современный инженер, если бы вместо стандартных микросхем, стандартных блоков и алгоритмов, он изобретал бы все «от колеса».

Конкретно о задаче.

Скажите ребенку, что более-менее сложная задача потребует — и, порою, не раз! — перерисовывать «Графику», добиваясь **максимально отчетливого ви́дения** структуры задачи. **Сошлитесь на геометрию**, где очень многое зависит от «графики», где тоже не раз рисуется чертеж в поисках решения.

Скажите, что даже в нашей — столь простой задаче! — мы столкнулись с тем, что можно назвать «неудобным» расположением слагаемых.

Нарисуйте сами нужную ГРАС (рис. 43).

Скажите: «Посмотри, хоть в тексте слагаемое **Б** упоминается последним, мы его рисуем **первым**. То есть **удобное** расположение слагаемых такое, когда наша «Графика» **точно отражает** отношения между ними. А то, в каком порядке слагаемые появляются в тексте, нас совершенно не интересует.

Это очень важный момент!

Мы должны научить ребенка выявлять и конструировать логическую структуру задачи. Мы должны научить его «**свободе от текста**», свободе от сюжета.

2-й вариант «Графики»

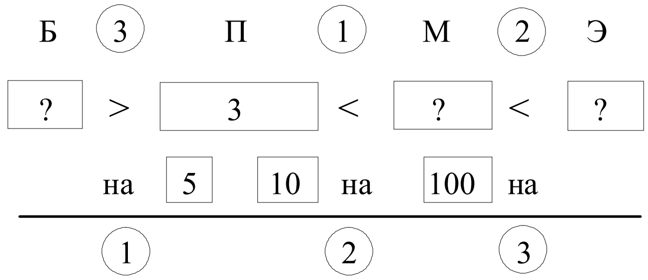


Рис. 43

Попутно обратите его внимание на знаки «больше» между слагаемыми **Б — П** и **П — М**. Видите, один и тот же знак «больше» смотрит острием и вправо, и влево? Знакомая ситуация. Мы подробно рассмотрели ее в цикле II (рис. 17–19). Но **никогда нелишне** напомнить о действительно важном: формулировке, правиле, формуле… **Более того, необходимо**!

Напоминайте, напоминайте и напоминайте при любом удобном случае, ребенку любого возраста, правила, отношения, формулы, суть действий и т. п.

И это тоже как технологический прием.

«Будем исходить из несколько гротескно выраженного, но психологически верного принципа: ребенок и не должен ничего помнить! (До тех пор, пока… — Пока мы не научим его этому)» [15, с. 196].[13]

О расстановке действий.

Вы видите на рис. 43 два варианта расстановки действий: верхний и нижний. Оба из них, в данном случае, равноправны. Но разумнее, по-видимому, верхний вариант: он соответствует последовательности вопросов в тексте задачи.

Задача 12

Закрепляющий аналог задачи 11 (рис. 44).

Графика

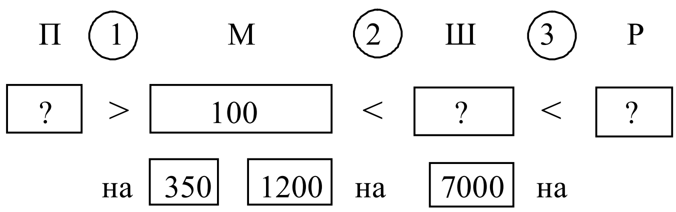


Рис. 44

Внимание.

Прежде чем ребенок начнет рисовать «Графику», **спросите** его: **видит ли** он сходство с предыдущей задачей?

Если он ответит утвердительно, предложите ему **сразу, «с листа»** сконструировать **удобное** расположение слагаемых.

[13] «Вообще надо сказать, что напомнить смысл основных понятий, отношений; правила, формулы не только никогда не лишне, но и до́лжно, и надобно делать всегда, когда только это необходимо и даже, — когда просто предоставляется подходящая возможность. Это первоклассный методический прием, не требующий никаких дополнительных затрат времени. Мы постоянно забываем, особенно работая с младшими школьниками, что повторение — действительно мать учения. Вот только повторять, в смысле — напоминать, как можно чаще, должны мы — учителя, а не дети» [15, с. 195–196].

Если возникнут затруднения, то пусть он набросает «Графику» стандартным способом: последовательность слагаемых в соответствии с текстом, а потом перерисует.

Задача 13

Внимание.

В этой задаче впервые появляется так называемая **вспомогательная графсхема** (не путать с промежуточной (вспомогательной) суммой из цикла V).

ГРАС-1

$Г_В$ 1 Б 2 $Г_А$

$\boxed{5000} < \boxed{?} < \boxed{?}$

$\boxed{1500}$ на $\boxed{2000}$ на

Рис. 45

На рис. 45 реализованы первые три предложения задачи. Но в развитие темы «удобное расположение слагаемых», видим: почти невозможно **удобным** образом нарисовать отношение между слагаемыми **Б**(олт) и **Т**(руба).

Вот тут-то мы и должны раскрепостить ребенка, «развязать ему руки» в дальнейшем применении ГРАН, введя вспомогательную графсхему ГРАС-2.

Нарисуйте ГРАС-2 (рис. 46):

ГРАС-2

Б 3 Т

$\boxed{?} < \boxed{?}$

$\boxed{1000}$ на

Рис. 46

И скажите: «А кто сказал, что «Графика» должна состоять только из одного рисунка, из одной графсхемы?! ГрафАнализ должен быть в наших руках **удобным инструментом**, и только! Наша цель — решение задачи, а не ГрафАнализ «сам по себе». Поэтому мы будем использовать этот инструмент так, как **нам** удобно.

Ну-ка, посмотри на ГРАС-2 (рис. 46). Мы **правильно** нарисовали отношение «Больше НА» между слагаемыми **Б** и **Т**?.. Правильно. Так что с полным основанием можем поставить 3-е действие. Итак, мы можем рисовать «Графику» из нескольких графсхем, и это ничуть не труднее, чем то, что мы делали до сих пор.

Кстати, смотри, **какая интересная ситуация**: оба слагаемых нам неизвестны («?» в **Б** и **Т**). Если мы переведем в «Алгебру», то получим $Т = Б + 1000 = \boxed{?} + 1000$ — вроде бы посчитать нельзя, одно слагаемое неизвестно. Мы-то с тобой превосходно знаем, что для суммы нужно знать оба слагаемых. Но это нас с тобой **теперь** совершенно не смущает. Пробежимся-ка по действиям:

1. Б — можем посчитать в 1-м действии (рис. 45).

2. $Г_А$ — можем посчитать после 1-го действия (рис. 45).

3. Что видим на рис. 46?.. — Верно, **Т** — можем посчитать после 2-го действия. Могли бы посчитать и после 1-го действия, когда узнали **Б**, но будем всегда последовательно отрабатывать одну графсхему за другой и не будем перескакивать с одной ГРАС на другую без особой нужды.

Таким образом, не будем торопиться говорить, что если неизвестны слагаемые, то мы их и посчитать не можем. — Все зависит от общей структуры задачи, от предыдущих действий. И именно блок «Графики» с блоком «Алгебры» дают нам возможность ясно увидеть это. Если пользоваться только школьным блоком «Арифметики», то увидеть это гораздо сложнее». А такое ви́дение, опять-таки, крайне пригодится нам на уроках физики и геометрии.

Внимание.

Очень важно то, что ГрафАнализ, выявляя в «Графике» неизвестные слагаемые («?») и связывая их попарно (рис. 46), дает нам возможность, реализуемую в блоке «Алгебры», — отучить ребенка от чисто арифметического, числового подхода: можно посчитать сумму, **только если** известны оба слагаемых.

Ну и что из того, что слагаемые, связанные каким-либо отношением, нам неизвестны? Мы к этому **уже привыкли**. Вся задача в «Графике» — перед нами. И мы **спокойно** ищем только, с какого конца (т. е. слагаемого!) за нее взяться.

И еще **обратите внимание на употребление предлога «на»** в тексте задачи.

Разница в употреблении «на» в первом предложении: «продала **на** 5000 $», и в последующих: «на сколько-то $ больше» — **существеннейшая**!

«Продала на» — подразумевается: ЗА сколько ВСЕГО продала. В остальных случаях — НА сколько БОЛЬШЕ.

То есть, видим, что для ви́дения отношения «Больше НА» нас должен интересовать не столько сам предлог «на», сколь все выражение «Больше НА» (**на… больше**).

Обязательно обратите внимание ребенка на этот факт!

Задача 14

Я уверен, что к этому моменту эта задача для ребенка — всего лишь развлекательная иллюстрация того, что количество действий отнюдь не говорит о сложности задачи.

Сколько бы раз ни использовалось отношение «Больше НА», оно все равно реализуется одним и тем же ГРАЭЛом. А видеть ГРАЭЛ-(> на) мы научились превосходно.

О слове «подставить».

В комментарии к задаче 1 я трижды выделил и подчеркнул слово «**<u>подставить</u>**».

На рис. 34б наглядно (стрелочкой) показано, как **числовой результат** 1-го действия (5 ст) **подставляется** в формулу 2-го действия, т. е. **буква** (величина) **К** — заменяется **числом**.

Вроде бы само собой разумеющаяся и не требующая никаких комментариев операция.

Но!.. — Остановимся на этом «но» поподробнее.

Вы, читатель, как взрослый человек, просто давно уже **привыкли** к термину «подставить». Этот термин явным образом появляется в конце Алгебры-7 (алгебра 7-го класса), когда учатся работать с системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Первый способ решения таких систем так и называется: способ подстановки. Помните? Выразим неизвестное x из первого уравнения и **подставим** во второе. Затем метод подстановки находит широкое применение год спустя в Алгебре-8–9 — решение систем нелинейных уравнений.

Но на самом деле впервые мы сталкиваемся с методом подстановки в самом начале Геометрии-7. А поскольку в начале седьмого класса мы не знакомы с системами уравнений, то возникают большие сложности с решением геометрических задач.

В главе VII «Взгляд на Математику-3, 5, 6; Геометрию-7 и Алгебру-7 с точки зрения ГрафАнализа», п. Математика-7 подробно рассматривается метод подстановки с использованием ГРАН. И я настоятельно рекомендую вам просмотреть, по крайней мере, хотя бы начало п. Математика-7 — Геометрия главы VII перед тем, как браться за решение задач этого цикла вместе с ребенком (**подразумевается**, что к этому моменту занятий вы сами уже прочитали всю главу «Сложение» и хотя бы часть главы «Вычитание»). Вы более глубоко прочувствуете необходимость того, что я сейчас скажу о слове «подставить».

Так вот, **все** задачи **в несколько действий** будут **требовать** употребления термина «подставить», т. к. **числовой** результат предыдущего действия **будет подставляться** в формулу последующего действия совершенно таким же образом, как в задаче 1 (ведь недаром у нас есть блок и «Алгебры» и «Арифметики»).

И вы каждый раз должны **произносить**: **подставим … в …** ! И добиваться, чтобы ребенок **тоже произносил**: подставим…

Таким образом, на уровне эмпирики, сама суть метода подстановки войдет в арсенал средств, используемых ребенком. И когда в главе VII возникнет нужда работать с системами уравнений, переход от подстановки числа «в букву» к подстановке алгебраического выражения «в букву» будет крайне облегчен. Это, разумеется, не означает, что для всех детей он пройдет безболезненно, **но основу вы заложите уже сейчас**.

Итак, отнесемся серьезно к слову «подставить»!

Цикл V. Совместное использование ВСЕГО и Больше НА (задачи в 2–5 действий)

1. В погребе в одном ящике 40 кг моркови, а в другом ящике на 30 кг моркови больше. Сколько моркови в погребе. (*)(••)

2. В магазин привезли 20 ящиков яблок. Груш — на 10 ящиков больше, а винограда на 5 ящиков больше, чем груш. Сколько ящиков фруктов привезли в магазин. (*)(*)(•••)

3. У Саши было 5 рублей. У Маши — на 20 рублей больше, чем у Саши. А Ване мама дала на 15 рублей больше, чем Саше. Три порции мороженого стоят 45 рублей. а). Хватит ли у ребят денег на мороженое? б). Как изменится ход решения задачи с изменением условия: Ване мама дала на 5 рублей больше, чем Саше? (*)(*)(•••)+С

4. Турист собрался в Париж. От Ростова до Москвы он доехал поездом за 21 час. От Москвы до Берлина долетел самолетом за 3 часа. От Берлина до Парижа ехал автобусом и затратил времени на 4 часа больше, чем летел самолетом. а). Сколько времени он добирался до Парижа из Ростова? б). А из Москвы? (*)(•••)

5. В магазин привезли 40 ящиков конфет. Шоколада на 20 ящиков больше. А печенья на 10 ящиков больше, чем конфет и шоколада. а). Сколько ящиков печенья привезли в магазин? б). Сколько ящиков всех сладостей привезли в магазин? [(*)(••)](*)(••)

6. Газеты вчера сообщили, что в космос полетели ученики 45-й и 1-й школ г. Ростова н/Д. В 45-й школе из 6-Б класса полетело 10 девочек и на 5 человек больше мальчиков, а в 1-й школе из 5-Б класса полетело 5 мальчиков и на три больше девочек. Сколько учеников г. Ростова н/Д крутится сейчас на околоземной орбите? [(*)(••)+ (*)(••)](••)

7. Как известно (цикл 3, задача 11), турфирма “Хоть к черту на кулички” заработала в понедельник, вторник, среду, четверг и пятницу соответственно: 250, 300, 150 и 500 $. А турфирма “Хошь ни хошь, а в Австралию попадешь” за то же время заработала, соответственно: 100, 150, 300, 50 и 1000 $. Сколько денег заработали обе фирмы за неделю?
[(•••••)+(•••••)](••)

8. В океане плавало 25025 китов. Акул — на 19876 больше. А дельфинов еще на 5004 больше, чем акул. Сколько всего рыб и животных плавало в океане? (*)(*)(•••)

9. На Луне, в море Дождей, было 1999 кратеров. В океане Бурь — на 2045 больше. А на обратной стороне Луны кратеров оказалось на 13877 больше, чем в море Дождей и океане Бурь. Так сколько же кратеров было на обеих сторонах Луны? [(*)(••)](*)(••)

10. В тайном обществе «За безделье» объединились 187029 хрямзиков (лексика Григория Остера, см. [17]). А под лозунгом «Мы ничего не делаем и делать не хотим!» собрались 2205301 хмурзиков. Но лентяев-учеников в России и США оказалось на 21087097 больше, чем хрямзиков и хмурзиков. Сколько хрямзиков и хмурзиков, и — главное! — бездельников США и России борются за права всех «сачков» в мире? [(••)(*)](••)

Ответы: 1) 110 кг; 2) 85 я.; 3) а. В = 50 руб., $В_1$ = 45 руб. (мороженое), хватит; б. В = 40 руб., $В_1$ = 45 руб. (мороженое), не хватит; 4) а. 31 ч.; б. 10 ч.; 5) П = 110 я., В =210 я.; 6)38 у.; 7) 2800 $; 8) 119 831 шт.; 9) 25 963 к.; 10) 25 871 757 с.

Общие замечания.

Владея базовой технологией ГрафАнализа, мы начинаем усложнять задачи самым простым способом — используем в качестве элементов задачи уже не только **элементарные** слагаемые (не являющиеся суммами), ГРАЭЛы, но и графсхемы (ГРАС) предыдущих задач.

В сущности, мы конструируем задачи, собираем их из кубиков, называемых ГРАЭЛ, ГРАС. Именно так и создавались циклы задач этой книги. Сначала — последовательно усложняясь, — рисовался логический скелет задачи, ее графсхема, в виде набора слагаемых и ГРАЭЛов. Каждая последующая ГРАС преследовала цель либо закрепить предыдущую, довести до автоматизма ви́дение и реализацию алгоритма задачи, либо ввести новый элемент ГрафАнализа, расширяющий его возможности (например, ввод промежуточной суммы в данном цикле). Затем, насколько у автора хватало фантазии, направляемой графсхемами, графический (логический) скелет задачи облекался в словесную форму сюжета.

Как видите, читатель, процесс создания задач крайне прост, и вы сами, при желании, можете придумать какие угодно задачи, какого угодно уровня сложности.

Вот только имеет ли это смысл?

При изучении математической логики мы знакомимся с логикой высказываний. В ней вводятся такие понятия как элементарные формулы или атомы. Для построения формул логики высказываний используются знаки логических операций. (Не правда ли, очень похоже на технологический подход ГРАН?). А далее появляется возможность конструировать формулы какой угодно сложности.

Но если «Основной задачей логики высказываний является изучение логических форм сложных высказываний с помощью логических операций» [16, с. 8], то для нас-то подобная задача вовсе не является целью.

Вспомните, читатель, что с помощью ГРАН мы хотим не только твердо усвоить основные логические элементы арифметики, но — и это прежде всего! — высвободить значительные резервы времени для решения **основной задачи** курса математики начальной школы: быстро и грамотно считать (в широком смысле) и тем самым **получить «на выходе» начальной школы технически одноуровневый класс**.

Еще раз стоит заметить, что словесные сюжеты моих задач строго определялись последовательностью усложняющихся графсхем (логических скелетов). Каждая ГРАС выполняет совершенно определенную функцию. И даже развлекательная сюжетная форма некоторых задач подчинена точно формулируемой цели: затрудняя восприятие логической структуры задачи, добиваться, тем не менее, четкого ви́дения значимых элементов — слагаемых, отношений. В этом ГрафАнализ принципиально отличается от превосходной книги Г. Остера «Задачник». Впрочем Г. Остер сам пишет в предисловии для учителей: «Однако главная задача «Задачника» не материал закреплять… Задачи эти как раз для тех, кто математику не любит, привычно считает решение задач тоскливым и нудным делом. Вот пусть они и усомнятся!» [17, с. 5].

Но мы с вами, читатель, желаем, чтобы ребенок пошел дальше — не просто «усомнился», а почувствовал радость умения; увидел, как просто то, что казалось ему столь сложным и недоступным. А для этого, разумеется, требуется совершенно определенный системный подход.

Сценарий.

В этом цикле мы перестаем писать предлог «на» в «Графике» (хотя, по всей видимости, читатель, вы уже сами сделали это в цикле IV).

Задача 1

Графсхема этой задачи (рис. 47), столь знакомая по предыдущему циклу, в дальнейшем часто будет использоваться в качестве элемента более сложных задач. Поэтому она носит особое название — **ГРАС-0**. Вспомогательные или же иллюстративные графсхемы будут нумероваться как ГРАС-1, ГРАС-2 и т. д. Целиком заполненная графсхема — графическое решение задачи — по-прежнему будем называть «Графикой».

Видеть в вопросе «размерность» [кг].

ГРАС-0

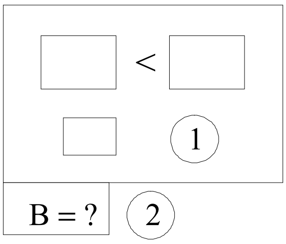


Рис. 47

Задача 2

Знакомая по задаче 1 цикла IV схема двух ГРАЭЛ-(> на), дополняется суммой (рис. 48). Предметная система обозначений предпочтительнее.

Видеть 3 слагаемых (**Я**, **Г**, $\mathbf{В_И}$), а не 5.

ГРАС-1

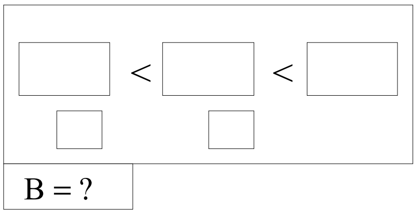


Рис. 48

Задача 3

Часть ГРАС задачи 11, цикла IV, дополняется суммой плюс сравнение (рис. 49).

С листа — удобное расположение слагаемых.

Обозначения: $\mathbf{В_А}$ (Ваня) — слагаемое, **В** (Всего) — сумма, $\mathbf{В_1}$ (Стоит) — скрытая сумма.

ГРАС-1

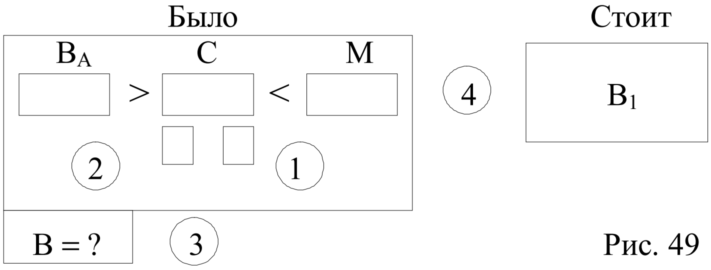


Рис. 49

Алгебра	**Арифметика**

а. 2) $В_А = С + 15 = 5 + 15 = 20$ (р.)

б. 2) $В_А = С + 15 = 5 + 5 = 10$ (р.)

а. 3) $В = В_А + С + М = 20 + 5 + 25 = 50$ (р.)

б. 3) $В = В_А + С + М = 10 + 5 + 25 = 40$ (р.)

Внимание.

В 3-м действии:

• выписываем слагаемые **строго последовательно** (слева направо);

• подставляем в «Алгебру» значения строго в соответствии с последовательностью слагаемых, т. е. НЕЛЬЗЯ, например, писать 5 + 25 + 20. Это важно для проверки третьего уровня (взгляд — слагаемое (имя слагаемого) — число).

Задача 4

Если — а так, скорее всего и случится — «Графика» будет рисоваться «автоматически», то, как правило, возникают проблемы с именами слагаемых. То ли 3-и слагаемых, то ли 4-е (по числу городов). Определившись наконец с числом слагаемых (три), начинают ломать голову над их именами: Р(остов), М(осква), Б(ерлин)? — не годится, ведь сказано: от Ростова до Москвы, от Москвы до Берлина… Тогда пытаются связать эти «от… до» в следующих обозначениях: Р–М, М–Б, Б–П. Уже лучше — 3-и слагаемых. Но ребенок настолько привык к изящным, кратким, точным именам, что его эстетическое чувство возмущено.

Вот здесь-то и стоит напомнить ему, что если с «Графикой» — сложности, то стоит ее упростить, стоит попробовать набросать вспомогательный рисунок, позволяющий легко определиться с числом слагаемых и именами, подобно тому, как мы это сделали в цикле I, задача 6 (рис. 11).

Последовательность осмысления задачи показана на рис. 50–53.

Нарисуйте по тексту (рис. 50).

Рис. 50

Спросите: «На сколько частей бьется весь путь от Ростова до Парижа?»

Видим на — 3 части. Следовательно, 3 слагаемых.

Раз путь (**S**), — значит обозначения стандартные индексные: $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$ (для 5–6-го классов и старше).

Дорисовываете. И ваш рис. 50 выглядит так (рис. 51).

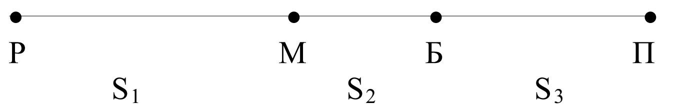


Рис. 51

С другой стороны, 3-и участка пути — это 3-и разных вида транспорта: поезд, самолет, автобус. Значит, возможная предметная система обозначений: **П**, **С**, **А** (3–5-й классы).

Дорисовываете рис. 51, и он выглядит так, как рис. 52.

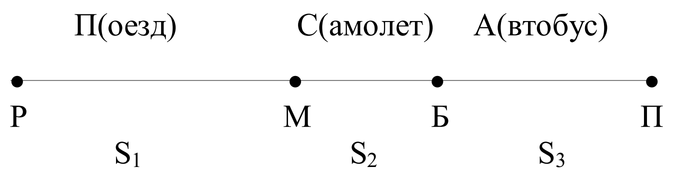


Рис. 52

Наконец, задаете вопрос о «размерности»: «Что считаем?… — Часы. А раз время (**T**), то и обозначения: $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$ (для 5–6-го классов и старше).

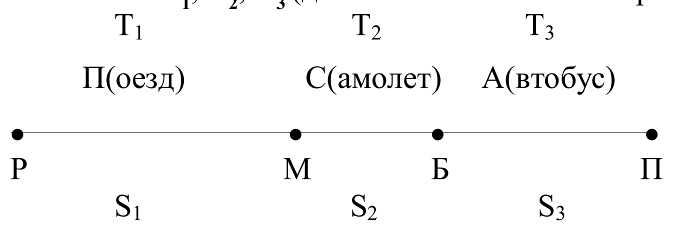
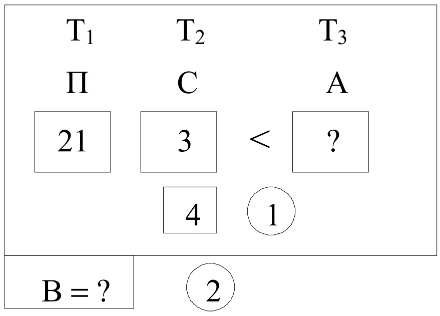


Рис. 53

Дорисовываете рис. 52, превращая его в рис. 53.

Теперь мы «считываем» вспомогательный рис. 53 в «Графику» без проблем (рис. 54).

Графика



Алгебра

1). А = С + 4
2). В = П + С + А

или

1). $T_3 = T_2 + 4$
2). $T = T_1 + T_2 + T_3$

Рис. 54

Замечание.

Вы видите, читатель, что простенькая задача в 2 действия имеет довольно много подводных камней. И ГРАН — отнюдь не бездумно используемый инструмент. Он требует активной творческой работы, просто суть этой работы, как мы теперь знаем, несколько иная, нежели только решение арифметических задач.

Мимоходом напомните ребенку, что хоть мы и могли использовать обозначения $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$, т. е. записать 1-е действие как $S_3 > S_2$ на 4, но **из соображений «размерности»** мы взяли $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$ (часы), т. е. $T_3 > T_2$ на 4. Таким образом, именно «размерность» определила выбор одного из двух вроде бы совершенно равноправных обозначений!

Задача 5

В этой задаче появляется такое понятие как **промежуточная** (вспомогательная) **сумма**. Смысл этого понятия вполне выясняется в ходе последовательного построения «Графики» задачи.

К настоящему моменту наше ви́дение таково, что задачу мы прочитываем буквально «скользя взглядом»: конфеты, шоколад, печенье — 3 слагаемых. Основной — последний вопрос задачи также вполне ясен: сколько всего?

Так и хочется не раздумывая набросать 3 «квадратика»-слагаемых, обвести их прямоугольничком-суммой — и дело в шляпе!

Останавливает только первый — вспомогательный — вопрос: сколько печенья?.. Как это нарисовать?

Анализ задачи с ребенком вы проводите в три шага, **последовательно «считывыя»** в «Графику» текст.

Шаг 1.

ГРАС-0

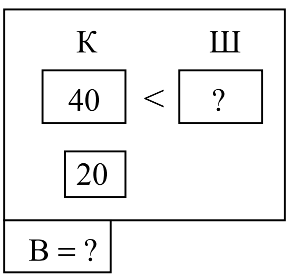


Рис. 55

К(онфеты) **и Ш**(околад) — все ясно, ГРАЭЛ-(> на).

Теперь **П**(еченье). — Тот же ГРАЭЛ-(> на), но в качестве слагаемого — сумма **К** и **Ш**.

Рисуете эту сумму (рис. 55).

Мгновенно видим «сложный» графический элемент ГРАС-0 (сравните с рис. 47, задача 1).

Шаг 2.

Видим по тексту, что можем записать ГРАЭЛ-(> на) для **П** (рис. 56). В качестве второго слагаемого можем взять сумму **В** из ГРАС-0 (рис. 55).

Основной вопрос задачи: «Сколько всего конфет, шоколада и печенья?» — нам известен с самого начала. Без каких-либо затруднений можем нарисовать его — вопрос (рис. 57).

ГРАС-1 **(ГРАЭЛ-(> на))**

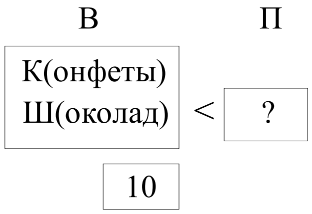


Рис. 56

ГРАС-0

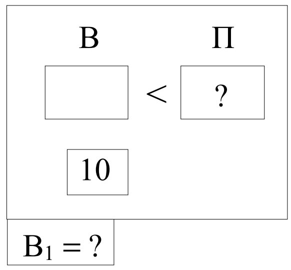


Рис. 57

Опять знакомая ГРАС-0, как на рис. 55.

Шаг 3.

Наконец, полная графсхема задачи (рис. 58).

Графика

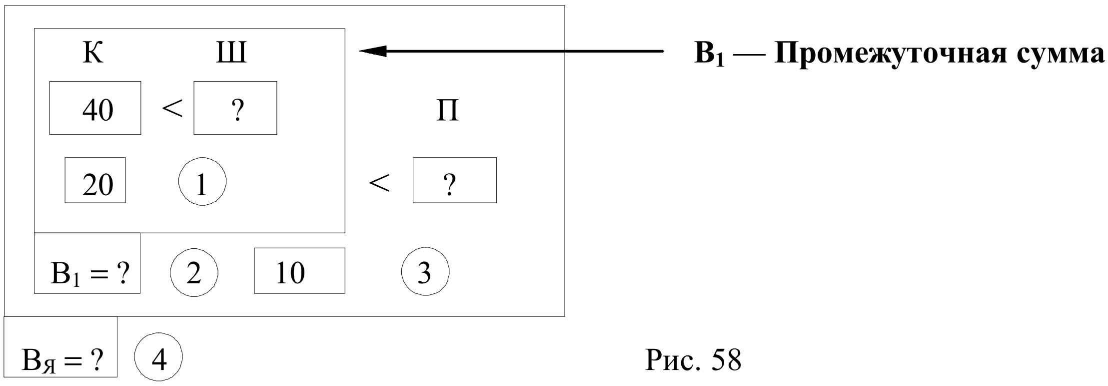


Рис. 58

Внимание.

Скажите ребенку, что такие суммы (**В**), как на рис. 55–56, мы будем называть **промежуточными** (вспомогательными) **суммами**. Название обусловлено тем, что в отношении «Больше НА» для П(еченья) **содержимым слагаемого В** является **сумма** (В = К + Ш).

Обратите внимание на то, что в «Графике» (рис. 58) у меня **поменялись местами** обозначения промежуточной и основной сумм (рис. 57). Это сделано из соображений **единообразия** обозначений. Мы «навсегда» для основной суммы резервируем обозначение **В** — без индекса. Соответственно промежуточные суммы будут индексными. То, как я использовал **В** и **$В_1$** на рис. 57, имеет лишь иллюстративный характер — мы ведь обязаны были дать разные имена. Ребенок же в дальнейшем не будет испытывать никаких проблем с обозначениями, если вы ему сразу по «Графике» (рис. 58) объясните вышесказанное об обозначениях промежуточных и основных сумм (ну и закрепите, разумеется).

Примечание.

В отличие от задачи 5 в задаче 4 нет необходимости вводить промежуточную сумму, т. к. ГРАЭЛ-(> на) связывает два слагаемых **А** и **С** (рис. 54), а не слагаемое (**П**) и сумму (**В$_1$**), как в данной задаче (рис. 58).

Задача 6

Так же, как и в предыдущей задаче, бегло, просматриваем текст, даже не стараясь особенно вникать в него: и так видно, что есть 2 промежуточные суммы — Школа–45 и Школа–1 (суммы — потому что «внутри» каждой школы есть по паре слагаемых). Основной вопрос задачи — сколько всего? — реализуется суммой — ГРАЭЛ-(∑) (рис. 59).

Обозначения слагаемых — промежуточных сумм — предельно ясны.

«Разворачиваем» содержимое промежуточных сумм по тексту прямо в «Графику». Мы уже можем позволить себе такую роскошь в силу нашего владения ГРАН (рис. 60).

ГРАС-1

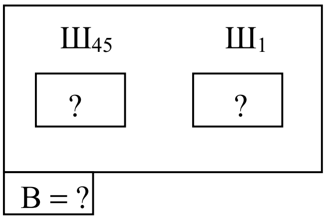


Рис. 59

Графика

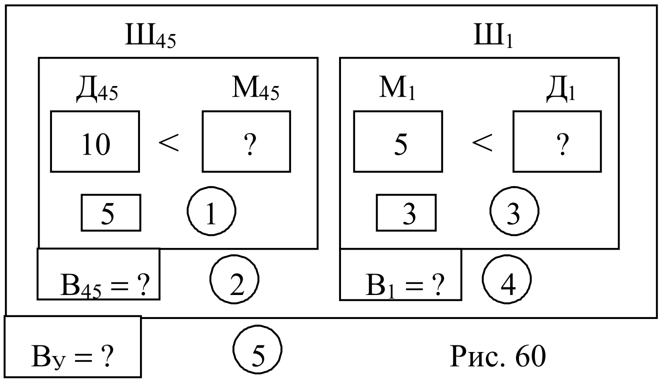


Рис. 60

Алгебра **Арифметика**

1). $М_{45} = Д_{45} + 5 = 10 + 5 = 15$ (у.)
2). $В_{45} = Д_{45} + М_{45} = 10 + 15 = 25$ (у.)
3). $Д_1 = М_1 + 3 = 5 + 3 = 8$ (у.)
4). $В_1 = М_1 + Д_1 = 5 + 8 = 13$ (у.)
5). $В = В_{45} + В_1 = 25 + 13 = 38$ (у.)

Вы видите, читатель, что процесс создания «Графики» идет быстро, точно, «автоматически». Не менее быстро и легко пишутся «Алгебра» и «Арифметика». Да, задача крайне проста. Но она ведь только демонстрирует применение промежуточных сумм в роли слагаемых; это, так сказать, голый логический скелет задачи, не отягощенный сюжетными и логическими изысками. Мы добиваемся того, что ребенку абсолютно все равно, сколько действий в задаче — он, «не думая», расписывает логическую структуру вкупе с алгебраической росписью действий, и, надо полагать, эта задача **ему уже скучна, поскольку не представляет никакого поля для размышлений**. Если так, то **скажите ему**, что это всего лишь подготовительная задача, во-первых, а во-вторых, практически все арифметические задачи действительно станут скучны и неинтересны, **однако, так и должно быть**: что же интересного в механической реализации алгоритма! **Но ГрафАнализ именно эту цель и преследует: не тратить время и усилия там, где не нужно их тратить**. А с другой стороны, умение видеть крупные логические структуры, умение работать **не задумываясь** с «Алгеброй», даст ему добротную основу технической подготовки для дальнейшего естественнонаучного обучения.

Внимание.

Вы заметили, читатель, как качественно изменились наши взаимоотношения? Я абсолютно уверен, что вы превосходно понимаете меня без каких-либо пояснений во всем: выделении сумм и слагаемых, отношений, расстановке действий, конструировании «Графики» и «считывании» ее в «Алгебру», в «размерностях». — Это если вы читаете книгу **в первый раз**. Помните, в «Предисловии для родителей» я говорил: прочтите сначала главу II («Сложение»).

А если вы читаете **во второй раз, готовясь к занятию** с ребенком, или даже провели его, то это уже качественно иной уровень ваших взаимоотношений с вашим ребенком. И это меня очень радует!

Задача 7

Как вы заметили, последняя задача всегда гораздо легче предыдущих, в ней нет ничего нового.

Ребенок уже устал. Поэтому завершающая задача должна разрисовываться **полностью автоматически** (теперь — без кавычек), почти бездумно. Нужно, чтобы в последние минуты занятия ребенок насладился мощью своего ви́дения, умелостью рук. Поэтому без особых размышлений рисуется ГРАС-1 (рис. 61).

ГРАС-1

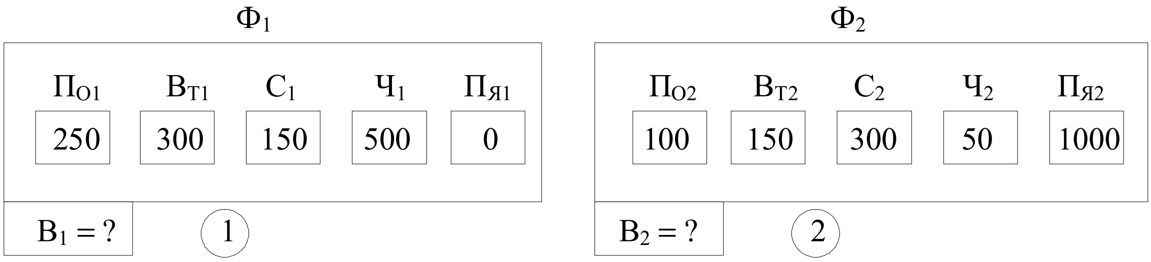


Рис. 61

ГРАС-2

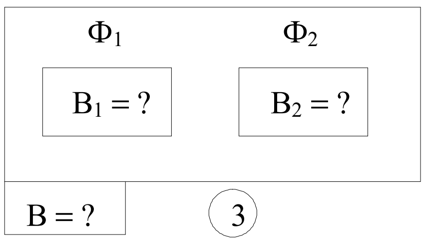


Рис. 62

400 800

1). $В_1 = П_{О1} + В_{Т1} + С_1 + Ч_1 + П_{Я1} = 250 + 300 + 150 + 500 + 0 = 1200$

2). $В_2 = П_{О2} + В_{Т2} + С_2 + Ч_2 + П_{Я2} = 100 + 150 + 300 + 50 + 1000 = 1600$

400 200

3). $В = Ф_1 + Ф_2 = 1200 + 1600 = 2800$

Внимание.

Все чаще и чаще ГрафАнализ будет нам показывать, в буквальном смысле слова, что основная задача начальной школы (и далее — до 6-го класса включительно) состоит в том, чтобы научить ребенка быстро и грамотно считать. Как только логическая структура задачи перестанет представлять для него какие-либо сложности, а значит и какой-либо интерес, — это станет очевидно (особенно, после освоения всех четырех арифметических действий).

Посмотрите сами, читатель, на ГРАС-2 (рис. 62) и «Алгебру» данной задачи: ребенку они предельно ясны и рисуются за 2–3 минуты. Но **обратите внимание** ребенка на «Арифметику».

Я бы советовал вам приучать ребенка применять методы рационального счета именно так, как у меня нарисовано. Поскольку с точки зрения школы наши «Графика» и «Алгебра» — всего лишь черновик, то пусть ребенок на этом черновике **показывает себе линиями**, какие числа он складывает (например 250 и 150) и **обязательно пишет результат** (400). Вы видите, что при таком подходе, во-первых, очень трудно ошибиться — все перед глазами, — а во-вторых, сразу, мгновенно выявляются счетные проблемы, если они возникнут.

Я убежден по опыту: для многих из вас будет полной неожиданностью, когда вы обнаружите, что на самом-то деле не решение задач является камнем преткновения для ребенка (после того, как он хорошо овладеет инструментарием ГРАН), а… Да, да, да!.. — Счет.

> Плохой же счет: медленный, ошибочный, «беспроверочный» — не просто «ошибки в вычислениях», **но принципиальное ограничение** для овладения алгебраической техникой 7-го класса и дальнейшего небольшого набора основных понятий школьной математики: корня, радиана, логарифма.
>
> Все вместе создает непреодолимые сложности в овладении «элементарным матанализом в объеме первых двух курсов»!

В развитие темы счета.

Я не сомневаюсь, что задачи 8–10 **мгновенно** подтвердят на практике для большинства родителей то, что было сказано о вычислительной технике (причем не только для детей 5–6 классов, но порою и постарше). А ведь речь будет идти **всего лишь о сложении** многозначных чисел!

Первой неожиданностью для них явится неспособность ребенка **просто правильно прочитать** числа, начиная с разряда сотен (а то и десятков) тысяч и выше.

Далее, разумеется, относительно быстро и правильно посчитать.

А ведь задача 8 — полный аналог задачи 2. Задачи 9–10 — аналоги задачи 5. Единственное — и совершенно непринципиальное! — отличие задачи 10 от задачи 5 состоит в том, что в промежуточной сумме $\mathbf{B_1}$ вместо ГРАС–0 используется ГРАЭЛ-(∑), и на одно действие меньше.

Графику я опускаю, ограничиваясь (для самоконтроля) «Алгеброй» и «Арифметикой».

Задача 8

1). А = К + 19 876 = 25 025 + 19 876 = 44 901
2). Д = А + 5 004 = 44 901 + 5 004 = 49 905
3). В = К + А + Д = 25 025 + 44 901 + 49 905 = 119 831

Задача 9

Обозначения слагаемых:
Д — кратеры в море Дождей
Б — кратеры в океане Бурь
О — кратеры на обратной стороне Луны
$В_1$ — промежуточная сумма

1). Б = Д + 2 045 = 1 999 + 2 045 = 4 044
2). $В_1$ = Д + Б = 1 999 + 4 044 = 6 043
3). О = $В_1$ + 13 877 = 6 043 + 13 877 = 19 920
4). В = $В_1$ + О = 6 043 + 19 920 = 25 963

Задача 10

Обозначения слагаемых:
Б — хрямзики
М — хмурзики
Л — лентяи
$В_1$ — промежуточная сумма

1). $В_1$ = Б + М = 187 029 + 2 205 301 = 2 392 330
2). Л = $В_1$ + 21 087 097 = 2 392 330 + 21 087 097 = 23 479 427
3). В = $В_1$ + Л = 2 392 330 + 23 479 427 = 25 871 757

Очень важно!

Я провел хронометраж времени, потраченного на задачи данного цикла с той целью, чтобы напомнить вам, читатель, что при подготовке занятия (после прочтения материала цикла) вам необходимо самостоятельно воспроизвести решения, **включая счет** (т. е. все — от «Графики» до «Арифметики»), и при этом — следить за временем.

Мои временны́е затраты оказались таковы (таблица 1).

Вы видите, что затраты времени на задачи 1–7 и задачи 8–10 практически совпадают.

У вас должно быть будут примерно те же результаты. Но учтите, что вы сначала проработали материал цикла и затем просто воспроизводите его (естественно, что в «Арифметике» вы считаете **вручную**).

Во время занятия ребенок впервые знакомится с задачами, слушает какие-то пояснения, слегка отвлекается, и, к тому же, пишет и считает он, как правило, медленнее вас. Тем самым, вам придется разбить цикл **на 2-а занятия**: задачи 1–7 и задачи 8–10.

Обязательно воспользуйтесь случаем еще раз обратить внимание ребенка не только на важность счета, но и на то, **как тяжел** вычислительный труд, **как много времени он занимает!** А ведь конечная оценка работы в школе (и не только в школе!) будет зависеть **от верного числового** результата.

Обязательно буквально заставьте осуществить все три уровня проверки, как это описано в задаче 1 цикла IV. Особенно остановитесь на проверке первого и третьего уровней — правильность внесения числовых данных в «Графику» и «Арифметику». Вы видите, сколько у меня ушло на это времени! Если «Графика» рисуется автоматом, то числовые данные при наличии проверки замедляют решение неимоверно.

Проверка третьего уровня может быть проведена с помощью калькулятора, но, напоминаю, **только после того**, как вычисления **проверены вручную** (столбики вычислений расположены на том же самом листе, где и задача, чтобы не приходилось вместо проверки проводить счетную работу вторично).

Если выяснится, что существуют проблемы со сложением многозначных чисел, — обязательно ликвидируйте их!

После того, как мы научимся правильно читать числа, обязательно надо научиться **грамотно записывать их в столбик**:

- разряд под разрядом
- «не тесниться»

• отделять классы единиц, тысяч, миллионов пробелами (или точками в дальнейшем), как у меня, и разумеется, писать цифры четко и однозначно.

И последнее.

Таблица 1

Задача №	**Время (мин) ≈**
1	2
2	2
3	4
4	6 (4 + 2)
5	2
6	4
7	5
Итого:	**~ 24–25**
8	6
9	9 (2 + 7)
10	7 (2 + 5)
Итого:	**~ 23–24**
В скобках указано время, потраченное на «Графику» + «Алгебра» с «Арифметикой».	

Вы видите, мои решения даны так, что «Алгебра» сразу доводится до числа, но я это сделал лишь из соображений экономной записи (все ведь понятно и пояснений не требуется). Напоминаю, если ребенку трудно писать решение всей задачи в общем виде (отдельно «Алгебра», отдельно «Арифметика»), то не усердствуйте особо. Пусть он доводит до числа каждое действие, если ему необходима числовая конкретика — всему свое время. Но очевидно, что этот прием хорош в случае простеньких чисел. Стоит только начать работать в задаче с многозначными числами, как мы мгновенно впадаем «в хаос перескока», что так характерно для стандартного школьного подхода. Смотрите, вся «Алгебра» у нас занимает всего полминуты-минуту (поэтому в таблице 1 она отдельно не выделена), а далее, уже имея решение, мы ни о чем не думаем, кроме счетной работы, мы полностью сосредоточены на вычислениях. Если же мы напишем **за 5 секунд** первое уравнение «Алгебры» и потом **2–3-и минуты** будем считать, а затем опять вернувшись к «Алгебре», вынуждены будем сначала посмотреть на «Графику», чтобы восстановить в памяти последовательность действий, а потом опять ринемся в долгий и утомительный счет… Надеюсь, понятно, что при таком хаосе произойдет? — И это в задачках в 3–4 действия. А посложнее?!

Вывод.

Задачи с многозначными числами (а так и происходит в реальной вычислительной практике инженера, ученого…) **просто требуют** перехода к решению задач в общем виде. Да что там — инженер! Уже школьные физика, химия, геометрия невозможны без умения решать задачи в общем виде — работать только с алгеброй, только с формулами.

Цикл VI. Продолжение цикла V (задачи в 2–6 действий)

1. Маше принесли подарок на день рождения. Шоколадных конфет в подарке было на тридцать штук больше, чем карамелек, а карамелек на десять штук больше, чем мандаринов. а). Сколько в подарке было шоколадных конфет, если известно, что все пять мандаринов Маша съела? б). Как изменится ход решения задачи, если я скажу: Маша съела только три мандарина, а остальные два отдала своей сестричке Саше и маме? (*)(*)

2. Когда Маша было маленькой, у нее было на десять кукол больше, чем сейчас у Саши? У Саши сейчас кукол больше, чем у меня на двадцать штук. Сколько у маленькой Маши было кукол, если точно известно, что в куклы я никогда не играл? (*)(*)

3. Аня по французскому языку получила на пятнадцать пятерок больше, чем по русскому. По русскому языку у Ани сейчас столько же пятерок, сколько по истории и математике. Сколько пятерок по французскому языку получила Аня, если известно, что первую пятерку по математике она получит только к Новому году, а по истории у нее сейчас одна пятерка?
(••)(=)(*)

4. Белок в лесу жило на десять штук больше, чем ежей, а ежей на пять штук больше, чем зайцев. Когда лесники пересчитали всех животных в лесу, то выяснилось, что кроме белок, ежей и зайцев в лесу живут еще два медведя и три волка. И, как ни странно, оказалось, что зайцев ровно столько, сколько волков и медведей. а). Сколько в лесу живет белок? б). А сколько всех животных в этом лесу? [(••)(=)(*)(*)](••)

5. В Тихом океане плавают синие киты и этих китов на тридцать штук больше, чем красных акул. Акул на 20 штук больше, чем рыб-молотов, которых столько же, сколько морских коров и морских коньков. Морских коньков на пятнадцать больше, чем морских коров. Сколько синих китов плавает в Тихом океане, если известно, что последнюю морскую корову подстрелили в начале прошлого века? [(*)(••)](=)(*)(*)

6. На острове пираты спрятали клад. В двух сундуках золотых монет было на тысячу двести больше, чем серебряных. В шкатулке оказалось столько рубинов и алмазов, сколько в сундуках было серебряных монет. А в бочке пираты спрятали медных монет на три тысячи больше, чем в двух сундуках было золотых и серебряных монет. Сколько медных монет было в бочке, если в шкатулке лежало триста рубинов, а алмазов на пятьсот больше
[(*)(••)](=)[(*)(••)](*)

Ответы: 1) а. 45 шт., б. 45 шт., никак не изменится; 2) 30 к.; 3) 16 п.; 4) а. Б = 20 шт., б. В = 40 шт.; 5) 65 шт.; 6) 6400 шт.

Общие замечания.

Этот цикл является завершающим в главе «Сложение». Ребенок имеет возможность применить все свои знания и умения в конструировании решений задач, отработанные на «логических кубиках» (простые и сложные графэлементы) предыдущих циклов.

Но, разумеется, цикл преследует и свои собственные цели, помимо закрепления навыков игры с «конструктором» текстовых задач.

Расширение инструментария ГРАН сводится к следующему:

1. «Обратное» построение условия.

Пока мы используем задачи без условий связи (т. е. не требующие применения систем уравнений), и все задачи решаются **«от одного» известного слагаемого**. До сих пор это слагаемое находилось **перед вопросом** в условии задачи, да и сами условия и вопросы четко разделялись. Теперь же вопрос задачи расположен в текстовом пространстве условия, и известное слагаемое находится **после вопроса** и других слагаемых!

В результате работы с такой текстовой конфигурацией мы добьемся того, что «сам по себе» текст не будет являться препятствием при построении «Графики».

2. 0 (ноль) — тоже число.

В задачах 2, 3, 5 мы научимся видеть «0» как число, с которым можно работать, иными словами, выявлять **скрытые** в тексте данные.

3. ГРАЭЛ-(=).

Вводится, помимо двух известных, третий ГРАЭЛ — ГРАЭЛ-(Равенства), — третье основное отношение.

4. АИД — алгоритм извлечения данных.

Излагается **технологический** прием, носящий название «алгоритм извлечения данных» — АИД, дающий возможность алгоритмизировать процесс решения задачи (поиск в тексте значимых элементов).

Сценарий.

Задача 1

Если мы нарисуем первые два предложения задачи — до вопросов, — то увидим, что все три слагаемых в условии нам неизвестны (рис. 63).

ГРАС-1

Ш К М

$\boxed{?} > \boxed{?} > \boxed{?}$

$\boxed{30}$ $\boxed{10}$

Рис. 63

Известное слагаемое появляется в той части условия, которая следует за вопросом «…все пять мандаринов… съела».

При арифметическом способе решения это могло бы обескуражить ребенка. Но ГрафАнализ уже приучил его не бояться неизвестных, и, скорее всего, он легко обнаружит, что М = 5 (число мандаринов — известное слагаемое).

Другое дело, что его может сбить слово «съела». Съела — значит нет мандаринов, значит ноль мандаринов?.. Но рис. 63 показывает, что нам неважно (**в отличие от задачи 5**) то, что именно произошло с мандаринами (в определенном смысле можно сказать: «лишние данные»). **Важно, что их было 5**.

Ясен выбор имени первого слагаемого Ш(околадные конфеты), т. к. есть еще имя К(арамель).

«Размерность» — штуки [шт], т. к. разнородные слагаемые (мандарины, конфеты, карамель); объединяющий их признак — количество, «штуки».

Окончательно рисуем «Графику» (рис. 64).

Видим: графсхема задачи полностью тождественна ГРАС задачи 1, цикл IV (рис. 33). Наибольший интерес представляет то, что до конца условия, до самого вопроса задачи, нам ничего неизвестно о содержимом слагаемых (рис. 63).

Графика

Ш 2 К 1 М

? > ? > 5

30 10

Рис. 64

Обратите внимание ребенка на 2-й вопрос задачи (б). Это классический пример введения в условие **лишних данных**! **3** мандарина съела, а оставшиеся **2** отдала…

ГРАС-1 (рис. 63) с очевидностью показывает нам, что **3 и 2 — лишние данные**, поскольку **в ГРАЭЛ-(> на) участвуют только 2 слагаемых**: К(арамель) и М(андарины).

Всего М = 5. И нам дела нет до того, что 3 мандарина съедены, а 2 отданы! Нас интересует только одно: **сколько всего** мандаринов было? — М = 5 шт.

Задача 2

Графика

М С Я

? > ? > 0

2 10 1 20

Рис. 65

Задача отличается от предыдущей только данными: Я = 0 к (рис. 65). Тем не менее это очень важный момент, который можно сформулировать так: «**ноль — тоже число**»!

В подавляющем большинстве случаев дети (любого возраста!) **не видят** того, что слагаемое **Я** — задано в тексте фразой «…в куклы **я никогда** не играл».

Они настолько привыкают к числам, что перевод на язык математики этой фразы (т. е. осознание того, что «я **никогда**» означает — у меня **не было** кукол, а раз **не было**, то это значит: у меня **было 0** (ноль) кукол) становится для них крайне затруднительным. Это тем более так, что я намеренно сделал условие несколько расплывчатым. Ведь если «ну совсем строго» подходить, то можно сказать, что фразу «…в куклы я никогда не играл» можно интерпретировать и так: куклы у меня были, но я в них не играл.

Если формально строго, то да: можно и так понять задачу. И тогда мы должны были бы сказать: задача не имеет решения, поскольку неизвестно, сколько у меня было кукол.

Но, читатель, реальные инженерные и научные задачи на этапе осмысления, на этапе постановки сплошь и рядом расплывчаты и неопределенны в куда большей степени. Совершенно справедливо замечено, что сформулировать задачу — уже наполовину ее решить.

Думается, я смог соблюсти нужную меру неопределенности и конкретности, чтобы из самой содержательной сути задачи был ясно виден выбор: никогда не играл, означает — число кукол у меня равно 0. В противном случае задача будет просто неинтересна.

Замечание.

Алгебра **Арифметика**

писать 0 (ноль)

1). С = Я + 20 = 0 + 20 = 20
2). М = С + 10 = 20 + 10 = 30

Необходимо в «Арифметике» **писать** содержимое слагаемого **Я, т. е. 0**. Это, кстати, пригодится и в программировании, где машина может работать только с числами.

Задача 3

Аня по французскому языку получила **на** пятнадцать пятерок **больше**, чем по русскому. По русскому языку у Ани сейчас **столько же** пятерок, **сколько** по истории **и** математике. Сколько пятерок по французскому языку получила Аня, если известно, что первую пятерку по математике она **получит** только к Новому году, а по истории у нее сейчас одна пятерка?

Внимание.

Задача 3 важна тем, что ее решение демонстрирует в полном объеме **технологический прием** ГрафАнализа, который я назвал **АИД — алгоритм извлечения данных** (по-настоящему АИД работает в задачах «на движение», но это тема другой книги).

Далее в задаче подчеркиванием выделены **значимые элементы** текста: слагаемые и отношения. Мы совершенно сознательно, следуя технологии ГРАН, именно их и ищем. На рис. 66–68 показана **последовательность извлечения данных** из текста.

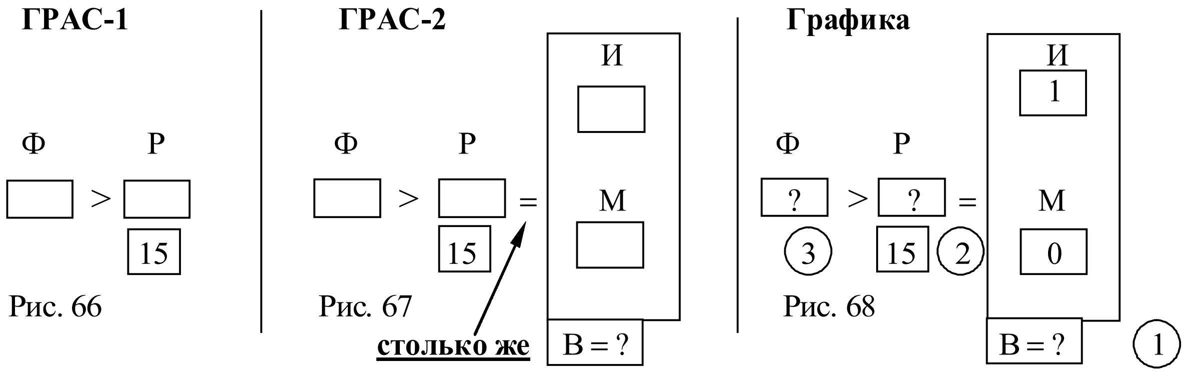


Рис. 66 Рис. 67 Рис. 68

Алгебра **Арифметика**

писать 0 (ноль)

1). В = И + М = 1 + 0 = 1

2). Р = В = 1 ⟵ **писать равенство**

3). Ф = Р + 15 = 1 + 15 = 16

Значимые элементы (последовательность указана в соответствии с текстом):

1. на … больше — ГРАЭЛ-(> на) — отношение «Больше НА», **Ф**(ранцузский), **Р**(усский) — слагаемые отношения;

2. столько же … сколько — ГРАЭЛ-(=) — отношение «Равенства», слагаемые отношения: **Р**(усский) , **В**(сего) = [**И**(стория) и **М**(атематика)];

3. (по истории) **И** (математике) — союз «И» ⇔ понятию суммы (Всего);

4. первую (пятерку по математике) **получит** (в будущем, т. е. сейчас у нее **НЕТ** пятерок), **М = 0**, (по истории) **одна** (пятерка) ⇔ **И = 1** — извлекаем содержимое (значения) известных слагаемых **М** и **И**.

АИД — алгоритм извлечения данных:

- Из **первого предложения** текста задачи ⇒ **п. 1** (значимые элементы) ⇒ **ГРАС-1** (рис. 66).
- Из **второго предложения** текста ⇒ **п. 2** и **п. 3** (значимые элементы) ⇒ **ГРАС-2** (рис. 67).
- Из **последнего предложения** ⇒ **п. 4** (значимые элементы).

Объединяя все пункты АИД, ГРАС-1 и ГРАС-2, получаем «Графику» (рис. 68), *не требующую пояснений*.

Обратите внимание на наречие «**столько … сколько**» (п. 2, значимые элементы). Это «**ключевые слова**», которыми выражается **отношение «Равенства»**. Итак, кроме двух известных нам ГРАЭЛов, **вводится третий — ГРАЭЛ-(Равенства)**.

<u>Обозначение</u>: **ГРАЭЛ-(=)**.

Также «**ключевым словом**» является **союз «И»**, которым вводится **сумма**.

Следуя вышесказанному, можно так сформулировать **АИД**:

1. «Скользя по тексту» — ищем «**ключевые слова**»: «на … больше», «столько … сколько» ⇔ ГРАЭЛ-(> на), ГРАЭЛ-(=); союз «И», связывающий два слагаемых, ⇔ ГРАЭЛ-(∑).

2. Зная, что в каждом ГРАЭЛе участвуют ДВА слагаемых, **параллельно** с ключевыми словами ⇔ отношения ⇔ ГРАЭЛы, выделяем **слагаемые**, связанные этими ГРАЭЛами.

3. Параллельно же обращаем внимание **на любое число** ⇔ значение какого-либо слагаемого.

Как видите, читатель, наконец-то я смог выполнить свое обещание — алгоритмизировать процесс решения текстовых задач. В дальнейшем, как уже говорилось, будут только добавляться ГРАЭЛы соответствующих арифметических действий.

Конечно, не всегда задачи будут поддаваться решению методами ГРАН так просто (хотя и в подавляющем большинстве случаев!). Но самое главное мы с вами теперь знаем — общую технологию ГрафАнализа, АИД.

Само собой разумеется, что эту задачу вы **подробно** разберете с ребенком.

Внимание.

Обратите внимание ребенка на 1-е и 2-е действия задачи.

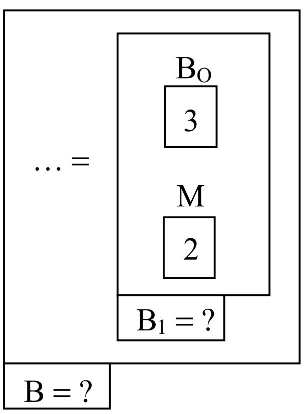
В 1-м действии в «Арифметике» нужно писать 0 (ноль) — значение слагаемого **М** (этот вопрос мы разобрали в предыдущей задаче).

Во 2-м действии отношение «Равенства» связывает два слагаемых: **Р**(усский) и **В**(сего). Одно слагаемое неизвестно (**Р**). Значит, чтобы его вычислить, мы должны осуществить **действие** «приравнивания».

В «Алгебре» 2-е действие (Р = В = 1) **обязательно** должно быть записано. Для ребенка это непривычно, **подразумевается само собой**. Однако тот, кто сталкивался с программированием, знает: для того, чтобы «приравнять» (присвоить) переменной какое-либо значение, нужно применить оператор присваивания (осуществить действие!).

Когда мы решаем задачу чисто арифметически, то мы **не замечаем отношения «Равенства»**, не отдаем себе отчета в том, что это — **действие**. ГрафАнализ на уровне «Графики» и «Алгебры» ясно демонстрирует равенство как действие: если мы **не поставим** знак «=» между слагаемыми **Р** и **В**, то просто **не сможем** посчитать **Р**.

ГРАС-1



$В_О$ — волки
$В_1$ — промежуточная сумма (волки и медведи)
В — основная сумма (сколько всех животных)

Рис. 69

Задача 4

Основой задачи является задача 3, поэтому я привожу только фрагмент данной задачи, связанный с именами слагаемых (рис. 69).

Задача 5

Об обозначениях.

В слагаемых «морские коровы» и «морские коньки» слишком много совпадающих букв. Если бы мы, следуя индексной системе, выбрали обозначения $М_{КОР}$ и $М_{КОН}$, то они были бы **слишком громоздки** для такой **простой** задачи.

Стоит воспользоваться преимуществами ГРАН и дать стандартные индексные обозначения $\mathbf{М_1}$ и $\mathbf{М_2}$ (или $\mathbf{К_1}$ и $\mathbf{К_2}$) этим слагаемым, а внизу (или вверху, над $\mathbf{М_1}$ и $\mathbf{М_2}$) написать их полные содержательные имена «коровы» и «коньки» (рис. 70). Тогда уравнение 1-го действия будет выглядеть более элегантно:

1) $В = М_1 + М_2$

Сравните:

1)′ $В = М_{КОР} + М_{КОН}$

Ошибиться, глядя на «Графику», невозможно

(Но возможно вашему ребенку, читатель, более по душе окажутся имена уравнения (1)′. Что ж, может быть и не стоит его отговаривать, если только индексы «кор» и «кон» прописаны четко.

Графика

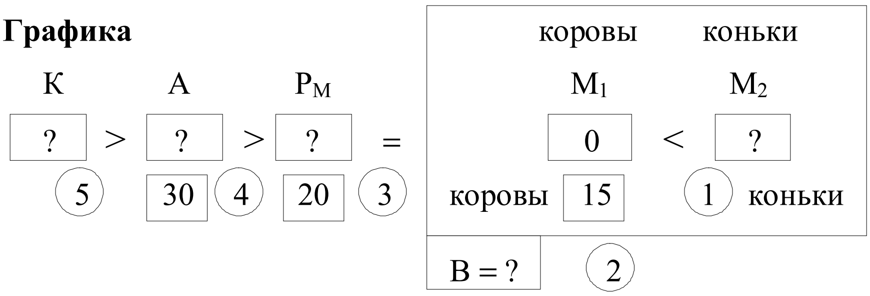


Рис. 70

Аналогично задаче 2, фраза «… подстрелили в начале века» означает, что **сейчас** морских коров **уже нет**. В математику эта фраза переводится как $М_1 = 0$ — скрытые данные.

Задача 6

1. «Графика» (рис. 71) пояснений не требует.

2. Обязательно обратить внимание на лишние данные — «в двух сундуках» — вопросом: «Что считаем?.. Сундуки, шкатулки, бочки?.. Нужно нам знать, что именно два

Графика

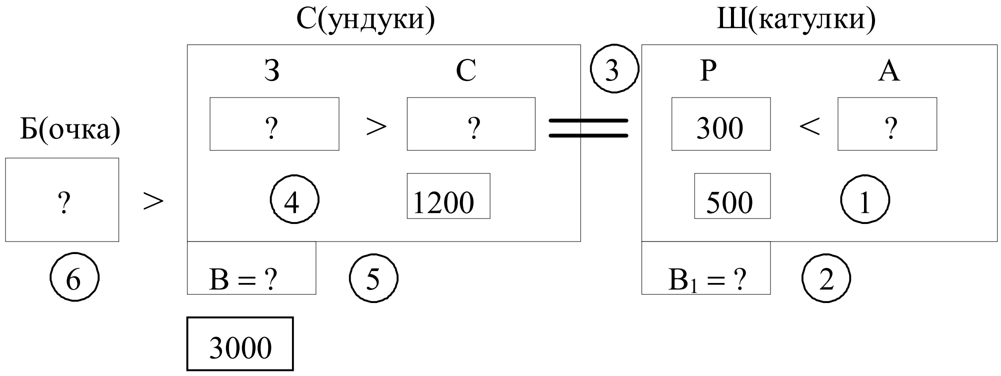


Рис. 71

сундука, а не один или три?» — Как правило, ребенок начинает перебирать: «… монеты?.. Нет… Алмазы?.. Нет…», пока не придет к выводу о единой «размерности» — «штуки». То, что именно «два сундука», ему не понадобится — видно из «Графики», ибо **сумма В** будет названа «Сундуки». А сумма для него в этой задаче — **слагаемое** ГРАЭЛа «Больше НА».

3. Использование **индексных** обозначений было бы **крайне неудобно** из-за большого числа «разнородных» слагаемых и поэтому крайне затрудняло бы проверку!

Алгебра	**Арифметика**
1). А = Р + 500	**1).** А = 300 + 500 = 800
2). $В_1$ = Р + А	**2).** $В_1$= 300 + 800 = 1100
3). С = $В_1$	**3).** С = 1100
4). З = С + 1200	**4).** З = 1100 + 1200 = 2300
5). В = З + С	**5).** В = 2300 + 1100 = 3400
6). Б = В + 3000	**6).** Б = 3400 + 3000 = 6400

Внимание.

На сей раз все три блока решения реализованы по отдельности.

Если вы убедились, что ваш ребенок привык к «Алгебре», она для него предметна и естественна, числовое подкрепление (непосредственная арифметическая реализация каждого действия) не требуется, то переходите на такую форму записи решения (форма I, рис. 34а).

Тем самым мы резко повышаем **уровень математической техники** ребенка, и «в чистом виде» будем вести три уровня проверки, о чем уже рассказано в цикле IV, задача 1.

Напомню, что проверка должна вестись по каждому блоку отдельно:

• **Нарисовали «Графику» и:**

«Графика» — текст — «Графика»: проверяем отношения, число слагаемых, их значения (содержимое слагаемых). **Только потом** — расстановка действий по критериям: можем посчитать?.. имеем в каждой сумме **два известных** слагаемых?

• **Написали «Алгебру» и (по действиям):**

«Алгебра» (слагаемое) — «Графика» — «Алгебра»: смотрим — слагаемое известно, ⇒ сумму посчитать можем… И так — до последнего действия.

Помним: с текстом уже не работаем! — Только с «Графикой». Поэтому-то **проверка** построения «Графики» — самый важный этап проверки.

• **Написали «Арифметику» и (по действиям):**

«300 плюс 500… — восемьсот… — верно…». И так — до конца.

• **Работают обе руки.**

Экзаменационная задача по теме «Сложение»

Задача для ученого-историка.

Во времена Пифагора считали, что Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и Сатурн прикреплены к прозрачным хрустальным сферам, которые вместе с планетами и Солнцем вращаются вокруг Земли.

После Пифагора древнегреческому ученому Евдоксию пришлось ввести еще двадцать сфер, чтобы правильно вычислять положение планет на небе. Но и этих сфер скоро не хватило для того, чтобы безошибочно определять положение планет. Один из учеников Евдоксия добавил еще семь сфер. И все равно астрономы вычисляли положения планет с ошибками, пока, наконец, великий древнегреческий философ и ученый Аристотель не увеличил число имеющихся сфер на двадцать одну.

Скажи, сколько хрустальных сфер потребовалось Аристотелю, чтобы некоторое время более-менее верно вычислять положение планет на небе?

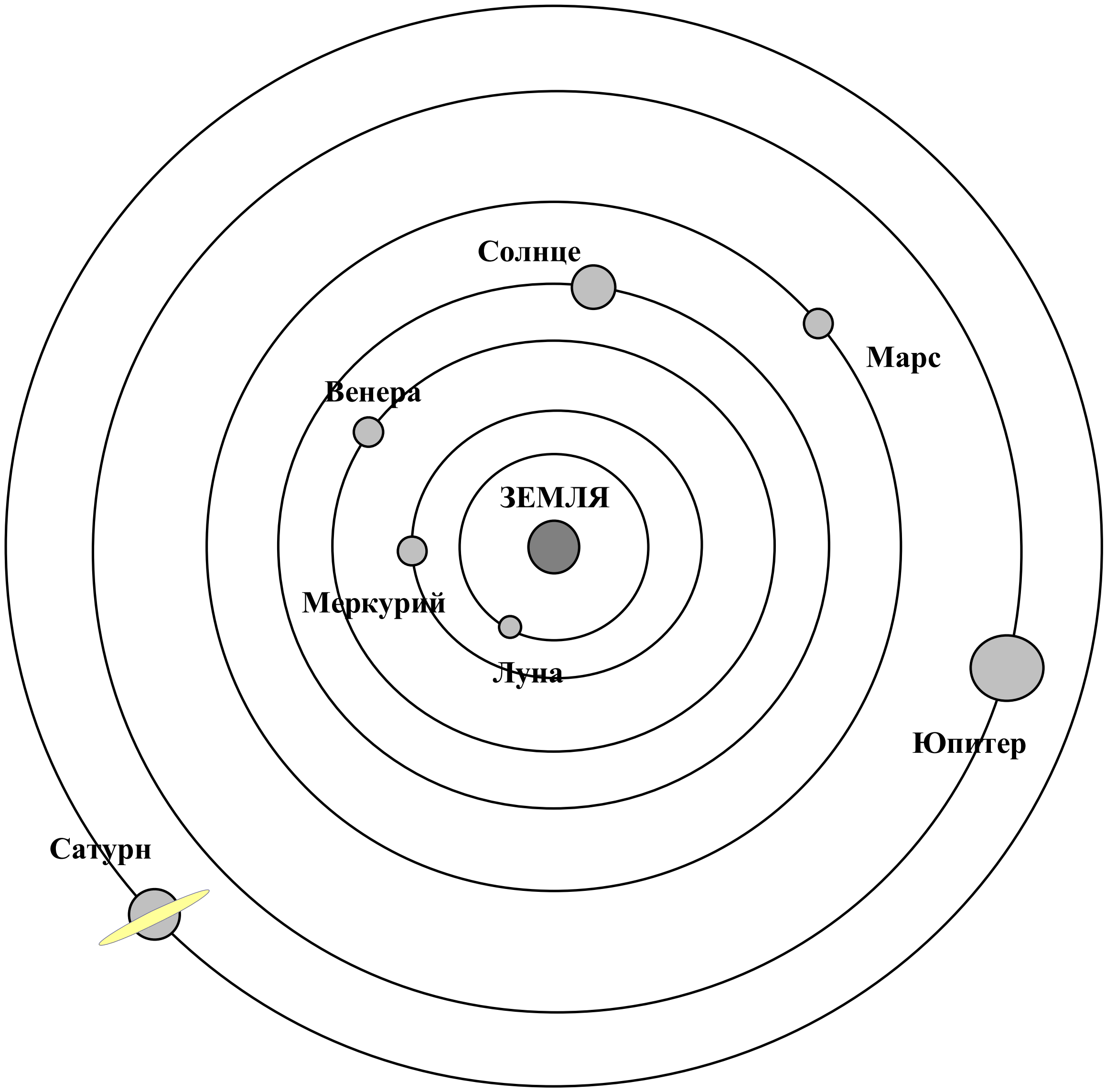


Рис. 72

Конечно же, для вашего ребенка после того, как он одолел самую важную часть ГрафАнализа, эта задача по своей **логической структуре** — детский лепет. Задачка-то в 2-а действия!

Замечание.

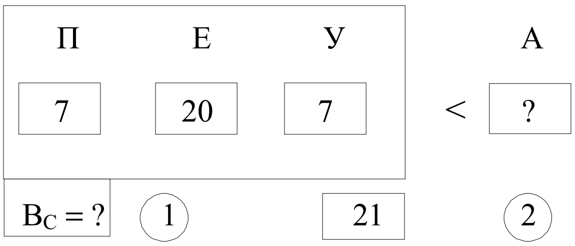
Простота логической структуры вовсе не означает легкости извлечения данных. Даже в таком простом случае как наш, думаю, стоит напомнить, что «…еще двадцать сфер», «…еще семь сфер» — слагаемые (**Е** и **У**), а вот «…увеличил… на двадцать одну» — отношение «Больше НА».

Но столь необходимо закончить первую часть ГрафАнализа на высокой ноте, столь необходимо отметить первую **значимую** победу ребенка, столь необходимо вместе весело посмеяться над «суперзадачей», что я ни на миг не сомневаюсь, читатель, вы понимаете, что двигало мной!

Данные для этой задачи я почерпнул из книги Э. Роджерса «Физика для любознательных», том II (с. 49, 58, 60). Устройство вселенной, по представлениям древних греков, вы видите на рис. 72.

«Графика» задачи приводится без пояснений (рис. 73).

Графика



Алгебра **Арифметика**

1). В = П + Е + У = 7 + 20 + 7 = 34
2). А = В + 21 = 34 + 21 = 55

Рис. 73

Резюме главы II

ГрафАнализ мы можем назвать «конструктором» решений текстовых арифметических задач, поскольку решения строятся из логических элементов, деталек — ГРАЭЛов и ГРАС — по строгим технологическим правилам.

I. Введены три графических элемента (рис. 74):

1. ГРАЭЛ-(∑) — ГРАЭЛ-(Суммы) — соответствует логическому элементу арифметики, выражающему действие сложения (цикл I, задача 1).

2. ГРАЭЛ-(> на) — ГРАЭЛ-(Больше НА) — соответствует отношению «Больше НА» — первое и важнейшее из 3-х основных отношений арифметики (цикл II, задача 1).

3. ГРАЭЛ-(=) — ГРАЭЛ-(Равенства) — соответствует 3-му из отношений арифметики, отношению «Равенства» (цикл VI, задача 3).

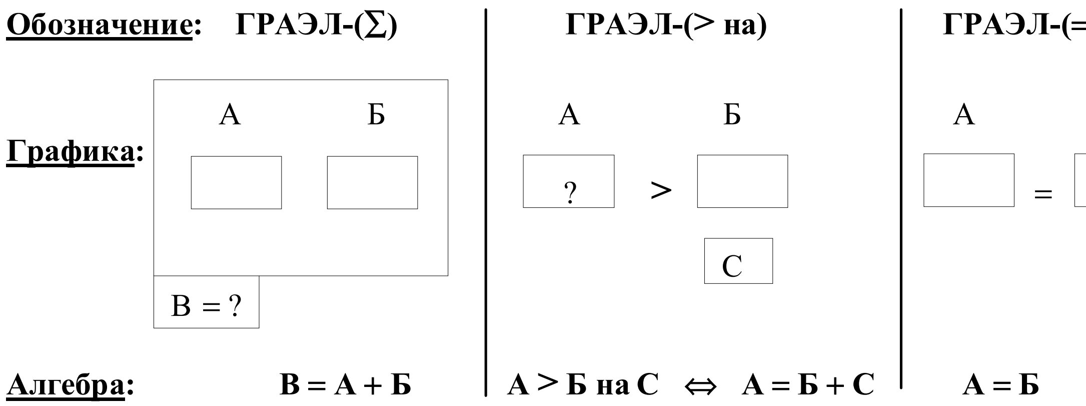


Рис. 74

II. Технологические приемы ГрафАнализа:

- **Психологического характера**

1. Заповеди ученика (см. п. «Немного о сложение, важные замечания»):

- только вслух
- не бояться ошибок, а быть уверенным, что они будут
- обязательная 3-х уровневая проверка.

2. Не будьте слишком серьезны во время занятий. Занятие для ребенка — источник радости и уверенности в своих силах (см. конец цикла II).

3. Должны работать обе руки. Проверка не «на глаз» (см. цикл IV, задача 1 и цикл VI, задача 6).

4. Напоминайте, напоминайте и напоминайте при любом удобном случае, ребенку любого возраста, правила, формулы, суть действий и т. п. **Помните: ребенок и не должен ничего помнить до тех пор, пока мы его этому не научим!** (цикл IV, задача 11).

5. При любой возможности — хвалите ребенка, но только за реальные достижения! Эти достижения могут быть очень незначительны: правильный счет, верная мысль, хорошо нарисованная ГРАС... Но у вас, читатель, должна выработаться привычка буквально рефлекторно проговаривать: молодец! отлично! великолепно! и т. п.

- **Технологического характера**

1. Почерк — ясно, четко, «читабельно».

2. Имена слагаемых — удобные, мнемоничные. **Три системы обозначений**: стандартная индексная, предметная, синтезная индексная (см. цикл III, задача 3).

3. В арифметике мы **не знаем**, что такое **«меньше»** — **только «больше»!**

4. ГРАЭЛ-(> на) — при малейшей заминке — направляющие вопросы: «Что больше?.. Что из чего состоит?.. Напиши **неравенство с «Графики»** и переведи его в равенство» (см. цикл II, сценарий и цикл IV, задача 11).

5. ГРАЭЛ-(=) — обязательно писать знак «=» **как действие** (см. цикл VI, задача 3).

6. Вспомогательные графсхемы — «Графика» может состоять из нескольких ГРАС (см. цикл IV. задача 13).

7. Промежуточные суммы (см. цикл V, задача 5)

8. Критерий расстановки действий: «Можно посчитать сумму или нет? Известны ли оба слагаемых?» (см. цикл IV, задача 1).

9. АИД — алгоритм извлечения данных (см. цикл VI, задача 3):

- «скользя по тексту» ищем ключевые слова соответствующих ГРАЭЛов
- параллельно — слагаемые, связанные этими ГРАЭЛми
- параллельно — любые числа ⇔ значения каких-либо слагаемых.

10. После построения «Графики» — с текстом **уже не работаем**.

- **Общего характера**

1. Все промежуточные вычисления ведем **<u>рядом</u>** (на полях) с записью уравнений (арифметики), чтобы была возможность **проверить их сразу**, не отвлекаясь **на повторные** вычисления. **Поля** как раз и используются для промежуточных вычислений (точнее, **отчеркиваем сами** поля **в нужном месте** для вычислений — поля совсем не обязательны вдоль всего листа, отчеркиваем столько, сколько необходимо).

2. При вычитании, занимая единицу разряда, над разрядом **обязательно ставим точку**, чтобы **<u>видеть</u>**, что заняли единицу разряда и раздробили ее в единицы младшего разряда.

3. При сложении и умножении не просто запоминаем единицы для старшего разряда, а **обязательно пишем их**, да еще обводим кружочком.

Что касается точек над разрядами и единиц для старшего разряда, то опыт показывает, что, к сожалению, огромное количество вычислительных ошибок возникает именно по этой причине. Особенно — в состоянии усталости, особенно — в условиях спешки и отсутствия добротной вычислительной техники. К тому же, крайне трудно впоследствии научить ребенка этим простейшим приемам. А мы с вами, читатель, постоянно должны помнить: **плохой счет — принципиальное ограничение для овладения языком математики**!

Соответствие решения ГРАН школьным формам записи решения

Как пишет Н. Б. Истомина: «Начальный курс математики ставит своей **основной целью** научить младших школьников решать задачи **арифметическим способом** (о различных способах решения задач см. глава I), который сводится к выбору арифметических действий, моделирующих связи между данными и искомыми величинами. Решение задач оформляется в виде последовательности числовых равенств, к которым даются пояснения или числовым выражением» (все выделено мной. — В. Х. [7, с. 200]).

Далее я приведу четыре формы записи решения (не путать со способами: практический, арифметический, алгебраический, графический) по Истоминой Н. Б. И решение ГРАН (рис. 75). Задача с использованием действия вычитания, но это не должно явиться для нас каким-либо препятствием, читатель, свою же иллюстративную функцию она выполнит превосходно.

Задача [7, с. 200–201].

У мальчика было 90 книг. 28 он поставил на первую полку, 12 — на вторую, остальные — на третью. Сколько книг на третьей полке?

а) Решение по действиям:

1) 28 + 12 = 40 (к.)
2) 90 – 40 = 50 (к.)

Ответ: 50 книг на третьей полке.

b) По действиям с пояснением:

1) 28 + 12 = 40 (к.) — на первой и второй полках вместе,
2) 90 – 40 = 50 (к.) — на третьей полке.

Ответ: 50 книг.

c) С вопросами:

1) Сколько книг на первой и второй полках вместе?
28 + 12 = 40 (к.)
2) Сколько книг на третьей полке?
90 – 40 = 50 (к.)

Ответ: 50 книг на третьей полке.

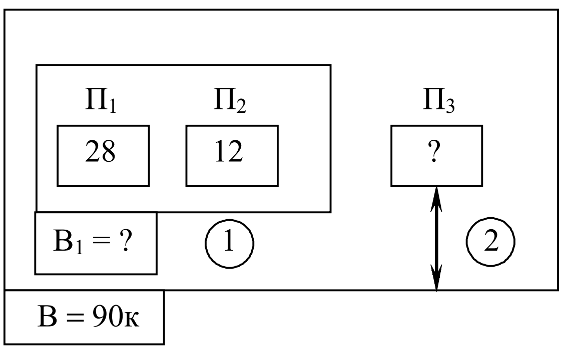
d) Выражением:

90 – (28 + 12)

Ответ: 50 книг на третьей полке.

Решение ГРАН

Графика



	Алгебра		**Арифметика**
1).	$В_1 = П_1 + П_2$	=	28 + 12 = 40
2).	$В = В_1 + П_3$		
	$П_3 = В – В_1$	=	90 – 40 = 50

Рис. 75

Видим, что вопросы **(c)** или пояснения **(b)** мы в прямом смысле слова **«считываем»** с «Алгебры», **благодаря мнемонике** имен слагаемых:

1). $П_1 + П_2$ ⇔ Полка-1 + Полка-2 ⇔ Сколько на 1-й и 2-й полках вместе («вместе» ⇔ $В_1$ — Всего — уравнение написано с «Графики»)?

2). $П_3 = \ldots$ ⇔ Полка-3 =… ⇔ Сколько книг на 3-й полке?

В качестве арифметических действий берем наш блок «Арифметики».

Чтобы оформить решение задачи по действиям **(a)** — **просто переписываем** блок «Арифметики».

Оформить решение выражением **(d)** не составит труда, если мы **впоследствии** потренируемся подставлять в наши уравнения алгебраические выражения так, как указано ниже:

$В - В_1 \ = \ В - (В_1) \ = \ В - (П_1 + П_2) \ = \ 90 - (28 + 12)$

В последнее (в данном случае — 2-е) действие вместо $В_1$ подставляем его выражение $(П_1 + П_2)$ из 1-го действия и берем опять-таки арифметическую часть.

После первого знака «=» я взял $В_1$ в скобки исключительно в иллюстративных целях, ради наглядности: показать ребенку, что $В_1$ может быть как числом, если мы доводим его до «Арифметики» (40 — числовое значение $В_1$), так и алгебраическим выражением $(П_1 + П_2)$, не доведенным до числа, что, впрочем, давно уже знакомо ребенку по блоку «Алгебры».

Примеры на составление задач по выражению

Составление задач по выражению особенно активно идет во втором классе (см. 18).

Возьмем сумму трех чисел: 3 + 2 + 4. Нарисуем три незаполненных слагаемых (рис. 76).

Рис. 76

Теперь используем **ГРАЭЛ-(∑)**. Из суммы трех чисел мы можем получить два выражения (имеется в виду, что в каждом действии участвуют только два слагаемых): (3 + 2) + 4 и 3 + (2 + 4). Рисуем ГРАС, соответствующую каждому выражению (рис. 77–78).

ГРАС-1 (3 + 2) + 4

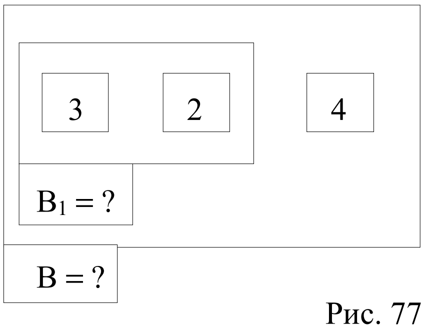


Рис. 77

ГРАС-2 3 + (2 + 4)

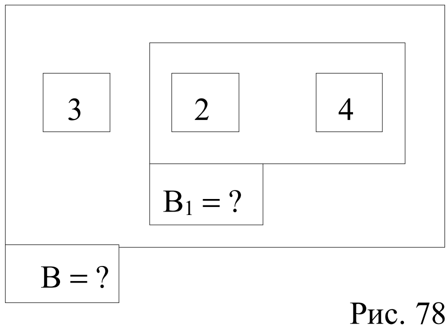


Рис. 78

Наши ГРАС-1, 2 представляют собой не «Графику», а только логический скелет задачи. Нужно придумать задачу. Для этого — **прежде всего!** — озаботимся «размерностью»: **что считаем**?

Будем считать, например, котов, т. е. содержимое слагаемых — 3, 2 и 4 кота, «размерность» — коты [к].

Как только условились о «размерности», начинаем **размещать** котов по слагаемым, т. е. думаем, **видя** ГРАС, об **именах** слагаемых.

Пусть коты сидят в комнатах (используем стандартную индексную систему обозначений): **$К_1$**, **$К_2$**, **$К_3$** — 1-я, 2-я и 3-я комнаты.

Имея же логический скелет задачи в виде ГРАС, «размерность» и имена слагаемых, получаем «Графику» будущей задачи (рис. 79).

Графика

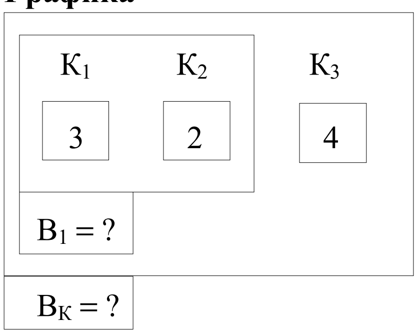


Рис. 79

«Считываем» с «Графики» текст задачи «в лоб», напрямую **переводя** «Графику» в текст:

«В трех комнатах сидят 3, 2 и 4 кота соответственно. Сколько котов сидит в первой и второй (второй и третьей для ГРАС-2) комнатах? Сколько всего в доме котов?»

Именно так создавались почти все задачи этой книги.

Возьмем **ГРАЭЛ-(> на)** для тех же самых выражений (рис. 80–81).

ГРАС-3 (3 + 2) + 4

3 < ? < ?

2 4

Рис. 80

ГРАС-4 3 + (2 + 4)

? > ? > 2

3 4

Рис. 81

«Размерность» та же — коты [к].

Ради разнообразия придумаем задачу в предметных обозначениях. Суть задачи нам ясна из логического скелета: ГРАС-3, 4 (совершенно тождественных, как и ГРАС-1, 2). **Видим**: поскольку содержимое слагаемых (число котов, на сколько больше) нам известно, то остается подумать о том, где **разместить** котов (об именах слагаемых). К тому же, мы можем **поразвлечься** в придумывании текстового сюжета задачи, как-то затруднить ее даже в таком примитивном случае, как наш.

Например, пусть наши коты живут на Луне, Марсе и каком-нибудь астероиде. Ставим имена слагаемых, и доводим логический скелет до «Графики» (рис.82).

Графика

Л М А

3 < ? < ?

2 4

Рис. 82

Текст — это уже фантазия ребенка. Например:

Задача-сказка.

Три юных хоббита Сэм, Мери и Пин отправились в космос на поиски открытий. Они побывали на Марсе, Луне и одном из астероидов (астероид, если ты этого не знаешь, — просто каменная глыба, летающая в космосе). Вы знаете, что они там нашли? — Космических котов. Пин, Мери и Сэм знали математику и когда они посчитали котов, то выяснилось, что на астероиде их было на четыре больше, чем на Марсе, а на Марсе — на два кота больше, чем на Луне.

А ты сможешь узнать, сколько котов живет на астероиде, если на Луне их целых 3 штуки?

Заметьте, мы умудрились максимально затруднить простейшую задачу 1 цикла IV:

• Введением **лишних данных** (**три** хоббита).

• **Обратным построением условия** (слагаемые появляются в тексте в обратном порядке: неизвестные А(стероид) и М(арс).

• **Расположением вопроса** в текстовом пространстве задачи (известное слагаемое Л(уна) следует за вопросом задачи).

Конечно, сами по себе подобные тексты вряд ли обладают особой методической ценностью (***после того**, как мы научились распознавать такие текстовые изыски авторов задач*). Но если уж ребенок должен придумать задачу, то почему бы и не поразвлекаться немного. И не только дома, а например, и в классе, на уроке математики, устроив что-нибудь типа КВН.

Например, в 6-м классе «Новой школы» г. Ростова-на Дону было проведено занятие на составление задач по графсхемам.

Автор: Каймакова Саша (копирующий подход).

У Васи жили коты: сибирские, английские и австралийские. Сибирские коты обитали в подвале и их было на четыре больше, чем английских, которые жили на крыше. Английских же — на два больше, чем австралийских, живущих дома. Сколько котов было у Васи, если австралийских было целых три штуки?

Автор: Полякова Наташа (творческий подход, но художественно необработанный).

В саду на Земле росли ивы, пальмы и липы. Лип было на тридцать одну больше, чем пальм, которых было на пятнадцать больше, чем ив. В саду на Луне росли баобабы и тополя. Баобабов было больше, чем тополей на четырнадцать деревьев. Сколько деревьев росло на Земле и сколько всего было деревьев, если на Луне тополя вырубили прошлой ночью, а на Земле ив было на три больше, чем баобабов?

Вы видите, что одна девочка просто взяла уже готовую графсхему и практически текст нашей задачи о котах. Однако она **не просто скопировала** ГРАС-3 (рис. 80), а дополнила ее ГРАЭЛом суммы (сколько всего котов?). Вторая же девочка с**амостоятельно разработала** сложную графсхему и сконструировала задачу **в шесть действий** (кстати, читатель, предоставляю ее решение вам для самостоятельной работы).

Подсказка.

Используем от двух до четырех ГРАС (как удобнее).
Скрытые данные: тополи вырубили $\Leftrightarrow$ Т = 0.
Ответы: На Земле — $В_З$ = 112 шт.; Всего — В = 126 шт.

То есть ГрафАнализ можно использовать не только в чисто учебных или развлекательных целях, но проводить **соревнования по конструированию задач**, причем оценивать такие соревнования можно как по фактору оригинальности логической конструкции, так и по фактору художественного оформления (что совершенно отсутствует в вышеприведенных задачах школьниц) — в чем-то эта работа будет сродни написанию мини-сочинений.

Замечание.

В общем-то процесс придумывания задач по выражениям сложнее, нежели их решение. Особенно при подключении действия деления. Это и понятно. Решая задачу, мы реализуем одну-единственную логическую конструкцию. А вот сочиняя задачу (т. е. формируя ее логический скелет в виде ГРАС и доводя его до «Графики»), мы зачастую оказываемся в ситуации множественного выбора.